CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för elektroteknik
System- och reglerteknik

ERE 103 Reglerteknik D
Tentamen 2020-01-17

14.00 – 18.00

Examinator: Bo Egardt, tel 3721.
Zahra Ramezani (tel. 1194) kommer att besöka under tentamen.

Tillåtna hjälpmedel:

- Chalmers-godkänd räknare
- Mathematics Handbook (Beta)
- Physics Handbook
- Formelsamling M3 och D3

Poängberäkning: Tentamen består av 5 uppgifter om totalt 30 poäng. Nominella betygsgränser är 12 (3), 18 (4) respektive 24 (5) poäng.
Lösningarna skall vara tydliga och väl motiverade!

Tentamensresultat: Granskning av rättningen erbjuds den 31 januari kl 12-13 i rum 5310 i EDIT-byggnaden. Kommer du senare mottages endast skriftliga klagomål mot rättningen. Sådana skriftliga klagomål måste lämnas in **senast två veckor** efter ordinarie granskning.

LYCKA TILL!

Uppgift 1.

a. Sambandet mellan insignalen u och utsignalen y för ett dynamiskt system ges av differentialekvationen

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 3u(t-2)$$

Låt insignalen vara $u(t) = \sin \omega t$. Bestäm $y(t)$ för stora t ($t \to \infty$).
(2 p)

b. En process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

återkopplas med en PI-regulator

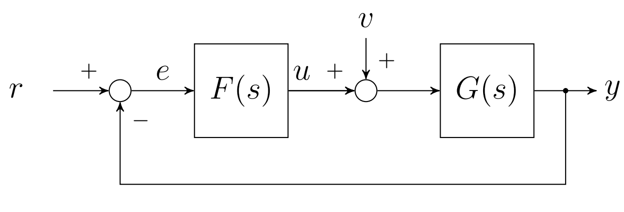
$$F(s) = K\big(1 + \frac{1}{sT_i}\big), \quad K > 0, T_i > 0$$

För vilka värden på K och T_i är det återkopplade systemet stabilt?
(2 p)

c. En process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2 + s + 1}$$

återkopplas med en P-regulator $F(s) = K = 2$ enligt nedan.



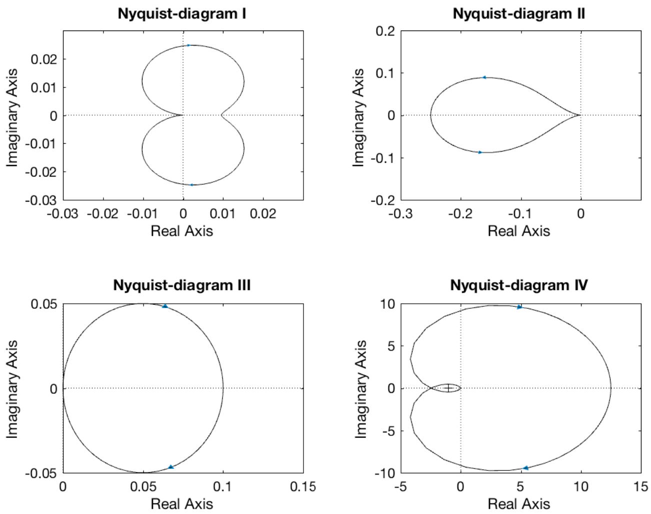
Vad blir störningen v:s stationära bidrag till utsignalen y, då v är en stegstörning med amplituden 3?
(2 p)

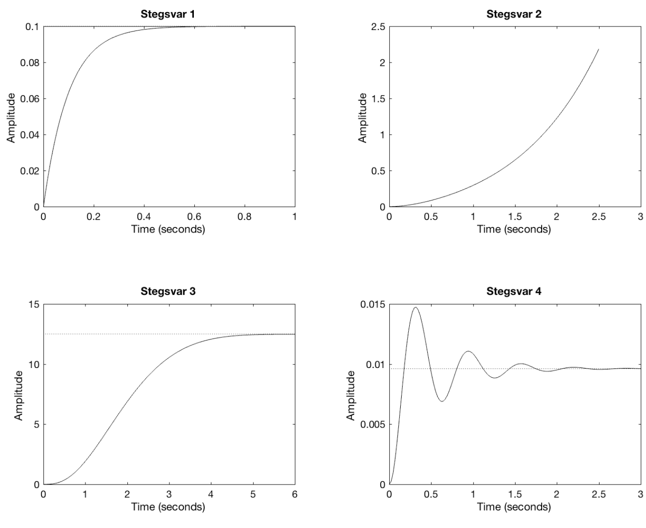
d. Nyquistdiagram och stegsvar för fyra system med överföringsfunktioner

$$G_A(s) = \frac{1}{s+10} \qquad G_B(s) = \frac{25}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

$$G_C(s) = \frac{1}{s^2+4s+104} \qquad G_D(s) = \frac{1}{(s-1)(s+4)}$$

visas i figurerna nedan. Para ihop systemen med rätt figurer, och motivera noga dina svar med lämpliga räkningar och/eller överslag—poäng ges endast för korrekta motiveringar! (4 p)





Lösning:

a. *Laplace-transformering (med initialvillkoren 0) ger*

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = 3e^{-2s}U(s),$$

vilket ger överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3e^{-2s}}{(s+1)(s+2)}$$

Eftersom $G(s)$ är strikt stabil, så ges utsignalen för stora t av

$$\begin{aligned} y(t) &= |G(i\omega)| \sin(\omega t + \arg G(i\omega)) \\ &= \frac{3}{\sqrt{(1+\omega^2)(4+\omega^2)}} \sin(\omega t - 2\omega - \arctan\omega - \arctan\frac{\omega}{2}) \end{aligned}$$

b. *Kretsöverföringen är $L(s) = K(1+sT_i)/[sT_i(s^2+2s+2)]$, vilket ger slutna systemets karakteristiska polynom:*

$$sT_i(s^2+2s+2) + K(1+sT_i) = T_i \cdot (s^3 + 2s^2 + (2+K)s + K/T_i)$$

Rouths tabell för detta polynom (skippa faktorn T_i) får en första kolumn med talen $1, 2, 2+K-\frac{K}{2T_i}, K/T_i$, och systemet är stabilt precis då dessa samtliga är positiva. Villkoret blir alltså $2+K-\frac{K}{2T_i} > 0$ eller:
$T_i > \frac{K}{2(2+K)}$.

c. *Slutvärdessatsen kan användas, eftersom det slutna systemet är stabilt (karakteristiska polynomet $s^2 + (K+1)s + K + 1$ har positiva koefficienter):*

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{G(s)}{1+F(s)G(s)} \cdot \frac{3}{s} = \frac{1}{1+2\cdot 1} \cdot 3 = 1$$

d. *Nyquistdiagrammet fås från avbildningen $s \mapsto G(s)$ då s genomlöper Nyquists kontur γ. En del av denna utgörs av segmentet $\gamma_1 : s = i\omega, \omega \in [r, R]$ där man låter $r \to 0$ och $R \to \infty$. Som ledning studerar vi hur detta segment avbildas under respektive överföringsfunktion:*

G_A : *Börjar i $1/10$ och slutar i $-i/R$. Uppfylls endast av diagram III.*

G_B : *Börjar i $25/2$ och slutar i $25i/R^3$. Uppfylls endast av diagram IV.*

G_C : *Börjar i $1/104$ och slutar i $-1/R^2$. Uppfylls endast av diagram I.*

G_D : *Börjar i $-1/4$ och slutar i $-i/R^2$. Uppfylls endast av diagram II.*

För stegsvaren gäller:

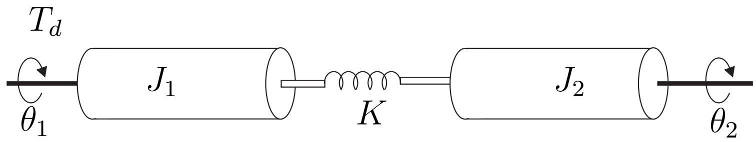
G_A : *Stabilt, första ordningens system med statisk förstärkning 0.1. Svarar mot stegsvar 1.*

G_B : *Stabilt och väldämpat andra ordningens system med statisk förstärkning 25/2. Svarar mot stegsvar 3.*

G_C : *Stabilt andra ordningens system med dålig dämpning och statisk förstärkning 1/104. Svarar mot stegsvar 4.*

G_D : *Instabilit system (en pol i $s = 1$). Svarar mot stegsvar 2.*

Uppgift 2.
Betrakta drivaxeln i figuren nedan.



Det drivande momentet $T_d(t)$ är systemets insignal. Rotationsvinkeln för de två axelhalvorna med tröghetsmomenten J_1 respektive J_2 är $\theta_1(t)$ respektive $\theta_2(t)$. Vinkelhastigheten för de två halvorna är $\omega_1(t) = \dot{\theta}_1(t)$ respektive $\omega_2(t) = \dot{\theta}_2(t)$. De två axelhalvorna förbinds med en torsionsfjäder, och momentet över denna är proportionellt mot vinkelskillnaden med proportionalitetskonstanten K. Friktionen försummas.

a. Bestäm en tillståndsmodell på (A, B, C)-form för systemet med utnyttjande av tre tillståndsvariabler: $x_1 = \theta_1 - \theta_2$, $x_2 = \omega_1$ och $x_3 = \omega_2$. Låt utsignalen vara vinkelhastigheten ω_2 på höger axelhalva. (3 p)

b. Avgör om utsignalen $\omega_2(t)$ alltid kommer att gå mot 0 då det drivande momentet $T_d(t)$ går mot 0. (2 p)

Lösning:

a. Newtons lag för roterande system ger

$$
\begin{aligned}
J_1\dot{\omega}_1(t) &= T_d(t) - K(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \\
J_2\dot{\omega}_2(t) &= K(\theta_1(t) - \theta_2(t))
\end{aligned}
$$

Med de föreslagna tillståndsvariablerna fås

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= \dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_2(t) = \omega_1(t) - \omega_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= \dot{\omega}_1(t) = -\frac{K}{J_1}x_1(t) + \frac{1}{J_1}T_d(t) \\
\dot{x}_3(t) &= \dot{\omega}_2(t) = \frac{K}{J_2}x_1(t)
\end{aligned}
$$

eller

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -K/J_1 & 0 & 0 \\ K/J_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/J_1 \\ 0 \end{bmatrix} T_d(t) \\
y(t) &= \omega_2(t) = Cx(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)
\end{aligned}
$$

b. Lösning av systemekvationerna (alternativt direkt beräkning av överföringsfunktionen) ger

$$Y(s) = \frac{K}{J_1 J_2} \frac{1}{s(s^2 + K/J_1 + K/J_2)} T_d(s)$$

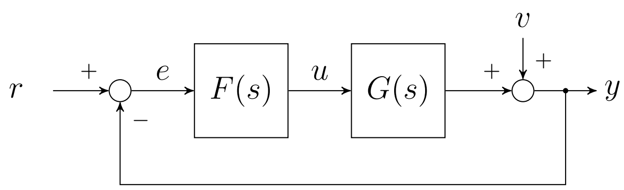
På grund av den rena integratorn, så följer inte av $T_d(t) \to 0$ *att* $y(t) \to 0$. *Man kan också direkt verifiera i systemekvationerna att en lösning med* $T_d = 0$ *ges av* $x_1 = 0$, $x_2 = x_3 =$ *konst. Att axeln fortsätter att rotera utan drivande moment beror på att friktionen försummats.*

Uppgift 3.

En process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{10}{1+4s}e^{-s/2}$$

skall återkopplas med regulatorn $F(s)$ enligt blockschemat nedan:



a. Välj lämplig regulator till systemet och bestäm regulatorparametrarna, så att nedanstående specifikationer uppfylls:

1. Inga kvarstående fel efter stegformade processtörningar v.
2. Systemets fasmarginal ska vara $\varphi_m = 60°$.
3. Skär(överkorsnings-)frekvensen får inte understiga $\omega_c = 1$ rad/s.

(3 p)

b. Hur stor är amplitudmarginalen med den design du gjort i (a)? Ett approximativt värde räcker. (2 p)

Lösning:

a. *Krav 1 innebär att integralverkan behövs, dvs pröva en PI-regulator* $F(s) = K_i\frac{1+T_i s}{s}$. *Vid* $\omega_c = 1$ *har processen fasförskjutningen* $\arg G(i\omega_c) = -\arctan 4\omega_c - \omega_c/2 \approx -1.83\text{rad} = -104.6°$. *Med* $\varphi_m = 60°$, *så kan vi alltså låta regulatorn ge ytterligare* $180 - 60 - 104.6 = 15.4°$ *fasförskjutning vid* $\omega = \omega_c = 1$. *Detta ger* $\arg F(i\omega_c) = \arctan T_i\omega_c - \pi/2 = -15.4 * \pi/180$ *eller* $T_i = \tan 74.6° \approx 3.6$. *Justera slutligen förstärkningen så att* $|F(i\omega_c)G(i\omega_c)| = K_i\sqrt{1+T_i^2} \cdot 10/\sqrt{17} = 1$, *vilket ger* $K_i = 0.11$.

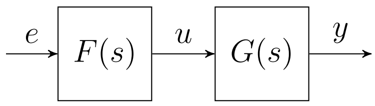
b. *Kretsöverföringen är* $L(s) = 1.1\frac{1+3.6s}{s(1+4s)}e^{-s/2}$, *vilket ger*

$$|L(i\omega)| = 1.1\frac{\sqrt{1+(3.6\omega)^2}}{\omega\sqrt{1+(4\omega)^2}}$$

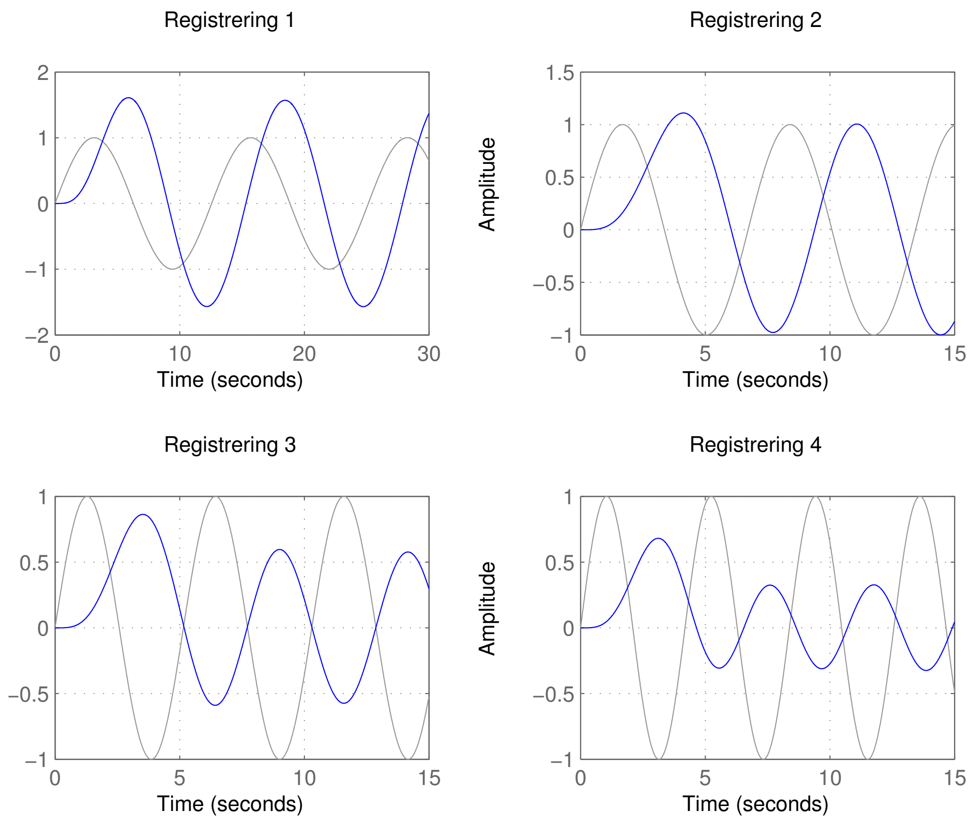
$$\arg L(i\omega) = -\pi/2 + \arctan 3.6\omega - \arctan 4\omega - \omega/2$$

Frekvenskurvan skär negativa reella axeln då $\arg L(i\omega) = -\pi$*, dvs då* $\omega = \pi + 2(\arctan 3.6\omega - \arctan 4\omega)$*. Genom att t ex iterera denna formel 3-4 ggr med startvärde* $\omega = \omega_c = 1$*, så fås approximativt* $\omega_\pi \approx 3.1$*. Insatt i uttrycket för* $|L(i\omega)|$ *fås* $L(i\omega_\pi)| \approx 0.32$*, vilket ger en amplitudmarginal* $A_m = 1/0.32 \approx 3.1$*.*

Uppgift 4.
En kollega till dig har designat en regulator, som du skall ta i drift. Du vill gärna övertyga dig om att det slutna systemet kommer att vara stabilt, innan du sluter loopen. Till din hjälp har du resultaten från några experiment utförda i *open loop*, där regulatorns insignal e varierats som en sinussignal, och såväl regulatorns insignal som processens utsignal y registrerats. Se blockschemat nedan, där $F(s)$ är regulatorns överföringsfunktion och $G(s)$ är processens.



Fyra olika registreringar från dessa experiment visas nedan. Insignalen är alltså $e(t) = \sin(\omega t)$ för olika värden på ω.



a. Förklara hur man utifrån dessa registreringar har goda skäl att anta att det slutna systemet blir stabilt efter att reglerkretsen slutits. (3 p)

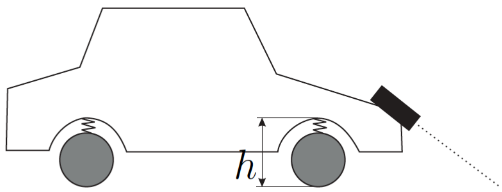
b. Utgående från att det slutna systemet är stabilt, beräkna fas- och amplitudmarginaler. Approximativa värden räcker, men motivera! (2 p)

Lösning:

a. *Vi kan börja med att konstatera att registreringarna dels indikerar att kretsöverföringen* $L(s) = F(s)G(s)$ *är stabil, dels ger de fyra punkter på Nyquistkurvan* $L(i\omega)$ *(efter att transienterna klingat av). Vi kan alltså tillämpa det förenklade Nyquistkriteriet för att avgöra stabiliteten då kretsen sluts. Registrering 2 visar att* $L(i\omega)$ *går in i enhetscirkeln (förstärkningen är 1!) i 3:e kvadranten (fasförskjutning motsvarande mellan 1/4 och 1/2 av en period, dvs mellan* $-90°$ *och* $-180°$*); registrering 3 visar att kurvan skär negativa realaxeln (fasförskjutning* $-180°$*!) till höger om den kritiska punkten (förstärkningen mindre än 1), dvs det slutna systemet är stabilt.*

b. *Registrering 2 ger fasmarginalen: periodtiden är c:a 7 s och tidsförskjutning insignal* $\rightarrow$ *utsignal är c:a 2.7 s. Detta ger* $\arg L(i\omega_c) \approx -\frac{2.7}{7}360 \approx -140°$*, dvs fasmarginalen är c:a* $40°$*.*
Registering 3 ger amplitudmarginalen: förstärkningen är c:a 0.6, dvs amplitudmarginalen c:a $1/0.6 \approx 1.7$.

Uppgift 5.
Vi skall i denna uppgift studera ett aktivt stötdämparsystem för en bil. I detta system ersätts fjädrar och stötdämpare av ett hydraulservo, vars kraft styrs av en regulator, som mäter avståndet mellan kaross och marken och försöker hålla detta konstant kring referensvärdet (som sätts till 0).



Hydraulservot beskrivs av överföringsfunktionen

$$G_{\text{servo}}(s) = \frac{1}{s/10 + 1}$$

och bilens dynamik beskrivs av

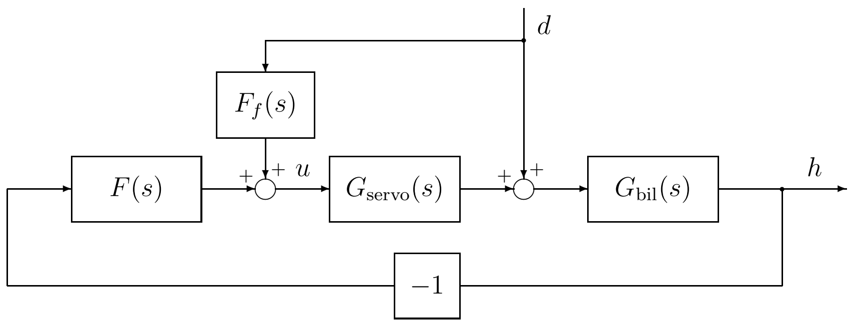
$$G_{\text{bil}}(s) = \frac{1}{s + 1}.$$

Regulatorn har överföringsfunktionen

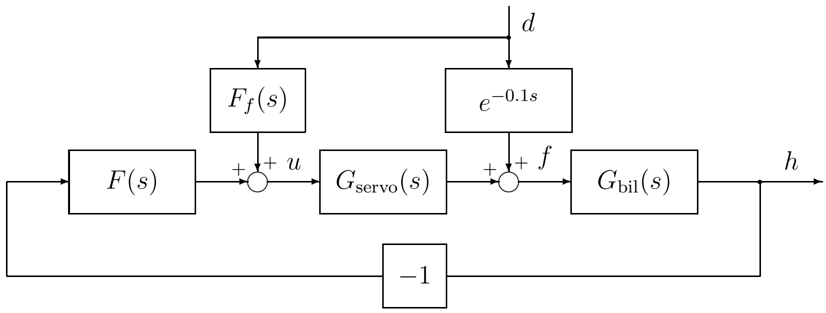
$$F(s) = 2\left(\frac{3}{s} + 1\right)$$

Slutligen kan vägens höjdförändringar ses som en laststörning d.

a. För att förbättra egenskaperna på ojämna vägar har en laseravståndsmätare installerats längst fram i bilen. På så sätt kan störningen d mätas innan den påverkar bilen, och vi kan använda denna mätning för en framkoppling $F_f(s)$ enligt blockschemat nedan. Hur skall $F_f(s)$ väljas så att störningen inte skall synas alls i utsignalen h? (2 p)



b. I själva verket fungerar lasermätningen så bra att den mäter störningen 0.1 s *innan* den påverkar bilen. Blockschemat förändras nu enligt nedan. Hur skall kompenseringen $F_f(s)$ ändras så att störningen d återigen inte slår igenom i utsignalen h? (1 p)



c. Anta samma situation som i (b) men att $F_f(s)$ förblir oförändrad från (a), dvs det kommer inte längre att vara en perfekt utsläckning av störningen. Visa att en störning med frekvensen $\omega = 10\pi$ i själva verket kommer att påverka bilen med dubbla amplituden jämfört med fallet utan framkoppling.
Ledning: Jämförelsen mellan de två fallen kan med fördel göras genom att bilda kvoten av motsvarande överföringsfunktioner. (2 p)

Lösning:

a. *Överföringsfunktionen från d till h blir*

$$G_{dh}(s) = \frac{(1 + F_f(s)G_{\text{servo}}(s))G_{\text{bil}}(s)}{1 + F(s)G_{\text{servo}}(s)G_{\text{bil}}(s)}$$

dvs för att ingen påverkan på h skall fås, så bör kompenseringen väljas som

$$F_f(s) = -1/G_{\text{servo}}(s) = -(1 + s/10)$$

Detta är en stabil kompensering, men den innehåller en ren derivering.

b. *Överföringsfunktionen modifieras nu till*

$$G_{dh}(s) = \frac{(e^{-0.1s} + F_f(s)G_{\text{servo}}(s))G_{\text{bil}}(s)}{1 + F(s)G_{\text{servo}}(s)G_{\text{bil}}(s)}$$

vilket ger en ändrad kompensering enligt

$$F_f(s) = -e^{-0.1s}/G_{\text{servo}}(s) = -e^{-0.1s}(1 + s/10)$$

Jämfört med (a) innebär detta bara en extra fördröjning av framkopplingen.

c. *Överföringsfunktionen från d till h är med framkopplingen från (a):*

$$G_{dh}^{\text{ff}}(s) = \frac{(e^{-0.1s} + F_f(s)G_{\text{servo}}(s))G_{\text{bil}}(s)}{1 + F(s)G_{\text{servo}}(s)G_{\text{bil}}(s)} = \frac{(e^{-0.1s} - 1)G_{\text{bil}}(s)}{1 + F(s)G_{\text{servo}}(s)G_{\text{bil}}(s)}$$

medan motsvarande överföringsfunktion utan framkoppling är

$$G_{dh}(s) = \frac{e^{-0.1s}G_{\text{bil}}(s)}{1 + F(s)G_{\text{servo}}(s)G_{\text{bil}}(s)}$$

Studera nu kvoten

$$Q(s) = \frac{G_{dh}^{\text{ff}}(s)}{G_{dh}(s)} = \frac{e^{-0.1s} - 1}{e^{-0.1s}}$$

Det gäller att $|Q(i\omega)| = |e^{-i\cdot 0.1\omega} - 1| \leq 2$ *och för* $\omega = 10\pi$ *fås*

$$|Q(i \cdot 10\pi)| = |e^{-i\pi} - 1| = |-1-1| = 2$$

dvs denna störningsfrekvens slår igenom med dubbla amplituden med framkoppling jämfört med fallet utan framkoppling.

SLUT!