CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för elektroteknik
System- och reglerteknik

ERE 103 Reglerteknik D
Tentamen 2019-04-24

14.00 - 18.00

Examinator: Bo Egardt, tel 3721.
Zahra Ramezani (tel. 1194) kommer att besöka under tentamen.

Tillåtna hjälpmedel:

- Chalmers-godkänd räknare
- Mathematics Handbook (Beta)
- Physics Handbook
- Formelsamling M3 och D3

Poängberäkning: Tentamen består av 5 uppgifter om totalt 30 poäng. Nominella betygsgränser är 12 (3), 18 (4) respektive 24 (5) poäng.
Lösningarna skall vara tydliga och väl motiverade!

Tentamensresultat: Granskning av rättningen erbjuds den 9 maj kl 12-13 i Reglerlabbet, rum 5220 i EDIT-byggnaden. Kommer du senare mottages endast skriftliga klagomål mot rättningen. Sådana skriftliga klagomål måste lämnas in **senast två veckor** efter ordinarie granskning.

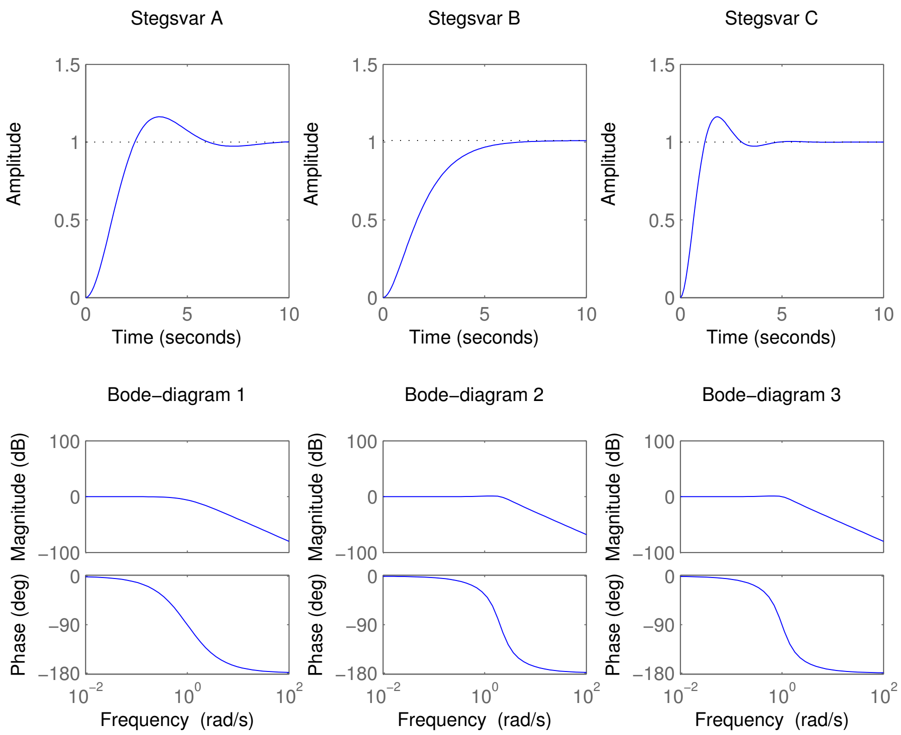
LYCKA TILL!

Uppgift 1.

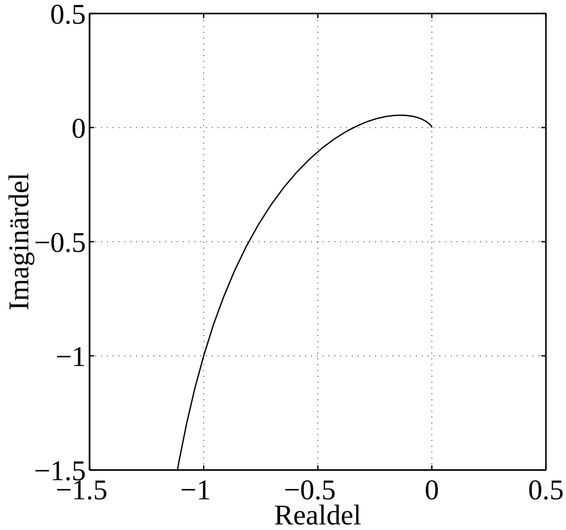
a. Bestäm den överföringsfunktion, som för låga frekvenser approximerar överföringsfunktionen $G(s)$ nedan, och avgör för vilken frekvens den approximativa överföringsfunktionen har förstärkningen 0 dB. (2 p)

$$G(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{s+1}{s^2+2s}$$

b. Figuren nedan visar stegsvar och Bode-diagram för tre olika system. Para ihop de figurer som hör ihop, dvs beskriver samma system, och motivera ditt svar! (2 p)



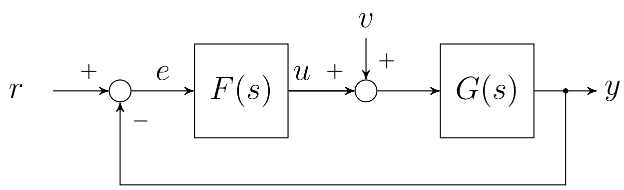
c. Ett stabilt system med Nyquistkurva enligt figur återkopplas med en P-regulator $u(t) = K(y_r(t) - y(t))$. Hur skall K väljas för att fasmarginalen ska bli 45°? (2 p)



d. En process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$$

återkopplas med en P-regulator $F(s) = K = 2$ enligt nedan.



Vad blir störningen v:s stationära bidrag till utsignalen y, då v är en stegstörning med amplituden 3? (2 p)

e. Man vill konstruera ett analogt filter, som filtrerar bort en kraftig störningskomponent med ungefärlig frekvens 3 rad/s. Konstruera ett sådant filter utgående från ett första ordningens LP-filter av Butterworth-typ. Låt bandbredden för filtret vara 5 rad/s. (2 p)

Lösning:

a. *Gör liknämnigt och approximera:*

$$G(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{s+1}{s^2+2s} = \frac{-1}{s(s+1)(s+2)} \approx \frac{-1}{2s},$$

där approximationen gäller för små ω. *Förstärkningen för denna är 1 (eller 0 dB) för* $\omega = 0.5$.

b. *Stegsvaren med översläng (A, C) svarar mot överföringsfunktioner med en resonanstopp (2, 3), och det snabbare stegsvaret C motsvaras av en högre brytfrekvens i 2. Alltså: A-3, B-1, C-2.*

c. *I figuren kan avläsas att Nyquistkurvan skär punkten* $(-1,-1)$, *där fasen är* $-135°$. *Om denna punkt "dras in" till enhetscirkeln, så fås fasmarginalen* $45°$. *Förstärkningen som krävs är* $1/\sqrt{2}$.

d. *Slutvärdessatsen kan användas, eftersom det slutna systemet är stabilt (karakteristiska polynomet* $s^2 + (K+1)s + K + 1$ *har positiva koefficienter):*

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{G(s)}{1+F(s)G(s)} \cdot \frac{3}{s} = \frac{1}{1+2\cdot 1} \cdot 3 = 1$$

e. *Lämpligt filter är ett bandspärrfilter. Med transformationen* $s \to Bs/(s^2 + \omega_M^2)$ *för* $B = 5$ *och* $\omega_M = 3$ *fås ett filter med överföringsfunktionen*

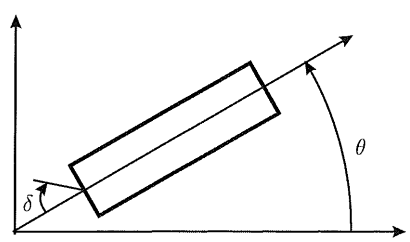
$$G(s) = \frac{s^2+\omega_M^2}{s^2+Bs+\omega_M^2} = \frac{s^2+9}{s^2+5s+9}$$

Uppgift 2.

I en artikel från 1922 studerade den rysk-amerikanske forskaren Minorsky riktningsstyrning av fartyg. Modellen som användes för att beskriva ett fartyg för en given hastighet var

$$J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + D\frac{d\theta(t)}{dt} = K\delta(t) + M_d(t)$$

där $\theta(t)$ är kursvinkeln, $\delta(t)$ är roderutslaget och $M_d(t)$ beskriver störande moment pga vågor, strömmar och vind; se figuren nedan.



Genom att mäta kursvinkeln kunde man använda en regulator för att automatiskt ställa ut lämpliga roderutslag. I artikeln gjordes också en indelning av regulatorer i olika typer enligt nedan, där det antagits att önskad kursvinkel (börvärdet) är 0.

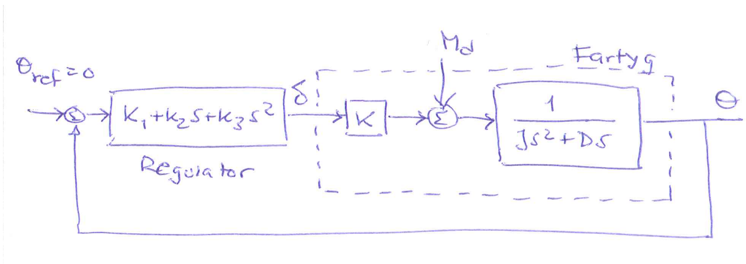
$$\begin{aligned}
\text{I.} \quad & \delta(t) = -k_1\theta(t) - k_2\frac{d\theta(t)}{dt} - k_3\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \\
\text{II.} \quad & \frac{d\delta(t)}{dt} = -k_1\theta(t) - k_2\frac{d\theta(t)}{dt} - k_3\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \\
\text{III.} \quad & \frac{d^2\delta(t)}{dt^2} = -k_1\theta(t) - k_2\frac{d\theta(t)}{dt} - k_3\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}
\end{aligned}$$

a. Rita ett blockdiagram över det återkopplade systemet med en regulator av typ I. Ange blockens överföringsfunktioner och in- och utsignaler och markera vad som är regulator och vad som är fartygsdynamik. Glöm inte att ange var processtörningen kommer in i blockdiagrammet. (3 p)

b. Vilken av regulatortyperna ovan svarar mot det vi idag kallar en PID-regulator? Motivera! (2 p)

Lösning:

a. Blockschema:



b. Regulator typ II har överföringsfunktionen

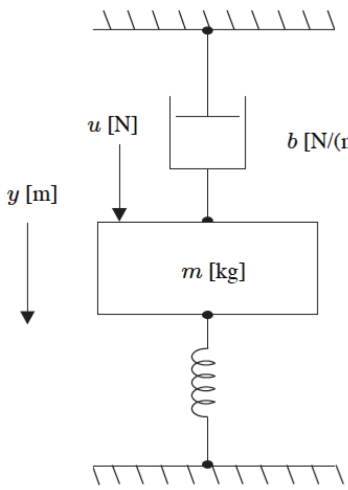
$$F(s) = \frac{k_1 + k_2 s + k_3 s^2}{s} = k_2 + \frac{k_1}{s} + k_3 s = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

dvs den motsvarar en PID-regulator utan filtrering av D-delen.

Uppgift 3.
En massa $m[kg]$ placeras på en olinjär fjäder med ett kraft-läges-beroende

$$F = k_1 y + k_2 y^3,$$

där F [N] är fjäderkraften och y [m] är sammanpressningen av fjädern jämfört med ospänt läge. För att stabilisera massan finns dessutom en linjär viskös dämpare med dämpkonstanten b [N/(m/s)]. Se figur nedan.



Ställ upp en olinjär tillståndsmodell på formen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= g(x, u) \end{aligned}$$

för det mekaniska systemet, där insignalen u [N] är en yttre kraft, som kan användas för att styra positionen på massan, dvs utsignalen y. (4 p)

Lösning: *Krafterna, som påverkar massan, är följande:*

- *Gravitationen:* $F_1 = mg$
- *Fjädern:* $F_2 = k_1 y + k_2 y^3$
- *Dämparen:* $F_3 = b\dot{y}$
- *Yttre kraft:* $F_4 = u$

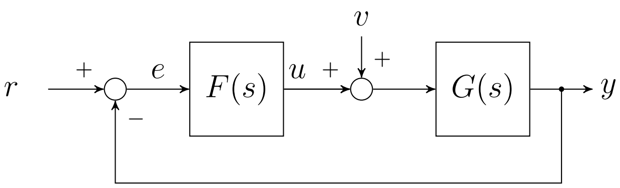
Kraftbalans ger

$$m\ddot{y} = mg - (k_1 y + k_2 y^3) - b\dot{y} + u$$

Om tillstånden väljs som $x_1 = y$ och $x_2 = \dot{y}$, så kan modellen skrivas

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= \frac{1}{m}\big(mg - (k_1 x_1 + k_2 x_1^3) - b x_2 + u\big) = -\frac{k_1}{m}x_1 - \frac{k_2}{m}x_1^3 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u + g \\
y &= x_1
\end{aligned}$$

Uppgift 4.
Blockschemat nedan visar ett reglersystem, innehållande en process med överföringsfunktionen $G(s) = 1/(s+1)^2$ och en P-regulator med överföringsfunktionen $F(s) = K$. Processen påverkas av en sinusformad störning v med frekvensen 0,5 rad/s och amplituden 2,5.



a. Beräkna amplituden för den sinusformade komponenten i utsignalen, som orsakas av störningen, då ingen återkoppling används (dvs $K = 0$). (2 p)

b. Bestäm P-regulatorns förstärkning K så att fasmarginalen blir 50°. (2 p)

c. Hur stor blir nu amplituden för den sinusformade komponenten i utsignalen? (2 p)

Lösning:

a. *Utsignalens amplitud blir*

$$A_y = 2.5 \cdot |G(i\omega)| = \frac{2.5}{|1 + 0.5i|^2} = \frac{2.5}{1.25} = 2$$

b. *Fasmarginalen* 50° *ger*

$$\arg KG(i\omega_c) = -2 \arctan \omega_c = -130^\circ \Rightarrow \omega_c = \tan 65^\circ = 2.14$$

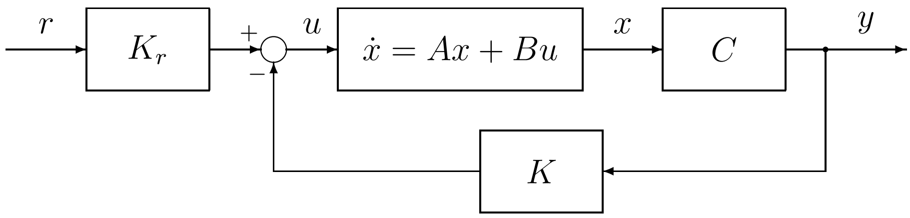
och K kan bestämmas:

$$|KG(i\omega_c)| = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{|G(i\omega_c)|} = |1 + i\omega_c|^2 = 5.6$$

c. *Utsignalens amplitud blir nu*

$$A_y = 2.5 \left| \frac{G}{1 + KG} \right| = \frac{2.5}{|(1+s)^2 + K|_{s=0.5i}} = \frac{2.5}{|1 + K - 0.5^2 + i|} \approx 0.39$$

Uppgift 5.
Betrakta följande återkopplade system:



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Signalerna r, u och y är skalärer, men tillståndsvektorn x har två element.

a. Bestäm K så att det återkopplade systemet får en pol i -1. (3 p)

b. Bestäm K_r så att ärvärdet y är lika med börvärdet r för långsamma börvärdesändringar. (2 p)

Lösning:

a. *Överföringsfunktionen från u till y ges av*

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{-4s + 4}{s^2 + s + 2}$$

Överföringsfunktionen från r till y blir då

$$G_{ry}(s) = \frac{K_r G(s)}{1 + KG(s)} = \frac{K_r(-4s + 4)}{s^2 + s + 2 + K(-4s + 4)} = \frac{K_r(-4s + 4)}{s^2 + (1 - 4K)s + 4K + 2}$$

En pol skall ligga i $s = -1$, dvs nämnaren i G_{ry} skall bli 0 för $s = -1$, vilket ger kravet $K = -1/4$.

b. *Med K enligt ovan får vi*

$$G_{ry}(s) = \frac{K_r(-4s + 4)}{s^2 + 2s + 1} = \frac{K_r(-4s + 4)}{(s + 1)^2}$$

dvs även den andra polen hamnar i -1. Kravet på följning av långsamma börvärdesändringar ger

$$G_{ry}(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad K_r = 1/4.$$

SLUT!