CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för elektroteknik
System- och reglerteknik

ERE 103 Reglerteknik D
Tentamen 2018-04-04

08.30 - 12.30

Examinator: Bo Egardt, tel 3721.
Jonas Fredriksson (tel. 1359) kommer att besöka under tentamen.

Tillåtna hjälpmedel:

- Typgodkänd räknare
- Mathematics Handbook (Beta)
- Physics Handbook
- Formelsamling M3 och D3

Poängberäkning: Tentamen består av 5 uppgifter om totalt 30 poäng. Nominella betygsgränser är 12 (3), 18 (4) respektive 24 (5) poäng. **Lösningarna skall vara tydliga och väl motiverade!**

Tentamensresultat: Granskning av rättningen erbjuds den 19 april - tid och plats kommer att anslås på PingPong. Kommer du senare mottages endast skriftliga klagomål mot rättningen. Sådana skriftliga klagomål måste lämnas in **senast två veckor** efter ordinarie granskning.

LYCKA TILL!

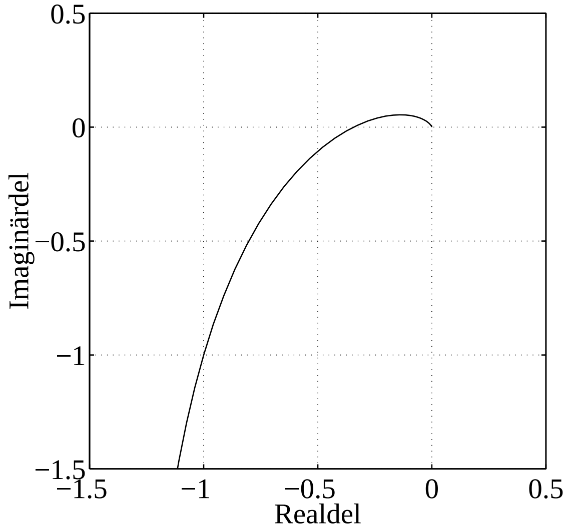
Uppgift 1.

a. Vid ett experiment mäts impulssvaret för ett system upp med följande resultat:

$$g(t) = e^{-0.5t}(1 + e^{-0.5t})$$

Vilken är systemets statiska förstärkning? (2 p)

b. Ett stabilt system med Nyquistkurva enligt figur återkopplas med en P-regulator $u(t) = K(y_r(t) - y(t))$. Hur skall K väljas för att fasmarginalen ska bli 45°? (2 p)



c. Ett system, som beskrivs av tillståndsmodellen nedan, skall förses med en tillståndsåterkoppling, som ger det återkopplade systemet en reell, stabil dubbelpol i $s = -a$ för något positivt a. Bestäm det värde på a som ger ett så snabbt system som möjligt under villkoret att koefficienterna i återkopplingen (säg l_1 och l_2) vardera har ett belopp som är högst lika med 1.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

(2 p)

d. Ett dynamiskt system med insignalen u och utsignalen y beskrivs av differentialekvationen

$$10\dot{y}(t) + y^2(t) = u(t)$$

Linjärisera differentialekvationen kring de stationära lösningarna som fås för den konstanta insignalen $u = 1$ och bestäm motsvarande överföringsfunktion(er) från insignal till utsignal. (2 p)

e. En process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

återkopplas med en PI-regulator

$$F(s) = K\big(1 + \frac{1}{sT_i}\big), \quad K > 0, T_i > 0$$

För vilka värden på K och T_i är det återkopplade systemet stabilt? (3 p)

Lösning:

a. *Impulssvaret $g(t) = e^{-0.5t} + e^{-t}$ ger efter Laplace-transformering*

$$G(s) = \frac{1}{s + 0.5} + \frac{1}{s + 1},$$

som har den statiska förstärkningen $G(0) = 2 + 1 = 3$.

b. *I figuren kan avläsas att Nyquistkurvan skär punkten $(-1, -1)$, där fasen är $-135°$. Om denna punkt "dras in" till enhetscirkeln, så fås fasmarginalen $45°$. Förstärkningen som krävs är $1/\sqrt{2}$.*

c. *Slutna systemets karakteristiska polynom är*

$$\det(\lambda I - (A - BL)) = \begin{vmatrix} \lambda + 4 + l_1 & 3 + l_2 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + (4 + l_1)\lambda + 3 + l_2$$

Vi önskar polynomet $(\lambda + a)^2 = \lambda^2 + 2a\lambda + a^2$, och identifiering av koefficienter ger $l_1 = 2a - 4$ och $l_2 = a^2 - 3$. Att göra a så stort som möjligt betyder alltså att göra l_1 och l_2 så stora som möjligt, dvs lika med 1. Insatt i resp uttryck ger detta $a = 5/2$ resp $a = 2$. Det är alltså l_2 som är begränsande och största värdet på a blir $a = 2$, vilket svarar mot $l_1 = 0$ och $l_2 = 1$.

d. *De stationära lösningarna fås genom att sätta* $u = u_0 = 1$ *och* $\dot{y} = 0$, *vilket ger två lösningar:* $y_0 = 1$ *respektive* $y_0 = -1$. *Den linjäriserade diff-ekvationen blir, uttryckt i avvikelser från de stationära värdena:* $10\dot{\Delta y} + 2y_0\Delta y = \Delta u$. *Laplacetransformering ger motsvarande överföringsfunktioner:*

$$G_1(s) = \frac{1}{10s+2} \qquad G_{-1}(s) = \frac{1}{10s-2}$$

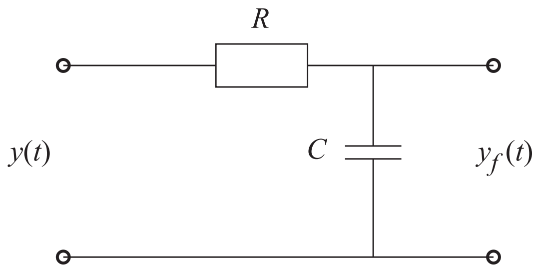
e. *Kretsöverföringen är* $L(s) = K(1+sT_i)/[sT_i(s^2+2s+2)]$, *vilket ger slutna systemets karakteristiska polynom:*

$$sT_i(s^2+2s+2) + K(1+sT_i) = T_i \cdot (s^3 + 2s^2 + (2+K)s + K/T_i)$$

Rouths tabell för detta polynom (skippa faktorn T_i*) får en första kolumn med talen* $1, 2, 2+K-\frac{K}{2T_i}, K/T_i$, *och systemet är stabilt precis då dessa samtliga är positiva. Villkoret blir alltså* $2+K-\frac{K}{2T_i} > 0$ *eller:* $T_i > \frac{K}{2(2+K)}$.

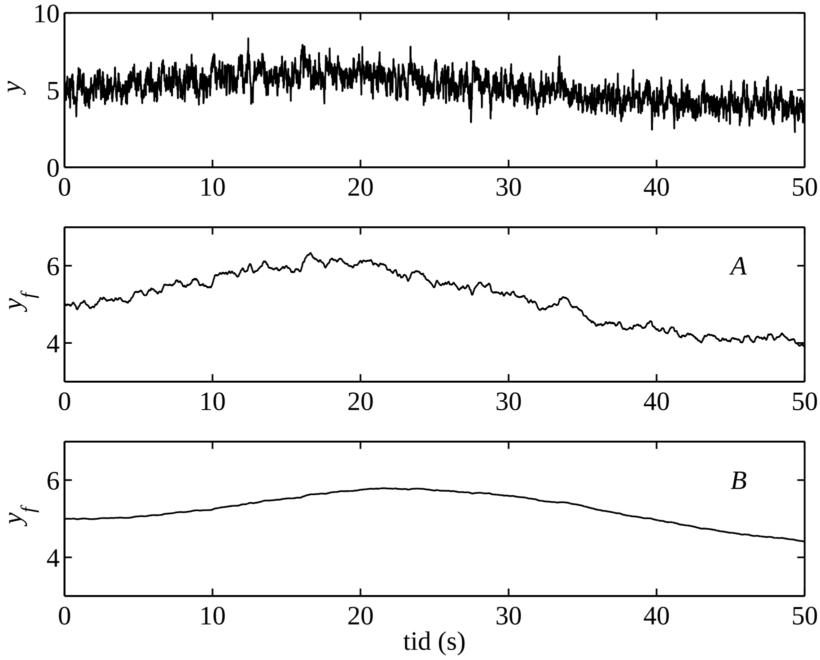
Uppgift 2.

Ett RC-filter enligt figuren nedan kan användas för att filtrera bort brus i en analog mätsignal.



a. Bestäm överföringsfunktionen från givarsignal y till filtrerad signal y_f. (2 p)

b. Vi har en resistans $R = 1000\,k\Omega$ och två olika kondensatorer, en med $C = 10\,\mu F$ och en med $C = 1\,\mu F$. I figuren nedan visas den ofiltrerade signalen y och de filtrerade signalerna för de två kapacitanserna. Vilken kapacitans (10 eller 1 μF) hör ihop med vilken plot (A eller B)? (2 p)



Lösning:

a. Resultatet kan fås via Kirchhoffs lagar och definition av kapacitans, alternativt genom en enkel impedansdelning:

$$Y_f(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{1 + RCs} Y(s)$$

b. Filtrets tidskonstant är alltså $T = RC$, dvs det större värdet på C ger större tidskonstant, alternativt lägre bandbredd, vilket ger kraftigare filtrering av signalen. Alltså: A svarar mot $C = 1$ och B svarar mot $C = 10$.

Uppgift 3.
En process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{2 - s}{s(1 + s)^2}$$

skall återkopplas med en PD-regulator

$$F_{PD}(s) = K_p \frac{1 + s\tau_d}{1 + s\tau_d/b}.$$

a. Bestäm parametrarna i regulatorn så att systemets fasmarginal blir minst 50° vid skärfrekvensen (överkorsningsfrekvensen) 0,5 rad/s. (3 p)

b. Bestäm den maximala tidsfördröjning man kan ha i kretsöverföringen utan att det återkopplade systemet blir instabilt.
Ledning: använd designspecifikationen i (a)—du behöver inte ha löst deluppgift (a) för att lösa denna deluppgift! (2 p)

Lösning:

a. *Specifikation:* $\omega_c = 0.5$ *rad/s,* $\varphi_m = 50°$. *Vid önskad skärfrekvens gäller*

$$|G(i\omega_c)| = \frac{\sqrt{4+\omega_c^2}}{\omega_c(1+\omega_c^2)} \approx 3.3.$$
$$\arg G(i\omega_c) = -\pi/2 - \arctan \omega_c/2 - 2\arctan \omega_c \approx 2.74\, rad = -157°,$$

vilket innebär att ett faslyft på $\varphi_{max} = 27°$ *behövs. Detta ger (se formelsamlingen)*

$$b = \frac{1+\sin\varphi_{max}}{1-\sin\varphi_{max}} \approx 2.7$$

och om max faslyft läggs vid ω_c *så gäller* $\tau_d = \sqrt{b}/\omega_c \approx 3.3$. *Slutligen, välj* K_p *så att kretsöverföringen får förstärkningen 1 vid* ω_c*:*

$$K_p = \frac{1}{\sqrt{b}|G(i\omega_c)|} \approx 0.19$$

PD-regulatorn blir alltså

$$F_{PD}(s) = 0.19\frac{1+3.3s}{1+1.2s}.$$

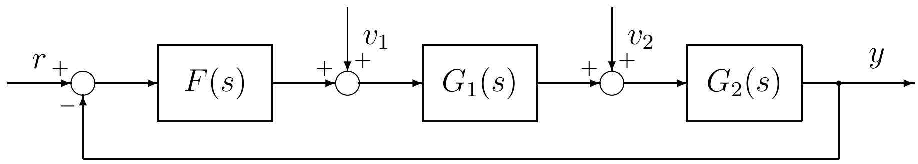
b. *En tidsfördröjning* e^{-sT_d} *ger fasminskningen* $-\omega_c T_d = -0.5T_d$ *rad vid skärfrekvensen. Villkoret för bibehållen stabilitet är alltså att denna fasminskning är (till beloppet) mindre än fasmarginalen:*

$$0.5T_d < \varphi_m \quad \Leftrightarrow \quad T_d < 2\varphi_m = 2\cdot 50 \cdot \frac{\pi}{180} \approx 1.7\, s$$

Uppgift 4.
Vi skall studera två alternativa regulatorstrukturer för att lösa ett och samma reglerproblem.

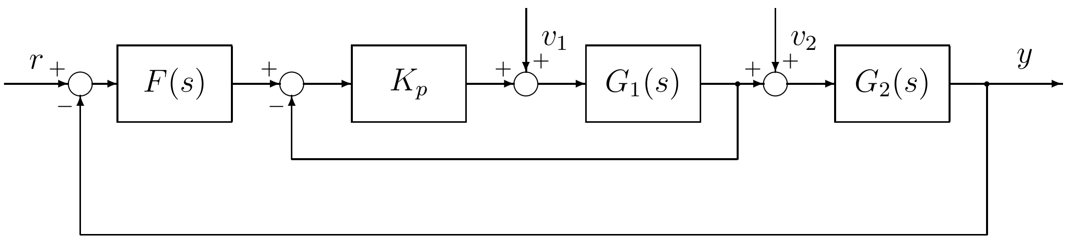
a. Betrakta det återkopplade systemet nedan. Systemet består av två delsystem med överföringsfunktioner $G_1(s)$ och $G_2(s)$ och påverkas av två störningar v_1 och v_2. Regulatorn F är en P-regulator. Överföringsfunktionerna ges av:

$$F(s) = 5 \qquad G_1(s) = \frac{3}{1+4s} \qquad G_2(s) = \frac{1}{s}$$



Uppgift: Bestäm det kvarstående felet, då v_1 är en stegformad störning med amplituden 2. (2 p)

b. Med avsikten att snabbare kompensera bort störningen v_1, så införs nu en kaskadreglering enl figuren nedan.



Uppgift: Bestäm för vilka värden på K_p man får en förbättring jämfört med (a), dvs ett mindre kvarstående fel (med samma stegstörning v_1). (3 p)

Lösning:

a. Det slutna systemets överföringsfunktion från v_1 till y är

$$\frac{Y(s)}{V_1(s)} = \frac{G_1 G_2}{1 + F G_1 G_2} = \frac{3}{s(1+4s) + 5 \cdot 3}$$

Av detta framgår att slutna systemet är stabilt (positiva koefficienter i ett 2:a ordningens kar.pol.), dvs vi kan använda slutvärdessatsen:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{3}{s(1+4s)+5\cdot 3} \cdot \frac{2}{s} = \frac{2}{5}$$

Det kvarstående felet får motsatt tecken, eftersom $e = r - y$.

b. *Om vi kallar utsignalen från blocket G_1 för y_1, så gäller*

$$Y_1 = \frac{G_1}{1+K_pG_1}V_1 - \frac{K_pG_1F}{1+K_pG_1}Y$$

och tillsammans med $Y = G_2Y_1$ ger detta, efter att ha löst ut Y:

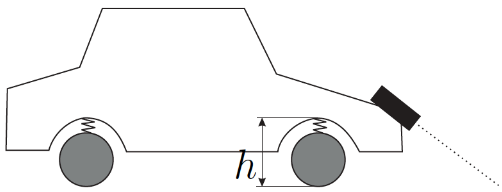
$$\frac{Y(s)}{V_1(s)} = \frac{G_1G_2}{1+K_pG_1+K_pFG_1G_2} = \frac{3}{s(1+4s)+3K_ps+15K_p}$$

På samma sätt som i (a) ser man att det slutna systemet är stabilt, och slutvärdessatsen kan användas:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{3}{s(1+4s)+3K_ps+15K_p} \cdot \frac{2}{s} = \frac{2}{5K_p}$$

Det kvarstående felet får motsatt tecken som i (a). Slutsatsen är att man får ett mindre kvarstående fel om $K_p > 1$.

Uppgift 5.
Vi skall i denna uppgift studera ett aktivt stötdämparsystem för en bil. I detta system ersätts fjädrar och stötdämpare av ett hydraulservo, vars kraft styrs av en regulator, som mäter avståndet mellan kaross och marken och försöker hålla detta konstant kring referensvärdet (som sätts till 0).



Hydraulservot beskrivs av överföringsfunktionen

$$G_{\text{servo}}(s) = \frac{1}{s/10 + 1}$$

och bilens dynamik beskrivs av

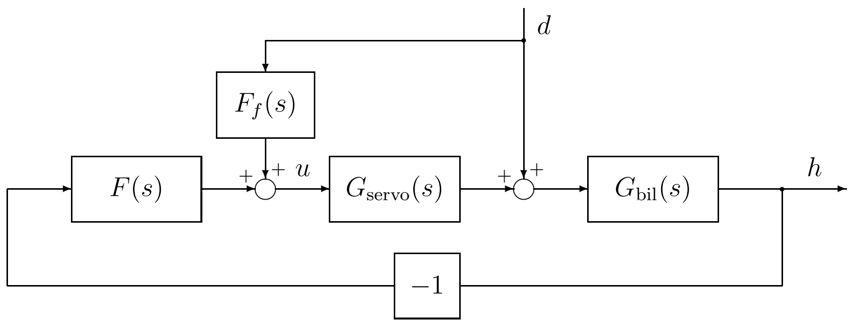
$$G_{\text{bil}}(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Regulatorn har överföringsfunktionen

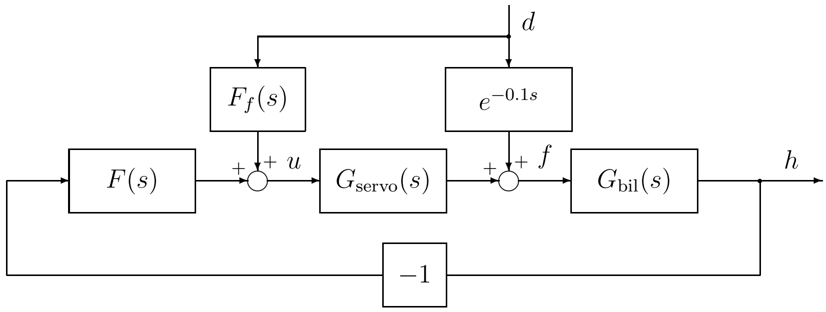
$$F(s) = 2\left(\frac{3}{s} + 1\right)$$

Slutligen kan vägens höjdförändringar ses som en laststörning d.

a. För att förbättra egenskaperna på ojämna vägar har en laseravståndsmätare installerats längst fram i bilen. På så sätt kan störningen d mätas innan den påverkar bilen, och vi kan använda denna mätning för en framkoppling $F_f(s)$ enligt blockschemat nedan. Hur skall $F_f(s)$ väljas så att störningen inte skall synas alls i utsignalen h? (2 p)



b. I själva verket fungerar lasermätningen så bra att den mäter störningen 0.1 s *innan* den påverkar bilen. Blockschemat förändras nu enligt nedan. Hur skall kompenseringen $F_f(s)$ ändras så att störningen d återigen inte slår igenom i utsignalen h? (1 p)



c. Anta samma situation som i (b) men att $F_f(s)$ förblir oförändrad från (a), dvs det kommer inte längre att vara en perfekt utsläckning av störningen. Visa att en störning med frekvensen $\omega = 10\pi$ i själva verket kommer att påverka bilen med dubbla amplituden jämfört med fallet utan framkoppling.
Ledning: Jämförelsen mellan de två fallen kan med fördel göras genom att bilda kvoten av motsvarande överföringsfunktioner. (2 p)

Lösning:

a. *Överföringsfunktionen från d till h blir*

$$G_{dh}(s) = \frac{(1 + F_f(s)G_{\text{servo}}(s))G_{\text{bil}}(s)}{1 + F(s)G_{\text{servo}}(s)G_{\text{bil}}(s)}$$

dvs för att ingen påverkan på h skall fås, så bör kompenseringen väljas som

$$F_f(s) = -1/G_{\text{servo}}(s) = -(1 + s/10)$$

Detta är en stabil kompensering, men den innehåller en ren derivering.

b. *Överföringsfunktionen modifieras nu till*

$$G_{dh}(s) = \frac{(e^{-0.1s} + F_f(s)G_{\text{servo}}(s))G_{\text{bil}}(s)}{1 + F(s)G_{\text{servo}}(s)G_{\text{bil}}(s)}$$

vilket ger en ändrad kompensering enligt

$$F_f(s) = -e^{-0.1s}/G_{\text{servo}}(s) = -e^{-0.1s}(1 + s/10)$$

Jämfört med (a) innebär detta bara en extra fördröjning av framkopplingen.

c. *Överföringsfunktionen från d till h är med framkopplingen från (a):*

$$G_{dh}^{\mathrm{ff}}(s) = \frac{(e^{-0.1s} + F_f(s)G_{\mathrm{servo}}(s))G_{\mathrm{bil}}(s)}{1 + F(s)G_{\mathrm{servo}}(s)G_{\mathrm{bil}}(s)} = \frac{(e^{-0.1s} - 1)G_{\mathrm{bil}}(s)}{1 + F(s)G_{\mathrm{servo}}(s)G_{\mathrm{bil}}(s)}$$

medan motsvarande överföringsfunktion utan framkoppling är

$$G_{dh}(s) = \frac{e^{-0.1s}G_{\mathrm{bil}}(s)}{1 + F(s)G_{\mathrm{servo}}(s)G_{\mathrm{bil}}(s)}$$

Studera nu kvoten

$$Q(s) = \frac{G_{dh}^{\mathrm{ff}}(s)}{G_{dh}(s)} = \frac{e^{-0.1s} - 1}{e^{-0.1s}}$$

Det gäller att $|Q(i\omega)| = |e^{-i\cdot 0.1\omega} - 1| \leq 2$ *och för* $\omega = 10\pi$ *fås*

$$|Q(i \cdot 10\pi)| = |e^{-i\pi} - 1| = |-1-1| = 2$$

dvs denna störningsfrekvens slår igenom med dubbla amplituden med framkoppling jämfört med fallet utan framkoppling.

SLUT!