CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för elektroteknik
System- och reglerteknik

ERE 103 Reglerteknik D
Tentamen 2018-01-11

08.30 - 12.30

Examinator: Bo Egardt, tel 3721.

Tillåtna hjälpmedel:

- Typgodkänd räknare
- Mathematics Handbook (Beta)
- Physics Handbook
- Formelsamling M3 och D3

Poängberäkning: Tentamen består av 5 uppgifter om totalt 30 poäng. Nominella betygsgränser är 12 (3), 18 (4) respektive 24 (5) poäng. Lösningarna skall vara tydliga och väl motiverade!

Tentamensresultat: Granskning av rättningen erbjuds den 25 januari kl 12-13 i rum 5220. Kommer du senare mottages endast skriftliga klagomål mot rättningen. Sådana skriftliga klagomål måste lämnas in **senast två veckor** efter ordinarie granskning.

LYCKA TILL!

Uppgift 1.

a. Vid ett experiment mäts impulssvaret för ett system upp med följande resultat:

$$g(t) = e^{-0.5t}(1 + e^{-0.5t})$$

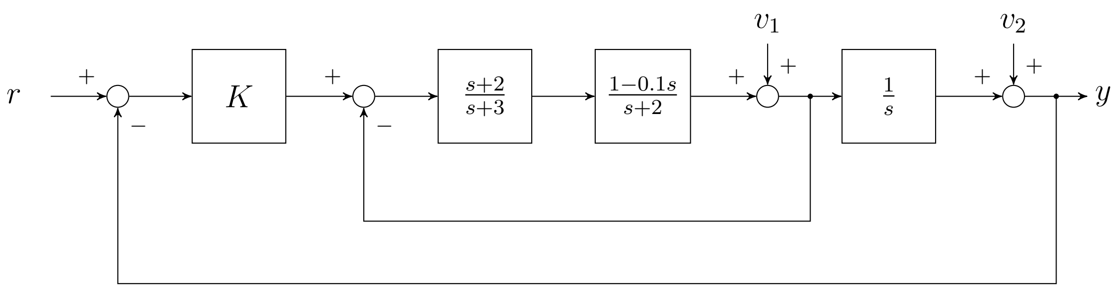
Vilken är systemets statiska förstärkning? (2 p)

b. Sambandet mellan insignalen u och utsignalen y för ett dynamiskt system ges av differentialekvationen

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = u(t-1)$$

Bestäm överföringsfunktionen från insignal till utsignal. (2 p)

c. Beräkna överföringsfunktionen $\frac{Y(s)}{V_1(s)}$ för det återkopplade reglersystemet nedan. För vilka värden på K är systemet stabilt? (2 p)



d. Ett system, som beskrivs av tillståndsmodellen nedan, har en långsam och en snabb pol. Bestäm en tillståndsåterkoppling, som lämnar den snabba polen oförändrad och flyttar den långsamma polen till samma läge som den snabba.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}$$

(2 p)

e. Konstruera ett digitalt högpassfilter med undre gränsfrekvensen 500 Hz genom att utgå från motsvarande analoga filter av Butterworth-typ av ordning 1. Använd Tustins (bilinjär) transformation och samplingsfrekvensen 10 kHz. OBS! Ingen hänsyn behöver tas till förvrängningen av frekvensskalan (frequency warping). (2 p)

Lösning:

a. *Impulssvaret* $g(t) = e^{-0.5t} + e^{-t}$ *ger efter Laplace-transformering*

$$G(s) = \frac{1}{s+0.5} + \frac{1}{s+1},$$

som har den statiska förstärkningen $G(0) = 2 + 1 = 3$.

b. *Laplace-transformering (med initialvillkoren 0) ger*

$$s^2Y(s) + sY(s) = e^{-s}U(s),$$

vilket ger överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{e^{-s}}{s(s+1)}$$

c. *Kalla överföringsfunktionerna i respektive block från vänster till höger* F_1, F_2, G_2 *och* G_1. *Då fås genom enkel blockschemaräkning att*

$$\frac{Y(s)}{V_1(s)} = \frac{G_1}{1 + F_2G_2 + F_1F_2G_1G_2} = \frac{1/s}{1 + \frac{1-0.1s}{s+3} + \frac{K}{s} \cdot \frac{1-0.1s}{s+3}}$$

där det är viktigt att notera att en faktor $(s+2)$ *förkortats bort—detta äventyrar dock inte stabiliteten, eftersom pol/nollställes-paret liger i vänstra halvplanet. Efter förenkling fås*

$$\frac{Y(s)}{V_1(s)} = \frac{s+3}{s(s+3) + s(1-0.1s) + K(1-0.1s)} = \frac{s+3}{0.9s^2 + s(4-0.1K) + K}$$

Av detta framgår att systemet är stabilt för $0 < K < 40$ *(kriteriet är att koefficienterna i det karakteristiska polynomet skall vara positiva).*

d. *Beräkna först systemets egenvärden:*

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+4 & 3 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+4) + 3 = (\lambda+1)(\lambda+3)$$

dvs uppgiften är att med återkopplingen flytta polen -1 till -3, vilket ger ett önskat karakteristiskt polynom $(\lambda+3)^2 = \lambda^2 + 6\lambda + 9$*:*

$$\det(\lambda I - (A - BL)) = \begin{vmatrix} \lambda+4+l_1 & 3+l_2 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + (4+l_1)\lambda + 3 + l_2$$

Identifiering av koefficienter ger $l_1 = 2$ *och* $l_2 = 6$.

e. *Det analoga HP-filtret ges av $H(s) = 1/(\omega_c/s + 1) = s/(s + \omega_c)$, där $\omega_c = 2\pi \cdot 500$. Tustins formel ger*

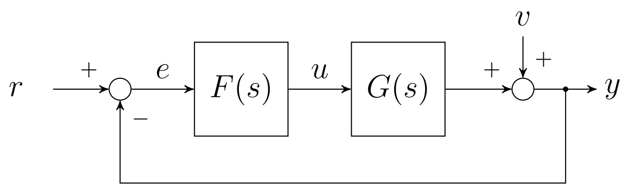
$$H(z) = \frac{\frac{2}{h}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}{\frac{2}{h}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 2\pi \cdot 500} = \frac{2(z-1)}{2(z-1) + 1000\pi h(z+1)} \approx \frac{0.86(z-1)}{z-0.73}$$

Uppgift 2.

En process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + 2}$$

återkopplas med en P-regulator $F(s) = K > 0$ enligt nedan.



a. För vilka värden på K är det slutna systemet stabilt? (2 p)

b. Vilka blir det slutna systemets poler, uttryckt i K, för $K \gg 1$? Ledning: För små x gäller att $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$. (2 p)

c. Verifiera att en konstant laststörning v stationärt påverkar utsignalen lika mycket i *open-loop* som i *closed-loop*. Varför blir det så? (2 p)

Lösning:

a. *Den karakteristiska ekvationen ges av*

$$s^2 + 2 + Ks = s^2 + Ks + 2 = 0.$$

Eftersom koefficienterna i karakteristiska polynomet är positiva för alla $K > 0$, så följer att systemet är stabilt för alla $K > 0$. Detta kan också visas med hjälp av Routh-Hurwitz metod. Alternativt kan man lösa den karakteristiska ekvationen direkt som i (b) nedan.

b. Den karakteristiska ekvationen har lösningen

$$s = -\frac{K}{2} \pm \sqrt{(\frac{K}{2})^2 - 2} \tag{1}$$

(För små K fås ett stabilt, komplexkonjugerat polpar. För ökande K fås så småningom två reella poler, men eftersom beloppet av den andra termen i (1) alltid är mindre än beloppet av den första termen, så blir båda polerna negativa, dvs stabila.)
Lösningen kan approximeras för stora K:

$$s = -\frac{K}{2} \pm \sqrt{(\frac{K}{2})^2 - 2} = -\frac{K}{2}\Big(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2}{(K/2)^2}}\Big)$$
$$\approx -\frac{K}{2}\big(1 \pm (1 - \frac{1}{(K/2)^2})\big) =$$

som för $K \gg 1$ ger de två polerna $s \approx -K$ och $s \approx -2/K$.

c. Eftersom det slutna systemet är stabilt, så anger känslighetsfunktionen $S(s)$ hur mycket laststörningen påverkar utsignalen i closed-loop*; stationärt fås:*

$$S(0) = (1/(1 + KG(0)) = 1$$

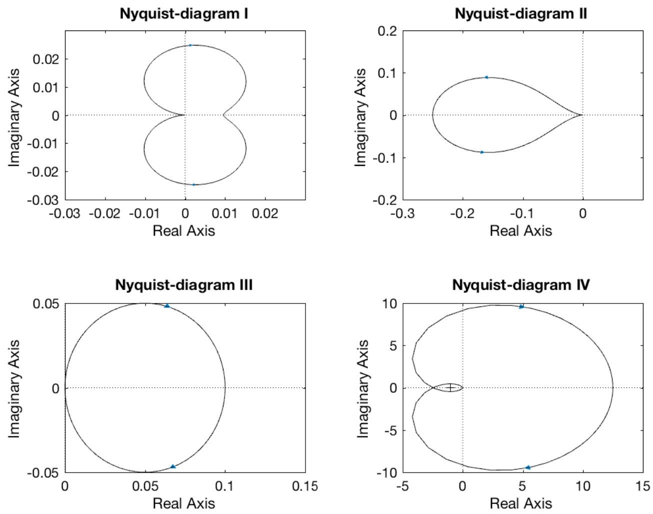
dvs laststörningen påverkar utsignalen lika mycket som i open-loop*. Anledningen till detta är processens nollställe i origo, som ger $G(0) = 0$.*

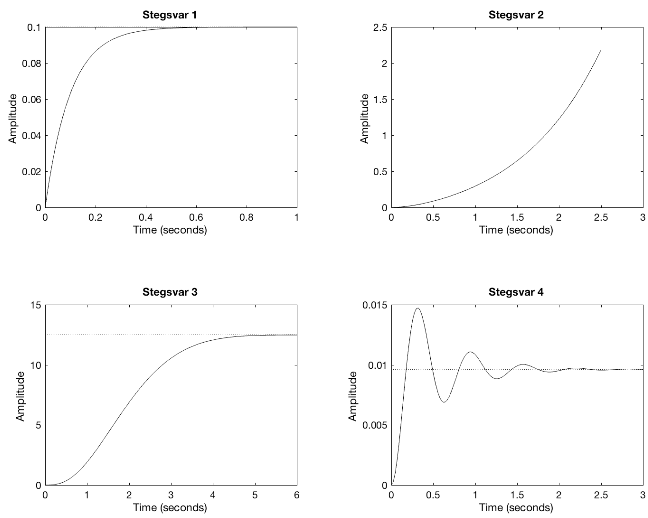
Uppgift 3.
Fyra system är givna:

$$G_A(s) = \frac{1}{s+10} \qquad\qquad G_B(s) = \frac{25}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

$$G_C(s) = \frac{1}{s^2+4s+104} \qquad\qquad G_D(s) = \frac{1}{(s-1)(s+4)}$$

Nyquistdiagram och stegsvar för systemen visas nedan. Para ihop systemen med rätt figurer, och motivera noga dina svar med lämpliga räkningar och/eller överslag—poäng ges endast för korrekta motiveringar! (4 p)





Lösning: *Nyquistdiagrammet fås från avbildningen* $s \mapsto G(s)$ *då* s *genomlöper Nyquists kontur* γ. *En del av denna utgörs av segmentet* $\gamma_1 : s = i\omega, \omega \in [r, R]$ *där man låter* $r \to 0$ *och* $R \to \infty$. *Som ledning studerar vi hur detta segment avbildas under respektive överföringsfunktion:*

G_A : *Börjar i* $1/10$ *och slutar i* $-i/R$. *Uppfylls endast av diagram III.*

G_B : *Börjar i* $25/2$ *och slutar i* $25i/R^3$. *Uppfylls endast av diagram IV.*

G_C : *Börjar i* $1/104$ *och slutar i* $-1/R^2$. *Uppfylls endast av diagram I.*

G_D : *Börjar i* $-1/4$ *och slutar i* $-i/R^2$. *Uppfylls endast av diagram II.*

För stegsvaren gäller:

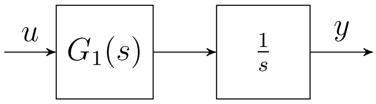
G_A : *Stabilt, första ordningens system med statisk förstärkning 0.1. Svarar mot stegsvar 1.*

G_B : *Stabilt och väldämpat andra ordningens system med statisk förstärkning 25/2. Svarar mot stegsvar 3.*

G_C : *Stabilt andra ordningens system med dålig dämpning och statisk förstärkning 1/104. Svarar mot stegsvar 4.*

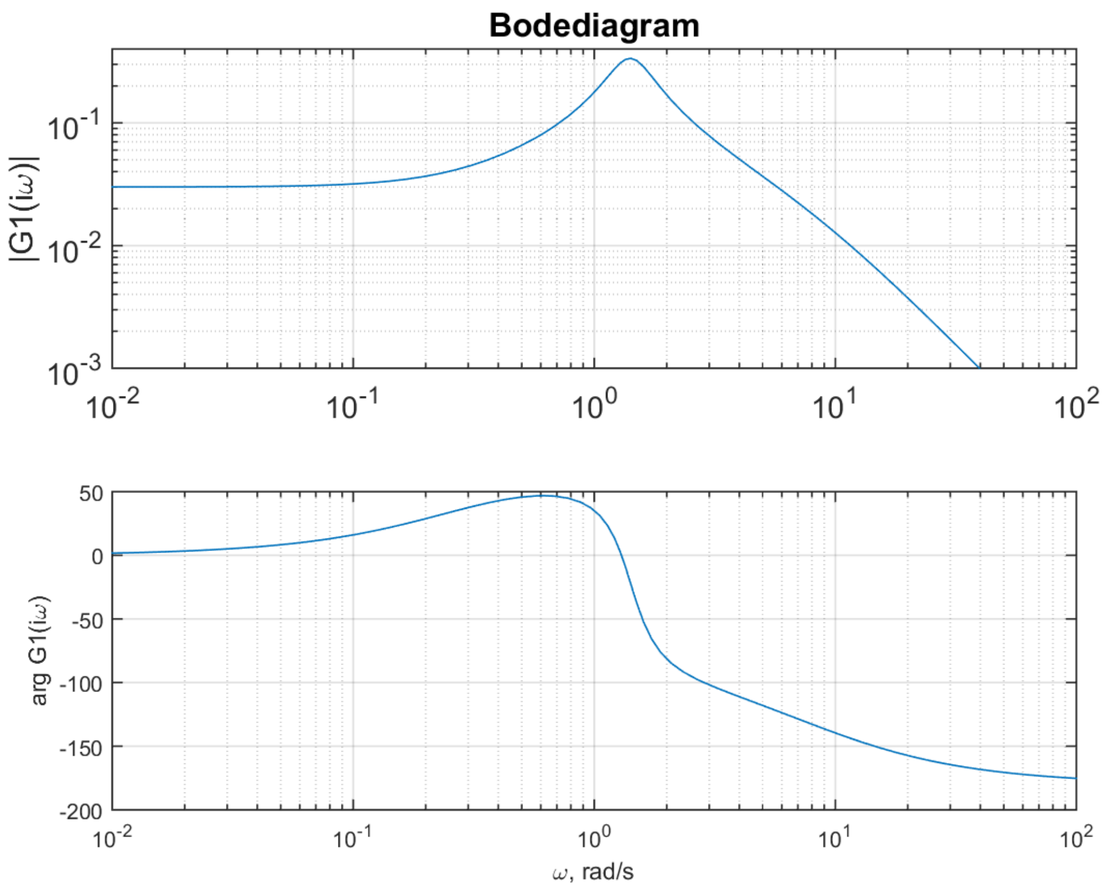
G_D : *Instabilit system (en pol i* $s = 1$*). Svarar mot stegsvar 2.*

Uppgift 4.
I denna uppgift skall vi studera återkopplad reglering av en process, som enligt blockschemat nedan består av en delprocess $G_1(s)$ i serie med en integrator. Bodediagrammet för $G_1(s)$ visas i figuren längst ned. Observera alltså att systemet innehåller en integrator, som inte finns med i bodediagrammet (eftersom det bara är för $G_1(s)$).



a. Dimensionera en P-regulator som ger en fasmarginal på 40°. (2 p)

b. Vi vill nu göra det återkopplade systemet dubbelt så snabbt jämfört med (a) genom att dubblera skärfrekvensen. Dimensionera en lämplig regulator för att åstadkomma detta. (3 p)

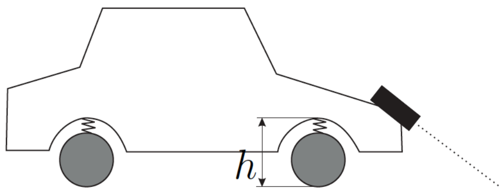


Lösning:

a. *Med en P-regulator med förstärkningen* K_p *får vi kretsförstärkningen* $L(s) = \frac{K_p}{s} G_1(s)$, *som har fasen* $\arg L(i\omega) = \arg G_1(i\omega) - 90°$. *Önskad fasmarginal fås för skärfrekvensen* $\omega = \omega_c$: $\arg G_1(i\omega_c) - 90° = -180° + \varphi_m = -140°$, *vilket med Bodediagrammets hjälp ger* $\omega_c = 1.5$. *Dessutom skall för skärfrekvensen gälla att* $|L(i\omega_c)| = \frac{K_p}{\omega_c}|G_1(i\omega_c)| = 1$, *vilket åter med Bodediagrammets hjälp ger* $K_p = \frac{1.5}{|G_1(i \cdot 1.5)|} = \frac{1.5}{0.3} = 5$.

b. *Dubbla snabbheten svarar mot dubbla skärfrekvensen, dvs den nya skärfrekvensen skall vara* $\omega_c = 3$. *Vid denna frekvens gäller att* $\arg G_1(i\omega_c) = -100°$, *dvs vi har tappat* $50°$ *i fasen. Därför behövs t ex ett leadfilter* $F(s) = K\frac{1+\tau_d s}{1+\tau_d s/b}$ *för att höja fasen i motsvarande grad. Behovet av faslyft ger* $b = \frac{1+\sin\varphi_{max}}{1-\sin\varphi_{max}} = \frac{1+\sin 50°}{1-\sin 50°} = 7.5$. *Maximalt faslyft* $\frac{\sqrt{b}}{\tau_d}$ *vid* $\omega = \omega_c$ *ger* $\tau_d = 0.9$. *Slutligen ger kravet* $|L(i\omega_c)| = K\sqrt{b}\frac{|G_1(i\omega_c|}{\omega_c} = 1$ *med* $|G_1(i\omega_c)| = 0.08$ *från Bodediagrammet valet* $K = 13.7$.

Uppgift 5.
Vi skall i denna uppgift studera ett aktivt stötdämparsystem för en bil. I detta system ersätts fjädrar och stötdämpare av ett hydraulservo, vars kraft styrs av en regulator, som mäter avståndet mellan kaross och marken och försöker hålla detta konstant kring referensvärdet (som sätts till 0).



Hydraulservot beskrivs av överföringsfunktionen

$$G_{\text{servo}}(s) = \frac{1}{s/10+1}$$

och bilens dynamik beskrivs av

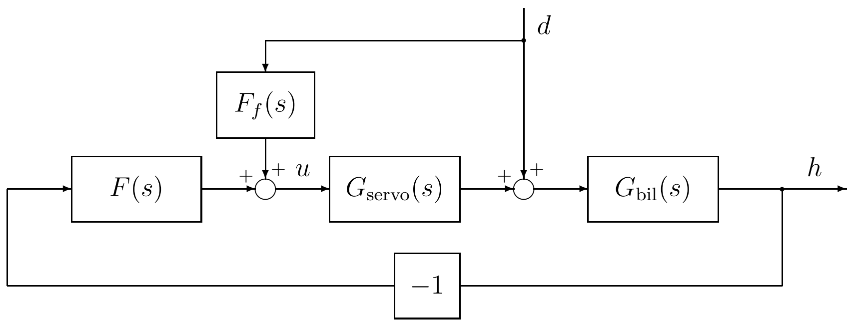
$$G_{\text{bil}}(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Regulatorn har överföringsfunktionen

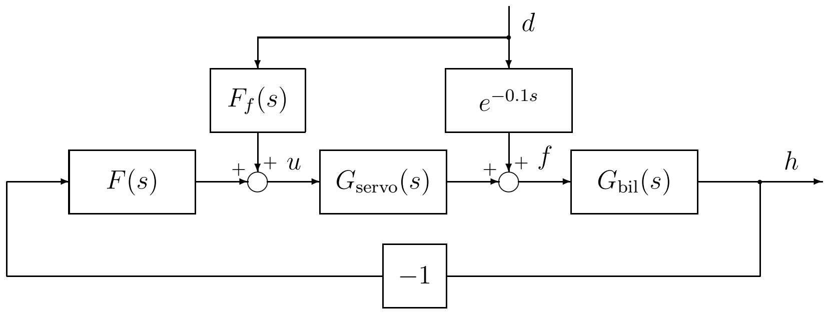
$$F(s) = 2\left(\frac{3}{s}+1\right)$$

Slutligen kan vägens höjdförändringar ses som en laststörning d.

a. För att förbättra egenskaperna på ojämna vägar har en laseravståndsmätare installerats längst fram i bilen. På så sätt kan störningen d mätas innan den påverkar bilen, och vi kan använda denna mätning för en framkoppling $F_f(s)$ enligt blockschemat nedan. Hur skall $F_f(s)$ väljas så att störningen inte skall synas alls i utsignalen h? (2 p)



b. I själva verket fungerar lasermätningen så bra att den mäter störningen 0.1 s *innan* den påverkar bilen. Blockschemat förändras nu enligt nedan. Hur skall kompenseringen $F_f(s)$ ändras så att störningen d återigen inte slår igenom i utsignalen h? (1 p)



c. Anta samma situation som i (b) men att $F_f(s)$ förblir oförändrad från (a), dvs det kommer inte längre att vara en perfekt utsläckning av störningen. Visa att en störning med frekvensen $\omega = 10\pi$ i själva verket kommer att påverka bilen med dubbla amplituden jämfört med fallet utan framkoppling.
Ledning: Jämförelsen mellan de två fallen kan med fördel göras genom att bilda kvoten av motsvarande överföringsfunktioner. (2 p)

Lösning:

a. *Överföringsfunktionen från d till h blir*

$$G_{dh}(s) = \frac{(1 + F_f(s)G_{\text{servo}}(s))G_{\text{bil}}(s)}{1 + F(s)G_{\text{servo}}(s)G_{\text{bil}}(s)}$$

dvs för att ingen påverkan på h skall fås, så bör kompenseringen väljas som

$$F_f(s) = -1/G_{\text{servo}}(s) = -(1 + s/10)$$

Detta är en stabil kompensering, men den innehåller en ren derivering.

b. *Överföringsfunktionen modifieras nu till*

$$G_{dh}(s) = \frac{(e^{-0.1s} + F_f(s)G_{\text{servo}}(s))G_{\text{bil}}(s)}{1 + F(s)G_{\text{servo}}(s)G_{\text{bil}}(s)}$$

vilket ger en ändrad kompensering enligt

$$F_f(s) = -e^{-0.1s}/G_{\text{servo}}(s) = -e^{-0.1s}(1 + s/10)$$

Jämfört med (a) innebär detta bara en extra fördröjning av framkopplingen.

c. *Överföringsfunktionen från d till h är med framkopplingen från (a):*

$$G_{dh}^{\text{ff}}(s) = \frac{(e^{-0.1s} + F_f(s)G_{\text{servo}}(s))G_{\text{bil}}(s)}{1 + F(s)G_{\text{servo}}(s)G_{\text{bil}}(s)} = \frac{(e^{-0.1s} - 1)G_{\text{bil}}(s)}{1 + F(s)G_{\text{servo}}(s)G_{\text{bil}}(s)}$$

medan motsvarande överföringsfunktion utan framkoppling är

$$G_{dh}(s) = \frac{e^{-0.1s}G_{\text{bil}}(s)}{1 + F(s)G_{\text{servo}}(s)G_{\text{bil}}(s)}$$

Studera nu kvoten

$$Q(s) = \frac{G_{dh}^{\text{ff}}(s)}{G_{dh}(s)} = \frac{e^{-0.1s} - 1}{e^{-0.1s}}$$

Det gäller att $|Q(i\omega)| = |e^{-i\cdot 0.1\omega} - 1| \leq 2$ *och för* $\omega = 10\pi$ *fås*

$$|Q(i \cdot 10\pi)| = |e^{-i\pi} - 1| = |-1-1| = 2$$

dvs denna störningsfrekvens slår igenom med dubbla amplituden med framkoppling jämfört med fallet utan framkoppling.

SLUT!