CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för signaler och system
System- och reglerteknik

ERE103 och ERE102
Reglerteknik D
Tentamen 2017-04-10

08.30 - 12.30

Examinator: Jonas Fredriksson.
Jour: Bo Egardt, tel 3721.

Tillåtna hjälpmedel:

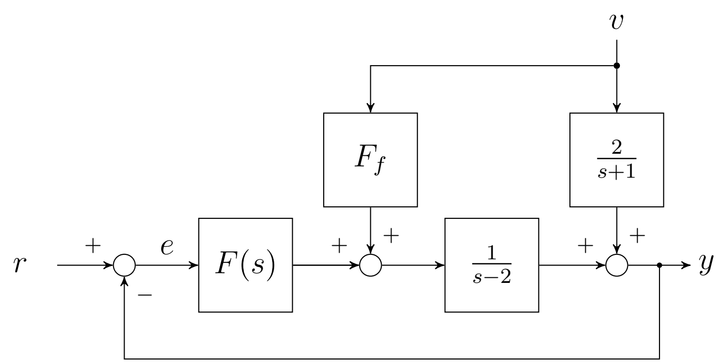
- Typgodkänd räknare
- Mathematics Handbook (Beta)
- Physics Handbook
- Formelsamling M3 och D3

Poängberäkning: Tentamen består av 6 uppgifter om totalt 30 poäng. Nominella betygsgränser är 12 (3), 18 (4) respektive 24 (5) poäng. Lösningarna skall vara tydliga och väl motiverade!

Tentamensresultat: Granskning av rättningen erbjuds den 2:a och 3:e maj kl 12-13 på institutionen. Kommer du senare mottages endast skriftliga klagomål mot rättningen. Sådana skriftliga klagomål måste lämnas in **senast två veckor** efter ordinarie granskning.

LYCKA TILL!

Uppgift 1.
Betrakta det återkopplade systemet nedan:



a. Låt regulatorn vara P-regulator $F(s) = K_p$ med $K_p = 1$. Är det återkopplade systemet från r till y insignal-utsignal stabilt? (1 p)

b. Bestäm en differentialekvation som beskriver sambandet mellan insignalen r och utsignalen y för det återkopplade system i uppgift a) (1 p)

c. Utöka regulatorn med en I-del, dvs $F(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$. Bestäm för vilka värden på K_p och K_i överföringsfunktionen från r till y är insignal-utsignal stabil. (2 p)

d. Bestäm en statisk framkoppling F_f så att processtörningen v ej påverkar utsignalen y stationärt. Antag ideala förhållanden, dvs att verkligheten och modellen stämmer överens. (2 p)

Lösning:
a)

$$G_{ry}(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)} = \frac{1}{s-2+1} = \frac{1}{s-1}$$

Pol i s=1, allstå instabilt.

b)

$$Y(s) = G_{ry}(s)R(s) \Rightarrow Y(s)(s-1) = R(s)$$

Inversa Laplacetransformen ger: $\dot{y}(t) - y(t) = r(t)$

c) Polerna för det återkopplade systemet ges från karaktärisktiska ekvationen:

$$1 + L(s) = 0$$

$$1 + F(s)G(s) = 0$$

$$1 + (K_p + \frac{K_i}{s})\frac{1}{s-2} = 0$$

$$s^2 + (K_p - 2)s + K_i = 0$$

Villkor för stabilitet fås nu mha Routh-Hurwitz kriterium: $K_p - 2 > 0$ *samt att* $K_i > 0$*, dvs* $Kp > 2$ *och att* $K_i > 0$.

d) Överföringsfunktionen från processtörningen $V(s)$ *till utsignalen ges som:*

$$Y(s) = \frac{F_f\frac{1}{s-2} + \frac{2}{s+1}}{1 + L(s)}V(s)$$

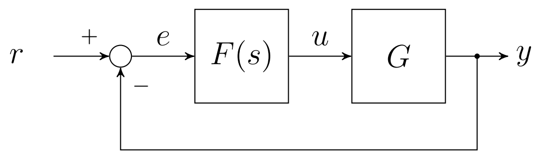
Inverkan från processtörningen tas bort om täljaren är noll när $s = 0$*, dvs*

$$F_f\frac{1}{s-2} + \frac{2}{s+1} = F_f\frac{1}{-2} + \frac{2}{1} = 0$$

Välj F_f *så att detta åstadkoms:*

$$F_f = \frac{2(2)}{1} = 4$$

Uppgift 2.
Du har bestämt dig för att reglera det olinjära systemet, G kring en arbetspunkt, (y_0, u_0), med en P-regulator, $F(s) = K_p$. Se figur nedan:



Systemet G ges som:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1^3(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

a. För att analysera stabilitet hos det slutna systemet vid arbetspunkten behöver du linjärisera systemet G. Hur ser den linjära modellen för systemet ut om du linjäriserar systemet vid en arbetspunkt med $u_0 = 1$? (3 p)

b. Om $K_p = 3$ är det slutna systemet stabilt? Betrakta bara det linjära systemet. (2 p)

Lösning:
a) Jämviktspunkt: $\dot{x} = 0$*,* $u_0 = 1$ *detta ger* $x_{20} = u_0 = 1$ *samt* $x_{10} = x_{20} = u_0 = 1$*,*

Beräkna partiella derivator för att bestämma den linjäriserade modellen:

$$\frac{df_1}{dx_1} = -3x_{10}^2, \quad \frac{df_1}{dx_2} = 1, \quad \frac{df_1}{du} = 0$$

$$\frac{df_2}{dx_1} = 0, \quad \frac{df_2}{dx_2} = -1, \quad \frac{df_2}{du} = 1$$

$$\frac{dg}{dx_1} = 1, \quad \frac{dg}{dx_2} = 0, \quad \frac{dg}{du} = 0$$

Sätt samman till slutgiltig modell:

$$\Delta\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

b) Överföringsfunktionen för det linjäriserade systemet ges som:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$G(s) = \frac{1}{(s+3)(s+1)}$$

Återkoppla med P-regulator och studera stabiliteten genom att studera slutna systemets poler. Slutna systemets poler ges som

$$1 + L(s) = 1 + F(s)G(s) = 1 + \frac{Kp}{(s+3)(s+1)} = 1 + \frac{3}{(s+3)(s+1)} = 0$$

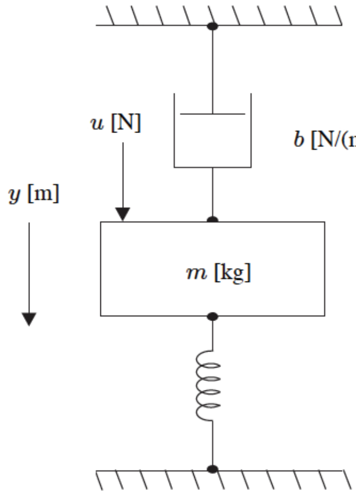
$$(s+3)(s+1) + 3 = 0$$
$$s^2 + 4s + 6 = 0$$

Polerna ges som $-2 \pm j\sqrt{2}$*, dvs alla poler i VHP, dvs stabilit.*

Uppgift 3.
En massa, m [kg], placeras på en olinjär fjäder med ett kraft-läges-beroende

$$F = k_1 y + k_2 y^3$$

där F [N] är fjäderkraften och y [m] är sammanpressningen av fjädern jämfört med ospänt läge. För att stabilisera massan finns dessutom en linjär viskös dämpare med dämpkonstanten b [N/(m/s)], se figur nedan.



Ställ upp en olinjär tillståndsmodell, på formen $\dot{x} = f(x,u)$, $y = g(x,u)$ för det mekaniska systemet, där insignalen u [N] är en yttre kraft som kan användas för att styra positionen på massan, dvs utsignalen y. (4 p)

Lösning: *Krafterna som påverkar massan:*

- $F_1 = mg$, *gravitationen*
- $F_2 = k_1 y + k_2 y^3$, *fjäder*
- $F_3 = b\dot{y}$, *dämpare*
- $F_4 = u$, *yttre kraft*

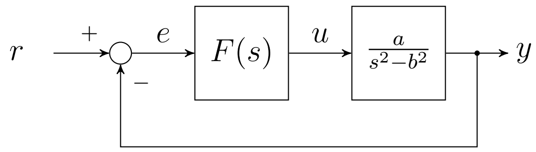
Kraftbalans:

$$m\ddot{y} = mg - (k_1 y + k_2 y^3) - b\dot{y} + u$$

Välj tillstånd, $x_1 = y$ *och* $x_2 = \dot{y}$*, modellen kan då skrivas som:*

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= (mg - (k_1 y + k_2 y^3) - b\dot{y} + u)/m = -\frac{k_1}{m}x_1 - \frac{k_2}{m}x_1^3 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u + g \\
y &= x_1
\end{aligned}$$

Uppgift 4.
Du ska designa en regulator för ett system som har liknande karaktär som Balanduinon, dvs en inverterande pendel robot. Systemet kan beskrivas som ett olinjärt system med poler i $b > 0$ och $-b < 0$.



Regulatorn som du vill använda är av lead-filter karaktär och har följande utseende:

$$F(s) = k\frac{s+n}{s+p}$$

Du väljer att designa regulatorn med hjälp av polplacering, där regulatorns nollställe placeras för att kancellera den stabila polen i systemet och regulatorns förstärkning och pol används för att forma slutna systemets dynamik. Bestäm k, n och p, när $a = 1$ och $b = 1$, så att slutna systemet blir kritiskt dämpat och får en odämpad egensvängningsfrekvens på 3 rad/s! (3 p)

Lösning: *Välj $n = b = 1$ för att kancellera den stabila polen i systemet. Slutna systemets poler kan fås genom att studera karaktäristiska ekvationen:*

$$1 + L(s) = 1 + F(s)G(s) = 1 + k\frac{s+n}{s+p}\frac{a}{s^2 - b^2} = 0$$

$$1 + k\frac{s+n}{s+p}\frac{a}{(s-b)(s+b)} = [n = b] = 1 + \frac{ka}{(s+p)(s-b)} = 0$$

$$(s+p)(s-b) + ka = s^2 + (p-b)s + (ka - pb) = 0$$

$$s^2 + (p-1)s + (k-p) = 0$$

Välj p och k så att slutna systemet blir kritiskt dämpat och får en odämpad egensvängningsfrekvens på 3 rad/s, detta ger

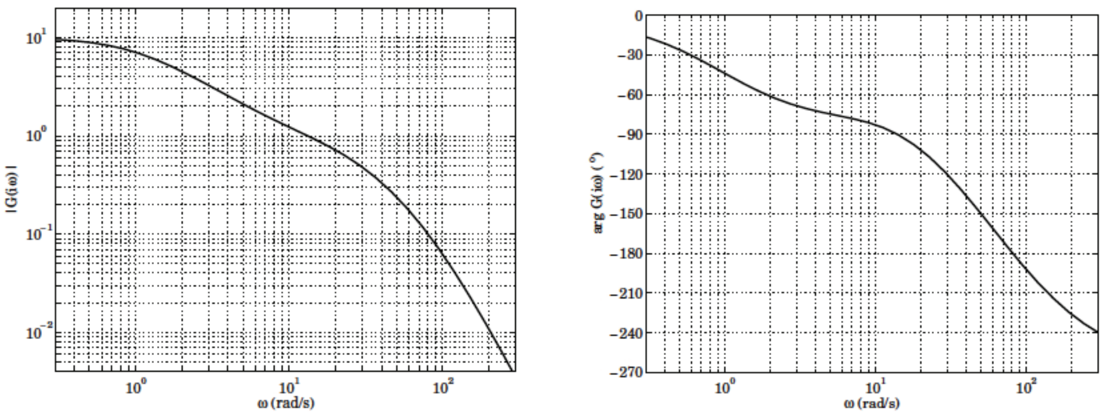
$$s^2 + (p-1)s + (k-p) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

där $\zeta = 1$ och $\omega_n = 3$. Identifiering ger

$$p - 1 = 2\zeta\omega_n = 6 \Rightarrow p = 7$$

$$k - p = \omega_n^2 = 9 \Rightarrow k = 9 + p = 9 + 7 = 16$$

Uppgift 5.
Ett system $Y(s) = G(s)U(s)$ ska återkopplas från reglerfelet, $U(s) = F(S)(R(s) - Y(s))$. I figuren nedan visas bodediagrammet för $G(s)$. I övrigt gäller att $G(0) = 10$.



a. Om man använder proportionell återkoppling, $F(s) = K_p > 0$, vilken är den högsta överkorsningsfrekvensen ω_c man kan få om man vill att fasmarginalen φ_m ska vara 30°. För vilken förstärkning K_p uppnås denna högsta ω_c? (2 p)

b. Om man istället använder en integrerande återkoppling, $F(s) = K_i/s$ där $K_i > 0$, vilken är den högsta överkorsningsfrekvensen ω_c man kan få om man vill att fasmarginalen φ_m ska vara 30°. För vilken förstärkning K_i uppnås denna högsta ω_c? (2 p)

c. Designa en regulator $F(s)$ så att följande specifikationer är uppfyllda: *(i)* $\omega_c = 100$ rad/s, *(ii)* $\varphi_m \geq 30°$ samt att *(iii)* det slutna systemet har statisk förstärkning lika med 1. (4 p)

Lösning:
a) Med en P-regulator, $F(s) = K_p$, *kan vi höja/sänka amplitudkurvan, medans faskurvan inte påverkas, dvs ingen extra fasvridning.* $\varphi_m = 30°$ *ger att* $\arg G(j\omega_c) = -180° + 30° = 150°$. *Faskurvan ger då att* $\omega_c = 50$ *rad/s, amplitudkurvan ger att* $|G(j50)| = 0.23$. *Alltså, blir förstärkningen* $K_p = 1/|G(j50)| = 1/0.23 = 4.35$

b) Med en I-regulator, $F(s) = K_i/s$, *kan vi höja/sänka amplitudkurvan, samtidigt påverkas faskurvan med en konstant extra fasvridning på* $-90°$. $\varphi_m = 30°$ *ger att* $argG(j\omega_c) = -180° + 30° + 90° = 60°$. *Faskurvan ger då* *att* $\omega_c = 2$ *rad/s, amplitudkurvan ger att* $|G(j2)| = 4.5$. *Alltså, blir förstärkningen* $K_i/2 = 1/|G(j2)| \Rightarrow 2/4.5 = 0.44$

c) Kraven (i) *och* (ii) *kan tillgodoses med ett lead-filter:*

$$F(s) = K\frac{1+\tau_d s}{1+\tau_d s/b}$$

Bodediagrammet ger $|G(j100)| = 0.065$ *och* $\arg G(j100) = -193°$. *Fasen behöver sålunda höjas* $30° - 180° + 193° + 10° = 53°$. *(*$10°$ *för att kompensera för ev införande av intregralverkan i regulatorn.) Med maxfaslyft på 53° fås värdet på b:*

$$b = \frac{1+\sin\varphi_{max}}{1-\sin\varphi_{max}} \approx 8.93$$

Placera maxfaslyft vid $\omega = 100$, *detta ger då* $\sqrt{b}/\tau_d = 100$, *vilket ger* $\tau_d \approx 0.03$. *Justera förstärkningen så att överkorsningsfrekvensen behålls:*

$$|F(j100)||G(j100)| = 1 \;\Rightarrow K = \frac{1}{\sqrt{b}|G(j100)|} \approx 5.15$$

Då processen inte innehåller intregralverkan måste vi tillföra integralverkan i regulatorn för att uppfylla krav (iii). *Välj tex en PI-regulator med förstärkning* $K_p = 1$*:*

$$F_{PI}(s) = K_p\frac{1+T_i s}{s} = \frac{1+T_i s}{s}$$

Ur bodediagrammet i formelsamlingen ser vi att om vi placerar brytfrekvensen för PI-regulatorn, $1/T_i$ *mycket lägre än* ω_c *kommer PI-regulatorns amplitudförstärkning vid* ω_c *att vara ungefär 1, dvs påverkar inte vår tidigare design. Välj:*

$$\frac{1}{T_i} = \frac{\omega_c}{10} \;\Rightarrow T_i = 0.1$$

Regulatorn som uppfyller specifikationen blir sålunda:

$$F(s) = K\frac{(1+T_i s)(1+\tau_d s)}{s(1+\tau_d s/b)} = 5.15\frac{(1+0.1s)(1+0.03s)}{s(1+0.03s/8.93)}$$

Uppgift 6.
Ett system beskrivs av differentialekvationerna

$$\dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -5x_1(t) + 2u(t),$$

och där utsignalen ges som $y(t) = x_1(t)$. Systemet skall regleras med tillståndsåterkoppling enligt

$$u(t) = -Lx(t) + K_r r(t),$$

där $x(t) = [x_1(t)\ x_2(t)]^T$ och $r(t)$ är en referenssignal.

a. Är systemet styrbart? (1 p)

b. Bestäm L och K_r så att systemets överföringsfunktion från r till y blir

$$G(s) = \frac{8}{s^2 + 4s + 8}.$$

(3 p)

Lösning:
a) Styrbarhet kan kontrolleras med hjälp av styrbarhetsmatrisen:

$$S = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}$$

Ur modellen fås:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

detta ger

$$S = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Systemet är styrbart om styrbarhetsmatrisen har full rang, i detta fallet rang=2. Styrbarhetsmatrisen har full rang ty raderna i S är linjärt oberoende.

b) Systemet med tillståndsåterkoppling är

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$u = -Lx + K_r r$$

där

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}$$

Det återkopplade slutna systemets poler ges som

$$\det(\lambda I-(A-BL)) = \det \begin{bmatrix} \lambda+2 & -1 \\ 5+2l_1 & \lambda+2l_2 \end{bmatrix} = \lambda^2+(2+2l_2)\lambda+5+2l_1+4l_2 = 0$$

Önskad polplacering:

$$\lambda^2+(2+2l_2)\lambda+5+2l_1+4l_2 = \lambda^2+4\lambda+8$$

Identifiering av koefficienter ger, $l_2 = 1$ *och* $l_1 = -0.5$.

Bestäm K_r *så att statiska förstärkningen är 1:*

$$K_r = \frac{1}{C(-A+BL)^{-1}B} = \frac{1}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}} = \frac{1}{1/4} = 4$$

SLUT!