CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för signaler och system
System- och reglerteknik

ERE103 Reglerteknik D
Tentamen 2017-01-12

08.30 - 12.30

Examinator: Jonas Fredriksson, tel 1359.

Tillåtna hjälpmedel:

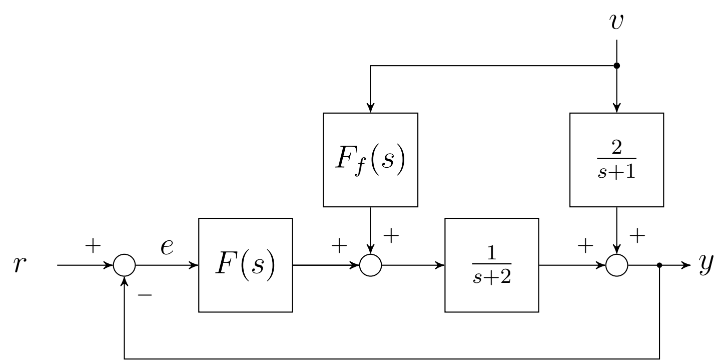
- Typgodkänd räknare
- Mathematics Handbook (Beta)
- Physics Handbook
- Formelsamling M3 och D3

Poängberäkning: Tentamen består av 6 uppgifter om totalt 30 poäng. Nominella betygsgränser är 12 (3), 18 (4) respektive 24 (5) poäng. Lösningarna skall vara tydliga och väl motiverade!

Tentamensresultat: Granskning av rättningen erbjuds den 1:a och 2:a februari kl 12-13 på institutionen. Kommer du senare mottages endast skriftliga klagomål mot rättningen. Sådana skriftliga klagomål måste lämnas in **senast två veckor** efter ordinarie granskning.

LYCKA TILL!

Uppgift 1.
Betrakta det återkopplade systemet nedan:



a. Låt regulatorn vara $F(s) = -1$. Är det återkopplade systemet från r till y insignal-utsignal stabilt? (1 p)

b. Bestäm en differentialekvation som beskriver sambandet mellan insignalen r och utsignalen y för det återkopplade system i uppgift a) (1 p)

c. Låt regulatorn vara $F(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$. Bestäm för vilka värden på K_p och K_i överföringsfunktionen från r till y är insignal-utsignal stabil. (2 p)

d. Bestäm $F_f(s)$ så att processtörningen v ej påverkar utsignalen y. Antag ideala förhållanden, dvs att verkligheten och modellen stämmer överens. (2 p)

Lösning:
a)

$$G_{ry}(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)} = \frac{-1}{s + 2 - 1} = \frac{-1}{s + 1}$$

Pol i s=-1, allstå stabilt.

b)

$$Y(s) = G_{ry}(s)R(s) \Rightarrow Y(s)(s + 1) = -R(s)$$

Inversa Laplacetransformen ger: $\dot{y}(t) + y(t) = -r(t)$

c) Polerna för det återkopplade systemet ges från karaktärisktiska ekvationen:

$$1 + L(s) = 0$$

$$1 + F(s)G(s) = 0$$

$$1 + (K_p + \frac{K_i}{s})\frac{1}{s+2} = 0$$

$$s^2 + (2 + K_p)s + K_i = 0$$

Villkor för stabilitet fås nu mha Routh-Hurwitz kriterium: $K_p + 2 > 0$ *samt att* $K_i > 0$*, dvs* $Kp > -2$ *och att* $K_i > 0$.

d) Överföringsfunktionen från processtörningen $V(s)$ *till utsignalen ges som:*

$$Y(s) = \frac{F_f(s)\frac{1}{s+2} + \frac{2}{s+1}}{1 + L(s)}V(s)$$

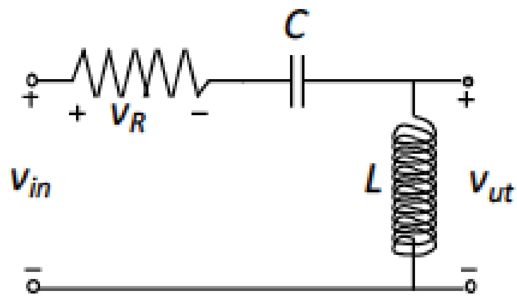
Inverkan från processtörningen tas bort om täljaren är noll, dvs

$$F_f(s)\frac{1}{s+2} + \frac{2}{s+1} = 0$$

Välj $F_f(s)$ *så att detta åstadkoms:*

$$F_f(s) = -\frac{2(s+2)}{s+1}$$

Uppgift 2.
Betrakta det elektriska filtret nedan:



I filtret används en olinjär resistor, där spänningen över resistorn ges som $v_R = R_1 i + R_2 i^3$, där i är strömmen genom resistorn.

a. Ställ upp en olinjär tillståndsmodell, på formen $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, $y(t) = g(x(t), u(t))$ för filtret, där insignalen u är inspänningen v_{in} och utsignalen y är spänningen v_{ut} (2 p)

b. Bestäm en jämviktspunkt för den olinjära modellen! (1 p)

c. Linjärisera den olinjära tillståndsmodellen i jämviktspunkten bestämd i uppgift b)! Skriv resultatet på formen: $\dot{x} = Ax + Bu, \ y = Cx + Du$ (2 p)

d. Bestäm huruvida den linjäriserade systemet är stabilt eller inte. (1 p)

Lösning:
a) Balansekvationer: Kirchhoffslag ger: $v_{in} - v_R - v_C - v_{ut} = 0$
Konstitutiva samband:

$$v_R = R_1 i + R_2 i^3$$

$$v_{ut} = L\frac{di}{dt}$$

$$i = C\frac{dv_C}{dt}$$

Välj tillståndsvariabler, tex $x_1 = v_C$ *och* $x_2 = i$*, insignal* $u = v_{in}$ *och utsignal* $y = v_{ut}$ *detta ger:*

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{i}{C} = \frac{x_2}{C}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{L}v_{ut} = \frac{1}{L}(v_{in} - v_R - v_C) = \frac{1}{L}(u - R_1 x_2 - R_2 x_2^3 - x_1)$$

$$y = v_{ut} = (v_{in} - v_R - v_C) = (u - R_1 x_2 - R_2 x_2^3 - x_1)$$

b) Jämviktspunkt: $\dot{x} = 0$*, detta ger* $x_{20} = 0$ *samt* $x_{10} = u_0$*, välj tex* $u_0 = 0,\ x_{20} = 0$.

c) Beräkna partiella derivator för att bestämma den linjäriserade modellen:

$$\frac{df_1}{dx_1} = 0,\ \frac{df_1}{dx_2} = 1/C,\ \frac{df_1}{du} = 0$$

$$\frac{df_2}{dx_1} = -1/L,\ \frac{df_2}{dx_2} = -(R_1 + 2R_2x_{20})/L = -R_1/L,\ \frac{df_2}{du} = 1/L$$

$$\frac{dg}{dx_1} = -1,\ \frac{dg}{dx_2} = -(R_1 + 2R_2x_{20}) = -R_1,\ \frac{dg}{du} = 1$$

Sätt samman till slutgiltig modell:

$$\Delta\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R_1/L \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} u$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} -1 & -R_1 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} u$$

d) Polerna till det linjäriserade systemet ges som egenvärden till A-matrisen. Egenvärdena kan bestämmas såsom:

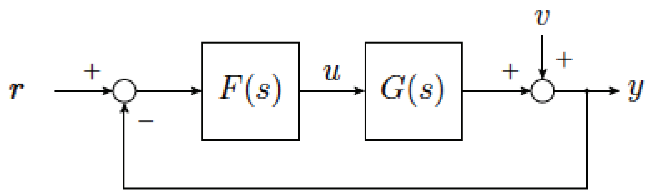
$$det(sI - A) = 0$$

$$det(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R_1/L \end{bmatrix}) = 0$$

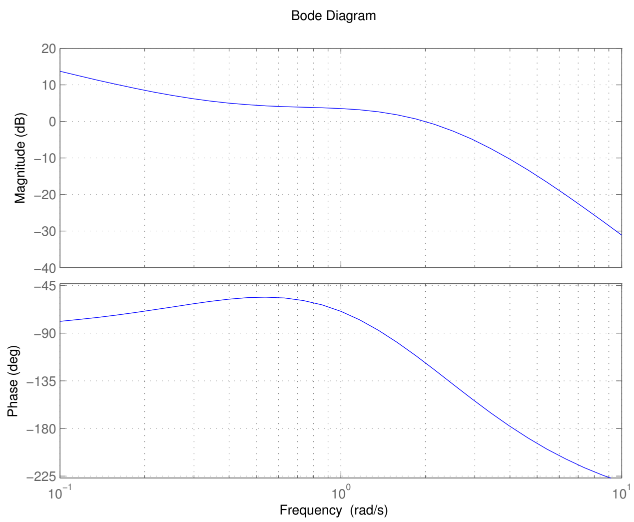
$$det(\begin{bmatrix} s & -1/C \\ 1/L & s + R_1/L \end{bmatrix}) = s(s + R/L) + 1/LC = s^2 + sR/L + 1/LC = 0$$

Eftersom alla koefficienter i polynomet är positiva, komponenterna kan bara ha värden som är större än noll, kommer det linjäriserade systemet att vara stabilt.

Uppgift 3.
Betrakta det återkopplade systemet nedan.



Processen som ska styras har följande frekvensfunktion (representerat i bodediagramet):



Välj lämplig regulator till systemet och bestäm regulatorparametrarna så att nedanstående specifikationer uppfylls. (3 p)

1) Inga kvarstående fel efter stegformade processtörningar (v).

2) Systemets fasmarginal ska vara $\varphi_m = 45°$.

3) Överkorsningsfrekvensen får inte understiga $\omega_c = 2$ rad/s.

Lösning: *Ur Bodediagrammet ser vi att processen innehåller integralverkan, varvid vi undersöker en P-regulator. För att åstadkomma en fasmariginal på 45°, kan vi med en P-regulator förstärka amplitudkurvan till lämplig förstärkning så att amplitudkurvan skär 0 dB när processen har en fasvridning på -135°, (fasmarginal $\varphi_m = -135 + 180 = 45°$). Ur Bodediagrammet ser vi att amplitudkurvan kan förstärkas med ungefär 1/(-3 dB), dvs $K_p = 1.41$. Kontroll av överkorsningsfrekvens: $\omega_c = 2.5$ rad/s. Det räcker med en P-regulator, med $K_p = 1.41$, för att uppfylla specifikationen.*

Uppgift 4.
Ett system beskrivs av differentialekvationerna

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= ax_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + 4x_2(t) + 3u(t),\end{aligned}$$

där a är en konstant och som vanligt $u(t)$ är styrsignalen och utsignalen ges av $y(t) = x_1(t)$. Systemet skall regleras med tillståndsåterkoppling enligt

$$u(t) = -Lx(t) + K_r r(t),$$

där $x(t) = [x_1(t)\ x_2(t)]^T$ och $r(t)$ är en referenssignal.

a. Vilket krav på konstanten a finns för att vi ska kunna placera slutna systemets poler var vi vill/önskar! (1 p)

b. Bestäm återkopplingsvektorn L så att slutna systemet från en dubbelpol i -3 när a är -2. (2 p)

c. Bestäm för det L som bestämdes i (b) förstärkningen K_r så att utsignalen stationärt är lika med referenssignalen. (2 p)

Lösning:
a) Om vi ska kunna placera polerna på valfritt ställe behöver systemet vara styrbart. Detta kan kontrolleras mha styrbarhetsmatrisen:

$$S = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Systemet är styrbart om styrbarhetsmatrisen har full rang, i detta fallet rang=2. Styrbarhetsmatrisen har full rang om a $\neq 0$.

b) Systemet med tillståndsåterkoppling är

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$u = -Lx + K_r r$$

där

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}$$

Det återkopplade slutna systemets poler ges som

$$\det(\lambda I - (A - BL)) = \det \begin{bmatrix} \lambda & 2 \\ -1 + 3l_1 & \lambda - 4 + 3l_2 \end{bmatrix} = \lambda^2 + (3l_2 - 4)\lambda + 2 - 6l_1 = 0$$

Vill att polerna hamnar i -3, det vill säga att

$$(\lambda + 2)^2 = \lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$$

Identifiering av koefficienter ger, $l_1 = -11/6$ *och* $l_2 = 10/3$.

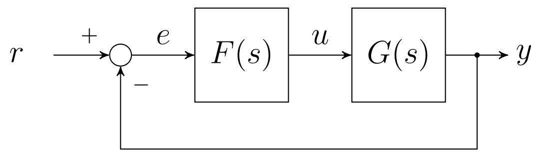
c) Bestäm K_r *så att statiska förstärkningen är 1:*

$$K_r = \frac{1}{C(-A+BL)^{-1}B} = \frac{1}{\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}(\begin{bmatrix}0 & 2\\1 & -4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\-11/2 & 10\end{bmatrix})^{-1}\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}} = -1.5$$

Uppgift 5.
En process som beskrivs med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{s(s+4)}$$

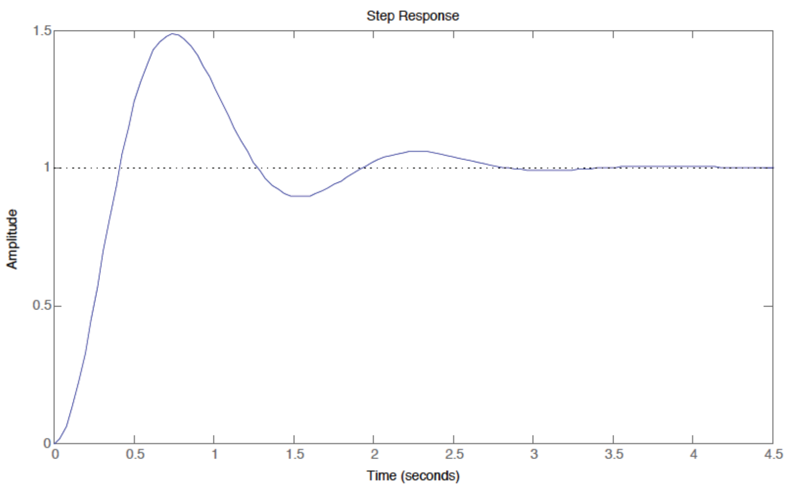
skall regleras enligt blockschemat nedan:



För att bl a eliminera kvarstående fel vid processtörningar, så har en kollega till dig designat en PI-regulator med syftet att få en skärfrekvens (överkorsningsfrekvens) c $= 4$ och tillräcklig fasmarginal. Så här blev resultatet:

$$F_1(s) = K_p(1 + \frac{1}{T_i s}), \qquad K_p = 22 \textit{ och } T_i = 1$$

När denna regulator kopplas till processen (dvs $F(s) = F_1(s)$), så fås följande stegsvar (vid börvärdesändring), som har lite väl stor översläng:



a. Verifiera att skärfrekvensen är ungefär som avsett (dvs $\omega_c \approx 4$) och beräkna fasmarginalen φ_m. (2 p)

b. Föreslå hur du vill komplettera din kollegas design, så att skärfrekvensen bibehålls men fasmarginalen ökas till $\varphi_m = 50°$. Din regulator $F_2(s)$ skall alltså tillsammans med regulatorn $F_1(s)$ ge den totala regulatorn $F(s) = F_1(s)F_2(s)$. Genomför beräkningarna och ange överföringsfunktionen för den totala regulatorn. (3 p)

Lösning:
a) Beräkna kretsöverföringens förstärkning vid $\omega = 4$:

$$|L(j4)| = |F_1(j4)||G(j4)| = K_p \frac{\sqrt{1+(4T_i)^2}}{4T_i} \frac{1}{4\sqrt{4^2+4^2}} \approx 1.002$$

beloppet är lika med 1 vid $\omega = 4$, överkorsningsfrekvensen stämmer. Fasmarginalen kan då beräknas såsom:

$$\varphi_m = 180^\circ + \arg F_1(j4) + \arg G(j4) = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ - 90^\circ + \arctan 4T_i =$$

$$= \arctan 4 - 45^\circ \approx 31^\circ$$

b) Fasen behöver alltså höjas 19°, $50^\circ - 31^\circ$, och detta kan göras med en PD-regulator.

$$F_2(s) = K\frac{1+\tau_d s}{1+\tau_d s/b}$$

Med maxfaslyft på 19° fås värdet på b:

$$b = \frac{1+\sin\varphi_{max}}{1-\sin\varphi_{max}} \approx 1.97$$

Placera maxfaslyft vid $\omega = 4$, detta ger då $\sqrt{b}/\tau_d = 4$, vilket ger $\tau_d \approx 0.35$. Justera förstärkningen så att överkorsningsfrekvensen behålls:

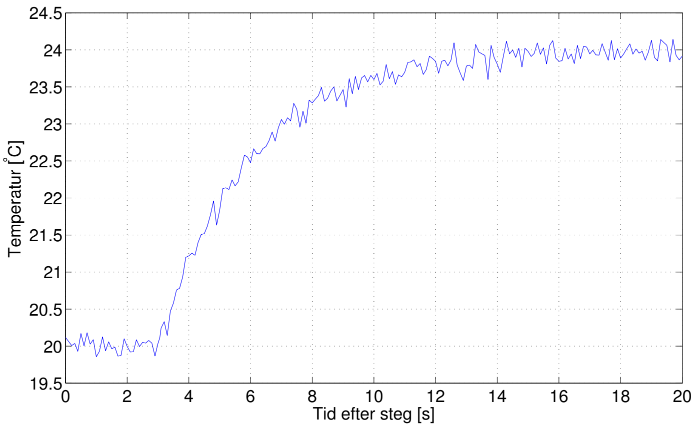
$$|F_2(j4)| = 1 \;\Rightarrow K = \frac{\sqrt{1+(4\tau_d/b)^2}}{\sqrt{1+(4\tau_d)^2}} \approx 0.71$$

Regulatorn blir således:

$$F(s) = F_1(s)F_2(s) = K_p(1+\frac{1}{T_i s})K\frac{1+\tau_d s}{1+\tau_d s/b} =$$

$$= 22(1+\frac{1}{s})0.71\frac{1+0.35s}{1+0.35s/1.97}$$

Uppgift 6.
Temperaturen i ett rum ska PI-regleras. Uppvärmingen sker en med hjälp av ett värmeelement. För att få en modell att utgå ifrån vid regleringen har ett stegsvarsförsök genomförts. Följande kurva erhölls då den tillförda effekten ökades från 10 till 11 kW.



a. Ange en lämplig överföringsfunktion som beskriver processen från tillförd effekt (W) till uppmätt temperatur (°C). (2 p)

b. Bestäm en PI-regulator som ger en fasmarginal på 60° och en överkorsningsfrekvens på 0.2 rad/s. (3 p)

Lösning:
a) Stegsvaret kan approximeras med ett första ordningens system med dödtid:

$$G(s) = \frac{Ke^{-sL}}{1 + sT}$$

Identifiering av koefficienter ger: $L = 3s$, $T = 3s$ *samt* $K = \Delta y/\Delta u = 4/1000 = 1/250$.

b) PI-regulator:

$$F(s) = K_p(1 + 1/T_i s)$$

Designmetod, flytta punkt på Nyquistkurva, spec: fasmarginal på 60° och en överkorsningsfrekvens på 0.2 rad/s. Beräkna belopp och argumetet för processen vid specificerad punkt:

$$|G(j0.2)| = \frac{1/250}{\sqrt{1 + (3 \cdot 0.2)^2}} = 0.0034$$

$$\arg G(j0.2) = -\arctan 3 \cdot 0.2 - 3 \cdot 0.2 \cdot 180/\pi = -65.3^\circ$$

Eftersom vi ska ha fasmariginal på 60° så kan PI-regulatorn fasvrida $180^\circ - 60^\circ - 65.3^\circ = 54.7^\circ$ *vid* $\omega_c = 0.2$ *rad/s.*

$$\arg F(j0.2) = -90^\circ + \arctan(0.2T_i) \Rightarrow -54.7^\circ = -90^\circ + \arctan(0.2T_i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.2T_i = 0.71 \Rightarrow T_i = 3.54$$

$$|F(j0.2)| = K_p \frac{\sqrt{1 + (0.2 \cdot 3.54)^2}}{0.2 \cdot 3.54} = Kp \cdot 1.73$$

$$|L(j0.2)| = 1 \Rightarrow |F(j0.2)||G(j0.2)| = 1 \Rightarrow K_p = \frac{1}{1.73 \cdot 0.0034} = 170.0$$

Regulatorn blir således:

$$F(s) = 170(1 + 1/3.54s)$$

SLUT!