CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för signaler och system
System- och reglerteknik

ERE103 och ERE102 Reglerteknik D
Tentamen 2016-08-18

14.00 - 18.00

Examinator: Jonas Fredriksson, tel 1359.

Tillåtna hjälpmedel:

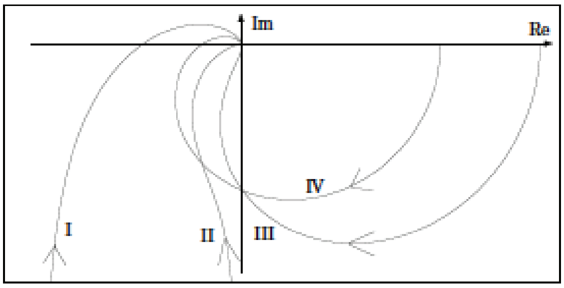
- Typgodkänd räknare
- Mathematics Handbook (Beta)
- Physics Handbook
- Formelsamling M3 och D3

Poängberäkning: Tentamen består av 6 uppgifter om totalt 30 poäng. Nominella betygsgränser är 12 (3), 18 (4) respektive 24 (5) poäng. Lösningarna skall vara tydliga och väl motiverade!

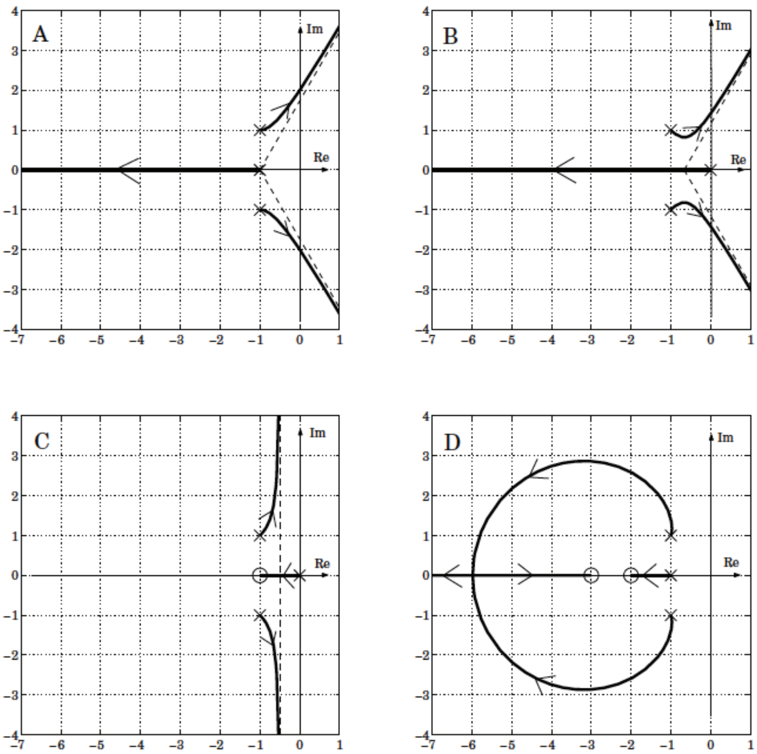
Tentamensresultat: Granskning av rättningen erbjuds den 7:e och 8:e september kl 12-13 på institutionen. Kommer du senare mottages endast skriftliga klagomål mot rättningen. Sådana skriftliga klagomål måste lämnas in **senast två veckor** efter ordinarie granskning.

LYCKA TILL!

Uppgift 1.
I denna uppgift ska vi betrakta fyra system $Y(s) = G(s)U(s)$ som är proportionellt återkopplade, $u = K(yref - y)$. Samtliga överföringsfunktioner är rationella funktioner, d.v.s. $G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$ där $Q(s)$ och $P(s)$ är polynom. I figuren nedan visas Nyquistkurvorna för respektive $G(s)$, markerade med I, II, III och IV.



I figurerna nedan visas rotorterna för de återkopplade systemens poler med avseende på förstärkningen K, markerade A, B, C och D. Pilarna visar hur det återkopplade systemet poler ändras med ökande K. Ange vilken Nyquistkurva som hör ihop med vilken rotort, samt ge en kort motivering för varje par! (8 p)



Lösning: *Av Nyquistdiagrammet framgår att Nyquistkurvorna I och IV skär negativa reella axeln, medan II och III inte gör det, vilket betyder att I och IV ger instabila slutna system för stora värden på K, medan II och III ger stabila slutna system för all $K > 0$. Av rotorterna är det A och B som går in i höger halvplan, medan C och D hela tiden är i vänster halvplan. Alltså måste I och IV höra ihop med A och B, och II och III med C ovh D. Rotorterna B och C har startpunkter i origo, $P(s)$ har ett nollställe i origo för B och C. Men $P(s)$ är nämnarpolynom till kretsförstärkningarna, så de motsvarande $G_0(s)$ har alltså en pol i origo. Av Nyquistkurvorna har III och IV inte en pol i origo, medan I och II ser ut att komma upp längs negativa inmaginära axeln. Alltgå måste I och II höra ihop med B och C, och III och IV med A och D. Den enda möjliga ihopparningen är alltså I och B, II och C, III och D och IV och A.*

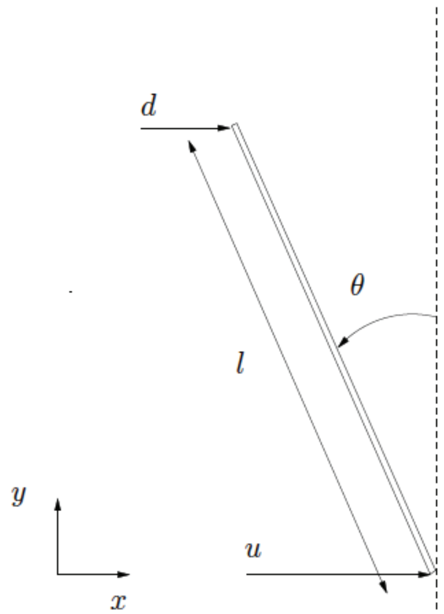
Uppgift 2.
Är följande system stabila?

a. $G(s) = \frac{0.5}{s^2+6s-16}$ (1 p)

b. $G(s)$ enligt ovan, reglerat med en P-regulator med förstärkningen $K_p = 24$. (1 p)

Lösning: *a) Poler:* $s^2 + 6s - 16$ *vilket ger* $s = -3 \pm \sqrt{9 - (-16)} = (-8, 2)$. *Pol i höger halvplan, alltså instabilt system. b) Slutna systemets överförings-funktion:* $G_s(s) = \frac{K_pG(s)}{1+K_pG(s)} = ... = \frac{12}{s^2+6s-4}$. *Poler:* $s^2 + 6s - 4$ *vilket ger* $s = -3 \pm \sqrt{9 - (-4)} = (-6.6, 0.6)$. *Pol i höger halvplan, alltså instabilt slutet system.*

Uppgift 3.
En pekpinne som balanseras på en hand kan modelleras genom att betrakta en inverterad pendel som balanseras av en horisontell kraft, u, som verkar på stödpunkten. d beskriver störningar som påverkar pekpinnen. Se figuren nedanför.



Från Newtons lagar får man fram följande differentialekvation för sambandet mellan krafterna u och d och vinkeln θ:

$$\frac{2ml}{3}\ddot{\theta} = mg\sin\theta + u\cos + d\cos\theta.$$

a. Linjärisera differentialekvationen för små variationer kring $\theta = 0$ och visa att överföringsfunktionen från $u(t)$ till vinkeln $\theta(t)$ kan skrivas som

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{b}{\frac{s^2}{\omega^2} - 1}.$$

Bestäm även ω och b! (3 p)

b. Anta att den inverterade pendeln återkopplas från reglerfelet $U(s) = F(s)(Y_{ref}(s)?Y(s))$. Rita upp ett blockdiagram för systemet. (1 p)

c. Anta en regulator $F(s)$ av PD-typ: $F(s) = K_p + K_d s$. Visa att båda deriverande och proportionell återkoppling är nödvändigt för att åstadkomma ett slutet system som är insignal-utsignal stabilt. (2 p)

Lösning: *a) Små vinklar ger* $\sin\theta \approx \theta$ *och* $\cos\theta \approx 1$. *Den linjäriserade diffekvationen blir*

$$\frac{2ml}{3}\ddot{\theta} - mg\theta = u + d$$

$$\frac{2l}{3g}\ddot{\theta} - \theta = \frac{1}{mg}(u + d)$$

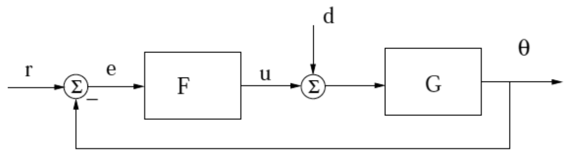
Antag d=0, detta ger (Laplacetrasformerat)

$$(\frac{2l}{3g}s^2 - 1)\Theta(s) = \frac{1}{mg}U(s)$$

$$\Theta(s) = \frac{\frac{1}{mg}}{\frac{2l}{3g}s^2 - 1}U(s) = \frac{b}{\frac{s^2}{\omega^2} - 1}U(s)$$

alltså är $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$ *och* $b = \frac{1}{mg}$

b)



c) Med regulator $F(s) = K_p + K_d s$ *ges det slutna systemets poler av lösningarna till*

$$1 + FG = 0$$

$$(\frac{s^2}{\omega^2} - 1) + K_p + K_d s = 0$$

$$s^2 + K_d\omega^2 s + (K_p - 1)\omega = 0$$

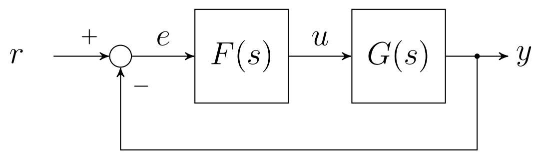
För att systemet ska vara stabilit krävs att $K_d > 0$ *samt att* $K_p > 1$*, koefficienterna är större än noll.*

Uppgift 4.

En process, $G(s)$, kan beskrivas med följande överföringsfunktion

$$G(s) = \frac{6e^{-0.5s}}{1 + 2s}$$

Processens ska regleras med hjälp av en P-regulator, $F(s) = K_p$.



a. Bestäm K_p så att kvarstående felet vid stegformad börvärdesändring blir 25%! (2 p)

b. Vad blir systemets fasmarginal och amplitudmarginal med detta val av K_p? (2 p)

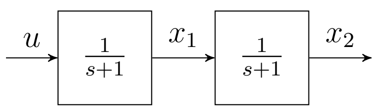
Lösning: *a)*

$$\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+F(s)G(s)}\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{1+K_p\frac{6e^{-0.5s}}{1+2s}} = \frac{1}{1+K_p 6} = 0.25 \to K_p = 0.5$$

b) $\phi_m = 69^\circ$ *och* $A_m = 7.3\ dB$

Uppgift 5.

Ett system av två seriekopplade processer kan förenklat beskrivas av blockschemat i figuren nedan, där variablerna $x_1(t)$ och $x_2(t)$ betecknar utsignalen från respektive process och $u(t)$ betecknar insignalen till den första processen.



a. Ställ upp en tillståndsmodell för systemet ovan! (2 p)

b. Bestäm, med hjälp av tillståndsmodellen i a)-uppgift, en tillståndsåterkoppling på formen

$$u(t) = -l_1 x_1(t) - l_2 x_2(t) + r(t)$$

så att slutna systemets poler placeras i -2. (2 p)

c. Antag att man endast kan mäta ett av tillstånden i tillståndsmodellen, men att man kan få välja vilket som ska mätas. Vilket av tillstånden är att föredra om man vill skapa ett reglersystem med hjälp av denna mätsignal? Motivera! (1 p)

Lösning: *a)*

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2$$

b) Systemet med tillståndsåterkoppling är

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$u = Lx + r$$

där

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}$$

Det återkopplade slutna systemets poler ges som

$$\det(\lambda I - (A - BL)) = \lambda^2 + (2 + l_1)\lambda + l_1 + l_2 + 1 = 0$$

Vill att polerna hamnar i -2, det vill säga att

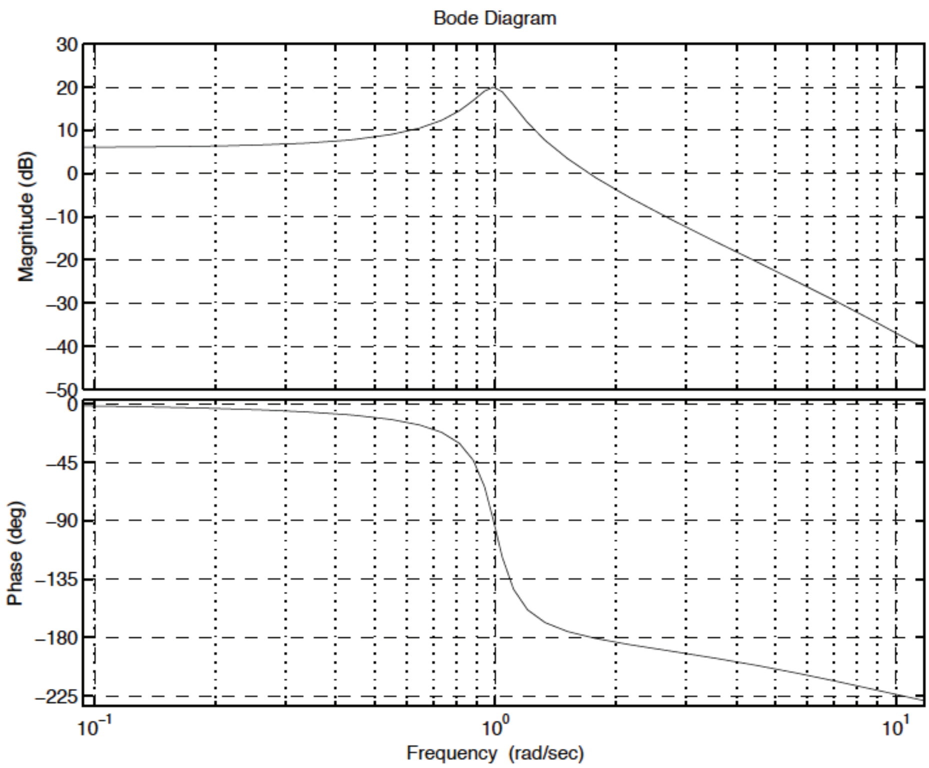
$$(\lambda + 2)^2 = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

Identifiering av koefficienter ger, $l_1 = 2$ *och* $l_2 = 1$.
c) Välj x_2, *kan visas med observerbarhetsmatrisen att systemet då är observerbart!*

Uppgift 6.
Pitchvinkeln på ett rotorblad på ett vinkraftverk ska regleras. Överföringsfunktionen från pålagd spänning $u(t)$ i volt på en elmotor till bladets vinkel $y(t)$ i grader ges av

$$G(s) = \frac{2}{0.1s^3 + 1.02s^2 + 0.3s + 1}$$

och Bode diagrammet för detta system är avbildat nedan:



a. Man vill använda en regulator på formen $U(s) = F(s)(R(s) - Y(s)$ för att få ett slutet system med lämpliga egenskaper. Antag att en P-regulator används. Vilken är den maximala skärfrekvensen som man kan få om man kräver att det slutna systemet ska vara stabilt? Ange värdet på P-regulatorns förstärkning i detta fall! (2 p)

b. En bättre regulator visar sig krävas. Vi önskar oss ett slutet system med följande egenskaper:

- Skärfrekvens ska vara 5 rad/s.
- Fasmarginalen ska vara 20°.
- Det stationära reglerfelet ska inte vara större än 2% när referenssignalen är ett steg med amplituden 10 grader.

Ta fram en lämplig regulator som uppfyller dessa krav (3 p)

Lösning: *a) Stabilitetsgränsen är när förstärkningen är 1 då fasen är ?180°. Alternativt uttryck, den maximala skärfrekvensen fås när skärfrekvensen och fasskärfrekvensen sammanfaller, det vill säga då* $\omega_c = \omega_\pi$. *Detta samband gäller redan i det öppna systemet i Bodediagrammet där* $\omega_c = \omega_\pi \approx 1.7$ *rad/s. P-regulatorn har alltså förstärkning strax under 1 när det slutna systemet har så hög skärfrekvens som möjligt.*
b) Regulatorsyntesproblemet kan antas lösas med en PD-regulator.

$$F_{PD}(s) = K_p \frac{1 + s\tau}{1 + s\tau/b}$$

Vid $\omega_c = 5$ *rad/s är fasvridningen ca -205° (ur Bodediagram). Den nödvändiga fasavanceringen är alltså 25°+20°+10°=55°, (vi lägger till 10° för att komensera för ev. behov av I-del för att klara av kravet på kvarstående fel. Placera max faslyft vid* $\omega_c = 5$, *detta ger (formelsamling)*

$$b = \frac{1 + \sin\varphi_{max}}{1 - \sin\varphi_{max}} = 10.06$$

Vi väljer $\tau = \frac{\sqrt{b}}{\omega_c} = \frac{\sqrt{10.06}}{5} = 0.63$. *Förstärkningen* K_p *väljs så att överkorsningsfrekvensen blir den önskade*

$$K_p = \frac{1}{|G(j\omega_c)|\sqrt{b}} = \frac{1}{0.071\sqrt{10.06}} = 4.44$$

Kontroll av kvarstående fel:

$$\lim_{s \to 0} s \frac{1}{1 + F_{PD}(s)G(s)} \frac{10}{s} = \frac{10}{1 + 4.44 * 2} = 1.01$$

Specifikationen för kvarstående fel uppfylls således inte. Lägg till PI-del i regulatorn:

$$F_{PI}(s) = K_i \frac{1 + T_i s}{s}$$

Välj $1/T_i$ *till en tiondel av överkorsningsfrekvensen, dvs* $T_i = 10/\omega_c = 2$. *Se till att statiska förstärkningen för PI-delen blir 1, påverkar då inte överkorsningsfrekvensen,* $K_i = 1/T_i = 0.5$.

SLUT!