CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för signaler och system
Reglerteknik, automation och mekatronik

ERE 103 Reglerteknik D
Tentamen 2016-04-04

14.00 - 18.00 Maskin-salar

Examinator: Jonas Fredriksson, tel 1359.

Tillåtna hjälpmedel:

- Typgodkänd räknare
- Mathematics Handbook (Beta)
- Physics Handbook
- Formelsamling M3 och D3

Poängberäkning: Tentamen består av 6 uppgifter om totalt 30 poäng. Nominella betygsgränser är 12 (3), 18 (4) respektive 24 (5) poäng. Lösningarna skall vara tydliga och väl motiverade!

Tentamensresultat: Granskning av rättningen erbjuds den 20:e och 21:a april kl 12-13, tid och plats kommer att anslås på PingPong. Kommer du senare mottages endast skriftliga klagomål mot rättningen. Sådana skriftliga klagomål måste lämnas in **senast två veckor** efter ordinarie granskning.

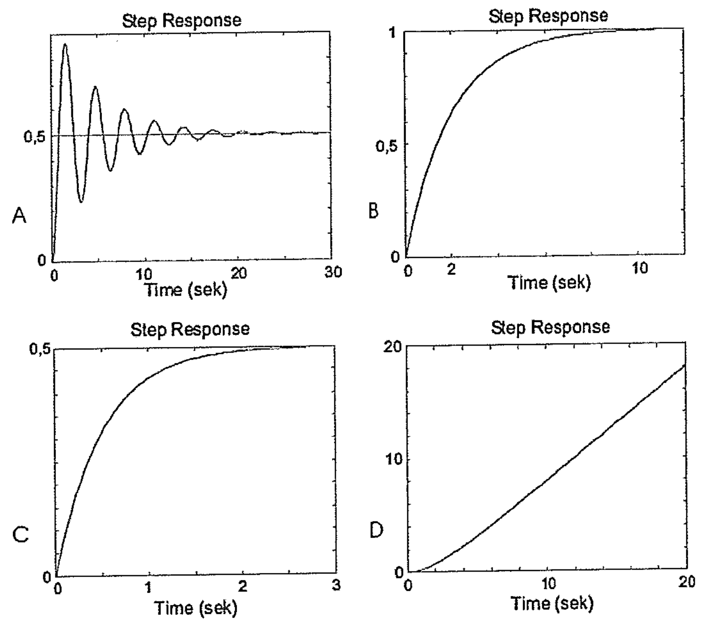
LYCKA TILL!

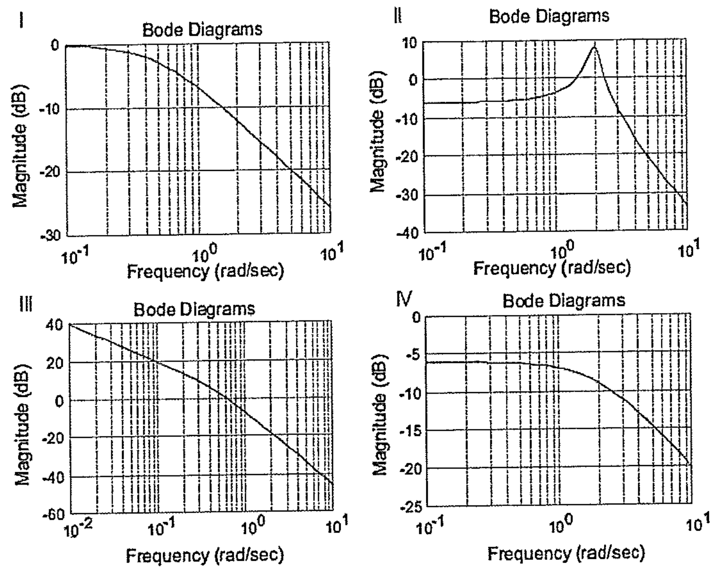
Uppgift 1. a. Sambandet mellan en insignal $u(t)$ och en utsignal $y(t)$ beskrivs av följande differentialekvation:

$$-\ddot{y}(t) - 7\dot{y}(t) - 12y(t) = \dot{u}(u) + 2u(t)$$

Avgör om systemet är insignal-utsignal stabilt! (2 p)

b. Para ihop stegsvaren för fyra olika minfassystem med amplituddiagrammen nedan. En kort motivering krävs! (2 p)





1. a) $-\ddot{y}(t) - 7\dot{y}(t) - 12y(t) = \dot{u}(t) + 2u(t)$

Laplace transformera

$$-s^2Y(s) - 7sY(s) - 12Y(s) = sU(s) + 2U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = -\frac{s+2}{s^2+7s+12}$$

stabiliteten systems av polerna till $G(s)$

$$s^2+7s+12=0$$

$$(s+3)(s+4)=0$$

poler -3 och -4 $\Rightarrow$ stabilt.

b) A - svängig respons $\Rightarrow$ resonanstopp $\Rightarrow$ II

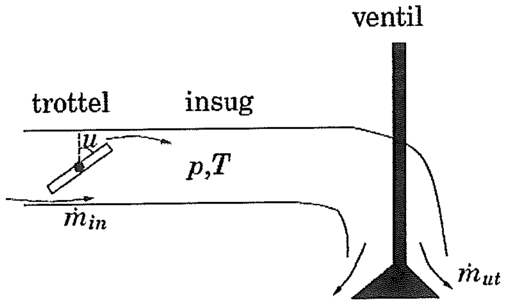
B - långsam respons, statisk förstärkning $=1$ (0 dB)

$\Rightarrow$ I

C - statiskförstärkning $= 0{,}5$ (-6 dB) $\Rightarrow$ IV

D - liknar en integralprocess $\Rightarrow$ III

Uppgift 2.
Insugsröret i en bensinmotor är volymen mellan trottelspjället och insugsventilen till motorns cylinder, se figur nedan.



Om man antar att inflödet av massa är detsamma som utflödet, $\dot{m}_{in} = \dot{m}_{ut} = v$ så kan dynamiken i insuget beskrivas termodynamiskt som

$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha v - \beta v x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{x_2}{x_1}(\alpha v - \beta v x_2)$$

där $x_1 = p$, trycket i insuget, $x_2 = T$, temperaturen i insuget, insignalen v är massflödet och α och β är positiva konstanter.

a. Visa att $(x_1^0, x_2^0, v^0) = (10^5, \alpha/\beta, 0.1)$ är en stationär punkt till systemet. (2 p)

b. Linjärisera systemet kring den stationära punkten i uppgift (a). (3 p)

2. a) Stationärpunkt: $\dot{x} = 0$

$$\begin{cases} 0 = \alpha v^0 - \beta v^0 x_2^0 & (1) \\ 0 = \dfrac{x_2^0}{x_1^0}\left(\alpha v^0 - \beta v^0 x_2^0\right) & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2^0 = \dfrac{\alpha}{\beta} \text{ från (1)} \end{cases}$$

Om $x_2^0 = \frac{\alpha}{\beta}$ sätts in i (2) ser vi att ekvationen alltid är 0. Alltså kan x_1^0 anta alla värden utom 0. Välj tex 10^5

Från (1) ser vi att v^0 kan också väljas valfritt. Välj tex 0,1.

b) Linjärisera

$$\Delta\dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x^0, u^0} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial u}\bigg|_{x^0, u^0} \Delta u$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\beta v$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\frac{x_2(\alpha v - \beta v x_2)}{x_1^2} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\alpha v}{x_1} - \frac{2\beta v x_2}{x_1}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial v} = \alpha - \beta x_2 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial v} = \frac{\alpha x_2}{x_1} - \frac{\beta x_2^2}{x_1}$$

Sätt in jämviktspunkten

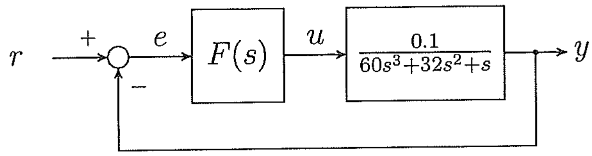
$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\bigg|_{x^0, u^0} = 0 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\bigg|_{x^0, v^0} = -0{,}1\beta$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\bigg|_{x^0, v^0} = 0 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\bigg|_{x^0, v^0} = -\frac{0{,}1\alpha}{10^5}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial v}\bigg|_{x^0, v^0} = 0 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial v}\bigg|_{x^0, v^0} = \frac{\alpha^2}{10^5\beta} - \frac{\alpha^2}{10^5\beta} = 0$$

$$\Delta\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}1\beta \\ 0 & -\frac{0{,}1\alpha}{10^5} \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u$$

Uppgift 3.
I nedanstående reglersystem är vi intresserade av att reglera processen med olika regulatorer, $F(s)$.



a. För vilka förstärkningsvärden på $F(s) = K_p$ är en P-regulator stabil i ovanstående system? (2 p)

b. För vilka förstärkningsvärden på $F(s) = K_p$ är en P-regulator stabil i ovanstående system om vi har råkat få positiv återkoppling istället? (1 p)

c. Vi önskar P-reglera ovanstående process och undrar för vilka värden på förstärkningen K_p som kvarstående felet är mindre än 0.1 enheter? (2 p)

d. Om vi tänker oss att använda en PI-regulator, $F(s) = K_p + T_i/s$, i ovanstående reglersystem. För vilka integrationstider är systemet stabilt när $K_p = 1$? (2 p)

3. a) $1 + L(s) = 0$

$$1 + \frac{0{,}1K_p}{60s^3 + 32s^2 + s} = 0 \Rightarrow 60s^3 + 32s^2 + s + 0{,}1K_p = 0$$

R-H:

$s^3:\ 60 \quad 1$

$s^2:\ 32 \quad 0{,}1K_p$

$s^1:\ \frac{32-6K_p}{32} \quad 0$

$s^0:\ 0{,}1K_p \quad 0$

stabilt om $K_p > 0$

$32 - 6K_p > 0 \Rightarrow K_p < \frac{32}{6}$

$0 < K_p < \frac{32}{6}$

b) Positiv återkoppling.

$1 - L(s) = 0$

$$1 - \frac{0{,}1K_p}{60s^3 + 32s^2 + s} = 0 \Rightarrow 60s^3 + 32s^2 + s - 0{,}1K_p = 0$$

R-H:

$s^3:\ 60 \quad 1$

$s^2:\ 32 \quad -0{,}1K_p$

$s^1:\ \frac{32+6K_p}{32} \quad 0$

$s^0:\ -0{,}1K_p$

stabilt om $K_p < 0$

$32 + 6K_p > 0$ om $K_p < 0$

samtidigt $K_p > -\frac{32}{6}$

$-\frac{32}{6} < K_p < 0$

c) Kvarstående fel

stég.

$$e_s = e(\infty) = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+L(s)}\cdot\frac{r_0}{s}$$

$$= \frac{r_0}{1+L(0)} = 0 \quad \because \text{ För alla } 0<K_p<\frac{32}{6}$$

$$L(s) = \frac{0{,}1K_p}{60s^3+32s^2+s} \qquad L(0) \Rightarrow \infty$$

d) $1 + L(s) = 0$

$$1 + \frac{(K_p s + T_i)0{,}1}{s(60s^3+32s^2+s)} = 0 \Rightarrow 60s^4+32s^3+s^2+0{,}1K_p s + 0{,}1T_i = 0$$

R - H: $K_p = 1$

s^4: 60 1 $0{,}1T_i$

s^3: 32 0,1 0

s^2: $\frac{2{,}6}{32}$ $0{,}1T_i$ 0

s^1: $\frac{2{,}6/32 - 3{,}2T_i}{2{,}6/32}$ 0

s^0: $0{,}1T_i$

Stabilt om $T_i > 0$

och

$$\frac{2{,}6}{32} - 3{,}2T_i > 0$$

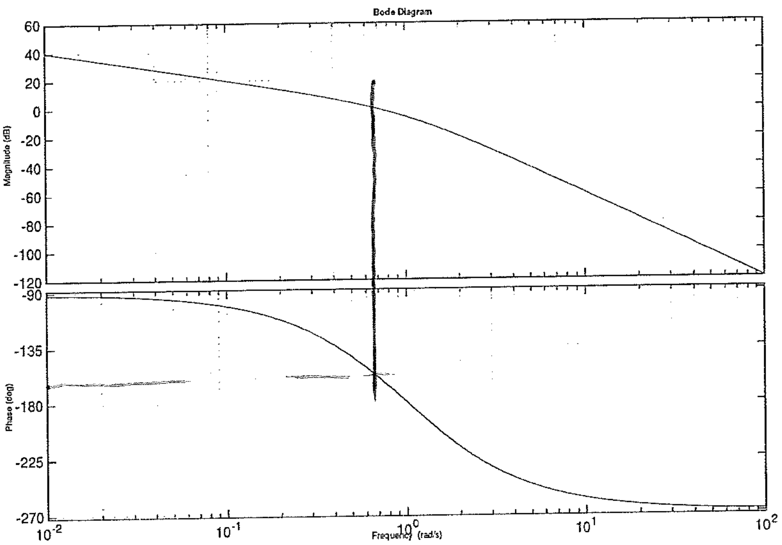
$$T_i < \frac{2{,}6}{32\cdot 3{,}2} =$$

$$0 < T_i < 0{,}0254$$

Uppgift 4.
Överföringsfunktionen för en process är

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$$

När systemet återkopplas med en P-regulator där $K_p = 1$ så blir dess stegsvar alldeles för svängigt (stor relativ översläng och lång insvängningstid), dvs det har för låg fasmarginal. Designa en lämplig regulator så att systemets fasmarginal blir 60°, samtidigt som systemets snabbhet (dvs överkorsningsfrekvensen) behålls. Bodedigrammet för processen $G(s)$ visas nedan. (4 p)



Ur diagram fås $\omega_c \approx 0{,}68$ rad/s

Fasvridning vid ω_c : $\arg\{L(j\omega_c)\} \approx -158°$

Eftersom vi önskar 60° fasmarginal måste vi "höja" fasen $158° - 120° = 38°$.

För att åstadkomma en höjning behövs en PD-reg. eller ett lead filter.

$$F(s) = K_p \frac{1 + s\tau_d}{1 + s\tau_d/b}$$

Vi väljer att placera maxfaslyft vid ω_c

$$\Rightarrow \quad b = \frac{1+\sin(\varphi_{max})}{1-\sin(\varphi_{max})} = \frac{1+\sin(38^\circ)}{1-\sin(38^\circ)} \approx 4.3$$

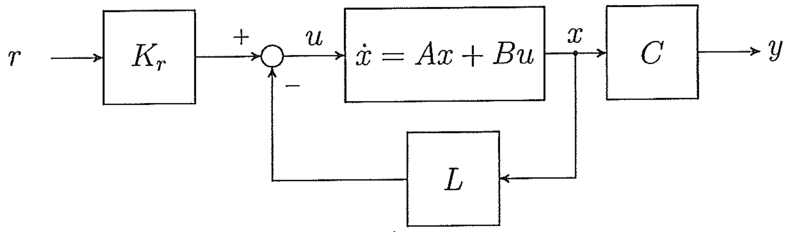
$$\Rightarrow \text{ välj } \tau_d = \frac{\sqrt{b}}{\omega_c} = \frac{\sqrt{4.3}}{0.68} \approx 3.05$$

Nu måste K_p bestämmas så att $|L(j\omega_c)| = 1$

$$\underbrace{\sqrt{b}\, K_p}_{|F(j\omega_c)|} \cdot \underbrace{1}_{|G(j\omega_c)|} = 1 \quad \Rightarrow \quad K_p = \frac{1}{\sqrt{b}} \approx 0.48$$

<u>SVAR:</u> $\quad F(s) = 0.48 \, \dfrac{1+3.05s}{1+3.05s/4.3}$

Uppgift 5.
Betrakta följande återkopplade system:



där

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix}$$

a. Bestäm L så att det återkopplade systemet får poler i: -1 och -2. (3 p)

b. Bestäm K_r så att ärvärdet blir lika med börvärdet för långsamma börvärdesändringar. (2 p)

a)
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$u = -Lx$$

Bestäm L så att polerna hamnar i -1 och -2.

$$\Rightarrow \det(sI - (A - BL)) \equiv (s+1)(s+2)$$

$$\det(sI - A + BL) = \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 & 1+l_2 \\ -2-2l_1 & -1-2l_2 \end{bmatrix}\right) =$$

$$\begin{vmatrix} s - l_1 & -1 - l_2 \\ 2 + 2l_1 & s+1+2l_2 \end{vmatrix} = (s - l_1)(s+1+2l_2) + (1+l_2)(2+2l_1)$$

$$= s^2 + s + 2l_2 s - l_1 s - l_1 - \cancel{2l_1 l_2} + 2 + 2l_1 + 2l_2 + \cancel{2l_1 l_2}$$

$$= s^2 + (2l_2 - l_1)s + 2 + 2l_2 + l_1 \equiv s^2 + 3s + 2$$

Identifiering ger

$$\begin{cases} 2l_2 - l_1 = 3 \\ 2 + 2l_2 + l_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2l_2 - l_1 = 3 \\ 2l_2 + l_1 = 0 \end{cases} = \begin{cases} 2l_2 - l_1 = 3 \\ l_1 = -2l_2 \end{cases}$$

$$4l_2 = 3 \Rightarrow l_2 = \frac{3}{4}$$

$$l_1 = -2l_2 = -2 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{3}{2}$$

Svar: $\underline{\underline{L = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}}}$

b)

$$K_r = \frac{1}{C(-A+BL)^{-1}B}$$

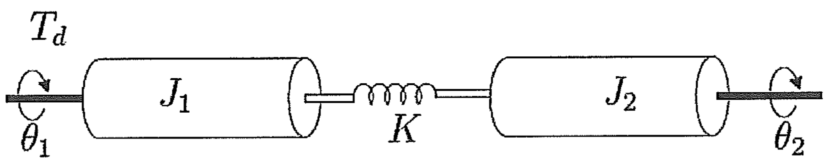
$$(-A+BL)^{-1} = \left(-\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}\right)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} \\ -3 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{7}{4} \\ -1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\frac{15}{4} - \frac{7}{4}} \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{7}{4} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{7}{4} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$C \cdot (-A+BL)^{-1}B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5/2 & 7/4 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2$$

Svar: $\underline{\underline{K_r = 2}}$

Uppgift 6.
Betrakta drivaxeln i figuren nedan.



Insignalen till systemet är det drivande momentet $T_d(t)$. $\theta_1(t)$ och $\theta_2(t)$ anger vinkeln för vänster respektive höger axelhalva. $\omega_1(t) = \dot{\theta}_1(t)$ och $\omega_2(t) = \dot{\theta}_2(t)$ är vinkelhastigheten för vänster resp. höger axelhalva. Axeln innehåller ett vekt parti i mitten som kan betraktas som en torsionsfjäder med fjäderkonstanten $K > 0$. Tröghetsmomenten för de två axelhalvorna är J_1 respektive J_2. Friktionen är försumbar.

a. Bestäm en tillståndsmodell över systemet ovan, använd följande tre tillstånd $x_1(t) = \omega_1(t)$, $x_2(t) = \theta_1(t) - \theta_2(t)$ och $x_3(t) = \omega_2(t)$. Låt utsignalen vara vinkelhastigheten på vänster respektive höger axelhalva, dvs. utsignalen är en vektor med två element. (3 p)

b. Avgör om hastigheten på den högra axelhalvan, dvs. $\omega_2(t)$, alltid kommer att gå mot 0 då det drivande momentet, $T_d(t)$, går mot 0. (2 p)

SLUT!

a) Newtons 2:a lag för roterande kroppar ger.

$$J_1 \dot{\omega}_1 = T_d - K(\theta_1 - \theta_2)$$

$$J_2 \dot{\omega}_2 = K(\theta_1 - \theta_2)$$

Välj tillstånden $x_1 = \omega_1$ $\quad x_2 = \theta_1 - \theta_2$; $\quad x_3 = \omega_2$

$$\dot{x}_1 = \dot{\omega}_1 = \frac{1}{J_1}\left(T_d - K(\theta_1 - \theta_2)\right) = \frac{1}{J_1}\left(T_d - Kx_2\right)$$

$$\dot{x}_2 = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 = \omega_1 - \omega_2 = x_1 - x_3$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{J_2}K(\theta_1 - \theta_2) = \frac{K}{J_2}x_2$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{K}{J_1} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{K}{J_2} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{J_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} T_d$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

b) Polerna ges av egenvärdena till A-matrisen.

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & \frac{K}{J_1} & 0 \\ -1 & \lambda & 1 \\ 0 & -\frac{K}{J_2} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda\left(\lambda^2 + \frac{K}{J_2}\right) + \frac{K}{J_1}\lambda = \lambda\left(\lambda^2 + \frac{K}{J_1} + \frac{K}{J_2}\right)$$

Vi ser att det finns en pol i origo, vilket innebär att utsignalen kommer att integrera upp insignalen. Därför kommer inte utsignalen att gå mot 0 då T_d går mot 0.