

1. a) De har samma amplitudkurva.

$$|G_1(j\omega)| = \left| \frac{j\omega - 1}{j\omega + 1} \right| = \frac{|j\omega - 1|}{|j\omega + 1|} = \frac{\sqrt{\omega^2 + (-1)^2}}{\sqrt{\omega^2 + 1^2}} = 1$$

$$|G_2(j\omega)| = 1$$

$$\begin{aligned} \text{b) } Y &= G_2 G_1 (R + F_2 Y + F_1 G_2^{-1} Y) = \\ &= G_2 G_1 R + F_2 G_2 G_1 Y + F_1 G_1 Y \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\frac{Y}{R} = \frac{G_2 G_1}{1 - F_2 G_2 G_1 - F_1 G_1}}}}$$

c) Överföringsfunktionen ges som

$$Y(s) = \frac{1}{ms+b} F(s)$$

$$\text{med } (m=1, b=1) \Rightarrow G(s) = \frac{1}{s+1}$$

Viltfunktionen ges som $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = e^{-t} \Rightarrow \textcircled{1}$$

2. a) Ur figur fås

$$K = 19 \quad L = 0 \quad \text{och} \quad T = 4$$

b) $y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{F \cdot G}{1 + F \cdot G} \cdot \frac{1}{s}$ ↑
enhetssteg

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{L(0)}{1 + L(0)} = \left[L(0) = \frac{10 \cdot K e^{-sL}}{1 + sT} \right] =$$

$$= \left[L(0) = \frac{10K}{1} = 19 \right] = \frac{19}{1 + 19} = \underline{\underline{\frac{19}{20}}}$$

3. Specifikation 1 indikerar att vi behöver I-verken i vår regulator, ty integralverkan finns ej i processen. Prova en PI-regulator.

Bestäm $\arg\{G(j\omega)\}$ för $\omega = \omega_c = 2 \text{ rad/s}$

$$\arg\{G(j\omega)\} = -\arctan \omega - \frac{\omega}{2} \cdot \frac{180}{\pi}$$

$$\arg\{G(j\omega_c)\} = -\arctan 2 - \frac{180}{\pi} \approx 120^\circ$$

vil kan tillåta regulatorn att ha $180^\circ - \varphi_m - 120^\circ = 15^\circ$ försvidning för $\omega = 2 \text{ rad/s}$.

$$F(s) = K_i \left(\frac{1 + T_i s}{s} \right) \Rightarrow \arg\{F(j\omega)\} = \arctan T_i \omega - 90^\circ$$

För $\omega = \omega_c = 2 \text{ rad/s}$ gäller alltså $\arctan 2T_i - 90^\circ = 15^\circ$

$$\arctan 2T_i = 75^\circ \Rightarrow T_i = \underline{\underline{1.87}}$$

$$|L(j\omega_c)| = 1 \Rightarrow |G(j\omega_c)| \cdot |F(j\omega_c)| = 1$$

$$|G(j\omega_c)| = \frac{10}{\sqrt{\omega_c^2 + 1}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$$

$$|F(j\omega_c)| = \frac{K_i \sqrt{1 + (T_i \omega_c)^2}}{2} = \frac{K_i \sqrt{1 + (1.87 \cdot 2)^2}}{2}$$

$$|F| = \frac{1}{|G|} \Rightarrow K_i = \frac{2\sqrt{5}}{10\sqrt{1 + (1.87 \cdot 2)^2}} = 0.12 \Rightarrow F(s) = \underline{\underline{\frac{0.12(1 + 1.87s)}{s}}}$$

4. Värme balans:

$$a) \quad C \frac{dT}{dt} = k_1 T^3 + P - k_2 T$$

$$100 \frac{dT}{dt} = 0,1 T^3 + P - 5T$$

b) Styrdynamik

$$P(s) = \frac{1}{1 + \tau s} U(s)$$

$$P(s) + \tau s P(s) = U(s)$$

$$\tau \frac{dP}{dt} + P = u(t)$$

$$\Rightarrow \tau \frac{dP}{dt} = -P + u$$

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = 0,001 T^3 + P - 0,05T \\ \frac{dP}{dt} = -\frac{1}{\tau} P + \frac{1}{\tau} u \end{cases} = \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_2, u) \end{cases}$$

c) Linjärisering

Jämviktpunkt ($P_0 = 0$)

$$P_0 = 0, \quad u_0 = 0$$

$$T_0 = \sqrt{50}$$

$$\begin{cases} 0 = 0,001 T^3 - 0,05T \\ 0 = \frac{1}{\tau} u \end{cases}$$

$$T_0(0,001 T_0^2 - 0,05) = 0$$

$$T_0 = 0 \text{ eller } T_0 = \sqrt{50}$$

$$x_1 = T$$

$$x_2 = P$$

$$u = u$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 3 \cdot 0,001 T^2 - 0,05 \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1 \quad \frac{\partial f_1}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\tau} \quad \frac{\partial f_1}{\partial u} = \frac{1}{\tau}$$

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{x_0, u_0} = 0,1 \quad \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{x_0, u_0} = 1 \quad \left. \frac{\partial f_1}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} = 0$$

$$\left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{x_0, u_0} = 0 \quad \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{x_0, u_0} = -\frac{1}{\tau} \quad \left. \frac{\partial f_1}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} = \frac{1}{\tau}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\tau} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

d)

$$G(s) = C (sI - A)^{-1} B + D =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\tau} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-0,1 & -1 \\ 0 & s+\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\tau} \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+\frac{1}{\tau} & 1 \\ 0 & s-0,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\tau} \end{bmatrix}}{(s-0,1)(s+\frac{1}{\tau})}$$

$$= \frac{\frac{1}{\tau}}{(s-0,1)(s+\frac{1}{\tau})}$$

Poler i $-\frac{1}{\tau}$ och $(0,1)$ ← högre halvplanet.

5

$$G_1(s) = \frac{s-6}{s^2+4s}$$

a) Kan $F(s) = K_p$ stabilisera processen?

$$G_{ny}(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{F(s) \cdot G(s)}{1+G(s)F(s)}$$

K.E. ges av $1+L(s) = 0$

$$1 + \frac{K_p(s-6)}{s^2+4s} = 0$$

$$s^2 + (4+K_p)s - 6K_p = 0$$

Nödvändigt (och tillräckligt villkor) att $4+K_p > 0$
och $-6K_p > 0$

$K_p < 0$ och $K_p > -4 \Rightarrow -6 < K_p < 0$ stabilisera processen

b) $F(s) = \frac{K_i}{s} \Rightarrow L(s) = \frac{K_i(s-6)}{s(s^2+4s)}$

K.E. ges av $1+L(s) = 0$

$$s(s^2+4s) + K_i(s-6) = 0$$

$$s^3 + 4s^2 + K_i s - 6K_i = 0$$

Routh-Hurwitz

$$\begin{array}{l|ll} s^3 & 1 & K_i \\ s^2 & 4 & -6K_i \\ s^1 & \frac{4K_i+6K_i}{4} = \frac{10}{4}K_i & 0 \\ s^0 & -6K_i & \end{array} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{10}{4}K_i > 0 \\ -6K_i < 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{motstridigt} \\ \text{krav.} \end{array}$$

Går ej!

6. a) Med en P-regulator $F(s) = K_p$ kan vi flytta amplitudkurvan så att vi kan stabilisera systemet. Ur bodediagrammet får vi att vid fasvridningen -180° är amplituden ca $4 \text{ dB} = 1,58$

Om P-regulatorn har förstärkningen $\frac{1}{1,58}$ så kommer slutna systemet att vara stabilt. Eftersom en P-regulator inte påverkar fasen, så kan vi direkt designa en regulator.

För fasmarginen 40° så gäller processen ska fasvridda -140° och detta sker vi ca $0,8 \text{ rad/s}$.

Ur bodediagrammet får vi att förstärkningen (amplituden) måste sänkas till 0 dB , ty $|L(j0,8)| = 1$ (0 dB), vid $0,8 \text{ rad/s}$. Detta åstadkommes genom att väljs

$$K_p = \frac{1}{|G_j(0,8)|} = \frac{1}{8 \text{ dB}} = \frac{1}{2,51} \approx \underline{\underline{0,39}}$$

b) Ur bodediagrammet ser vi att för låga frekvenser går $L(j\omega) \rightarrow \infty$ då $\omega \rightarrow 0$

$$\text{Kvarstående felet } e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \dots$$

$$= \frac{1}{1 + L(0)} = \underline{\underline{0}}$$

7.

$$a) \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 1] x$$

Slutna systemets poler ges som $\det(sI - (A - BL)) = 0$ vid tillståndsåterkoppling.

$$(sI - (A - BL)) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} [l_1 \quad l_2] =$$

$$= \begin{bmatrix} [s+2 & -1] \\ [1 & s-4] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3l_1 & 3l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 1+3l_1 & s-4+3l_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - (A - BL)) = (s+2)(s-4+3l_2) + 1+3l_1 = 0$$

$$s^2 + (3l_2 - 4 + 2)s + 1 + 3l_1 - 8 + 6l_2 = 0$$

stabilit om

$$3l_2 - 2 > 0 \quad \text{och} \quad 3l_1 + 6l_2 - 7 > 0$$

$$l_2 > \frac{2}{3} \quad l_1 > \frac{7+6l_2}{3}$$

$$b) \quad \text{Dubbelpol i } -2 \Rightarrow (s+2)^2 = s^2 + 4s + 4$$

Identifiering av koefficienter ger

$$3l_2 - 2 = 4 \Rightarrow \underline{l_2 = 2}$$

$$3l_1 + 6l_2 - 7 = 4 \Rightarrow 3l_1 = 11 - 6l_2 \Rightarrow \underline{l_1 = -\frac{1}{3}}$$

$$c) \quad K_r = \frac{1}{C(-A + BL)^{-1}B} =$$

$$C(-A+BL)^{-1}B = [0 \ 1] \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} -2 & 1 \\ -1 & 4 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 0 \end{array} \right]^{-1} \end{array} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

$$= [0 \ 1] \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{18}{18} =$$

$$= \frac{-6}{18} = -\frac{1}{3}$$

$$K_r = \frac{1}{-\frac{1}{3}} = \underline{\underline{-3}}$$