CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för signaler och system
Reglerteknik, automation och mekatronik

ERE 102 Reglerteknik D
Tentamen 2015-04-15

14.00 – 18.00 V

Examinator: Bo Egardt, tel 3721.

Tillåtna hjälpmedel:

- Typgodkänd räknare
- Mathematics Handbook (Beta)
- Physics Handbook
- Formelblad (bilagd tentatesen)

Poängberäkning: Tentamen består av 5 uppgifter om totalt 30 poäng. Nominella betygsgränser är 12 (3), 18 (4) respektive 24 (5) poäng. Lösningarna skall vara tydliga och väl motiverade!

Tentamensresultat: Granskning av rättningen erbjuds den 29 april – tid och plats kommer att anslås på PingPong. Kommer du senare mottages endast skriftliga klagomål mot rättningen. Sådana skriftliga klagomål måste lämnas in **senast två veckor** efter ordinarie granskning.

LYCKA TILL!

Uppgift 1.

a. I ett återkopplat reglersystem för positionering av en satellit ges det slutna systemets överföringsfunktion från börvärde till ärvärde av

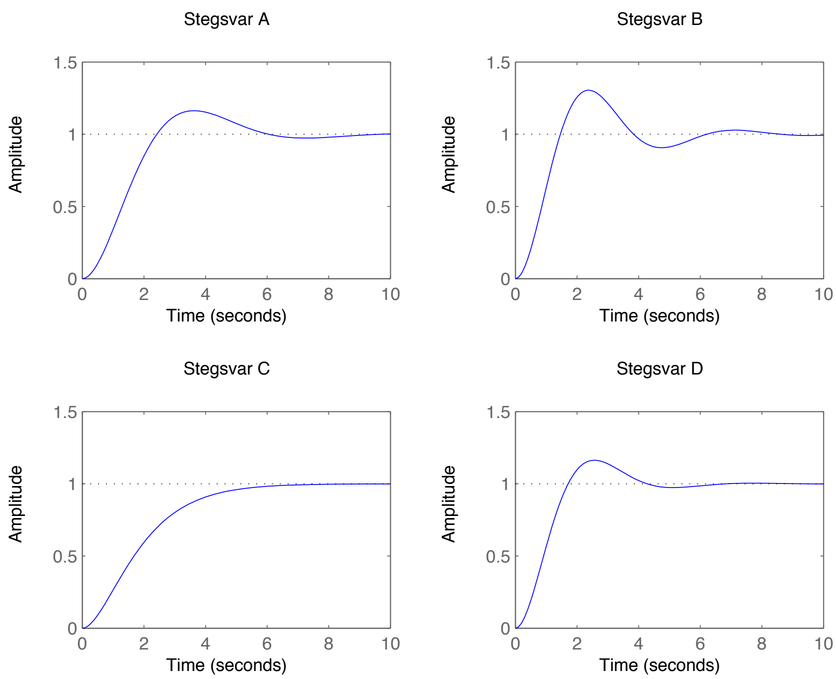
$$G_c(s) = \frac{K_p}{s^2 + K_d s + K_p}$$

där K_p och K_d är regulatorns parametrar. I figur A nedan visas det slutna systemets stegsvar för $K_p = 1$, $K_d = 1$. Avgör vilket av stegsvaren B, C eller D som visar resultatet av följande parameterändingar:

(1) $K_p = 2$, $K_d = 1$

(2) $K_p = 1$, $K_d = 2$

OBS! Motivering krävs!



(2 p)

b. Ett dynamiskt system med insignalen u och utsignalen y beskrivs av differentialekvationen

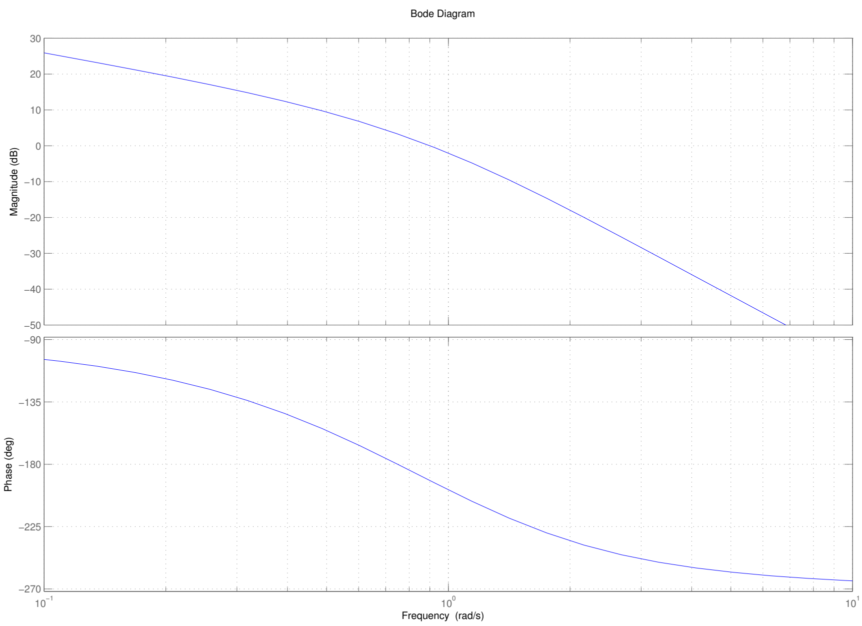
$$\dot{y}(t) + \sin y(t) = \cos u(t)$$

Linjärisera differentialekvationen kring den stationära lösning som ges av $u = y = \pi/4$ och bestäm det linjäriserade systemets överföringsfunktion från insignal till utsignal. (2 p)

c. Bestäm den överföringsfunktion, som asymptotiskt, då $\omega \to 0$, approximerar överföringsfunktionen $G(s)$ nedan, och avgör för vilken frekvens den approximativa överföringsfunktionen har förstärkningen 0 dB. (2 p)

$$G(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{s+1}{s^2+2s}$$

d. En PI-regulator har dimensionerats för att användas i återkopplad reglering av en stabil process. Resultatet av dimensioneringen syns i Bode-diagrammet nedan, som visar kretsförstärkningens egenskaper. Avgör dels om det ingår en ren integration i processens dynamik, dels om det återkopplade systemet är stabilt. Glöm inte att motivera ditt svar! (2 p)



e. Ett andra ordningens system beskrivet av

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 2y(t) = u(t)$$

återkopplas med en P-regulator $u(t) = K(r(t) - y(t))$, där $r(t)$ är börvärdet. För vilka värden på K kommer $y(t)$ alltid att vara begränsad då $r(t)$ är begränsad? (2 p)

Lösning:

Uppgift 2.
En process har överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{2(1-s)}{s(1+s)^2}$$

Bestäm parametrarna för en PD-regulator

$$F_{PD}(s) = K_p \frac{1 + s\tau_d}{1 + s\tau_d/b}$$

som ger en fasmarginal på 60° vid en skärfrekvens (överkorsningsfrekvens) $\omega_c = 0.4$ rad/s. (4 p)

Lösning:

Uppgift 3.
En vattentankprocess liknande den som används i laborationerna beskrivs av en olinjär differentialekvation. Man kan dock linjärisera den olinjära modellen kring en stationär arbetspunkt, vilket leder till en linjär modell

$$Y(s) = \frac{1}{s+\alpha} U(s) \tag{1}$$

där $U(s)$ och $Y(s)$ betecknar avvikelsen i insignal respektive utsignal från den stationära punkten. Parametern α beror bl a på valet av arbetspunkt.

a. Antag att den linjära modellen (1) styrs med PI-återkopplingen

$$U(s) = (K_p + K_i \frac{1}{s})(R(s) - Y(s)).$$

Ange det återkopplade systemets karakteristiska ekvation. (1 p)

b. Anta att $\alpha = 0.03$ för en arbetspunkt, som svarar mot en låg nivå i tanken. Bestäm koefficienterna K_p och K_i, så att det återkopplade systemets poler placeras i -0.04. (2 p)

c. Antag att återkopplingen som beräknades i (b) används vid en annan arbetspunkt med en hög nivå i tanken, motsvarande $\alpha = 0.01$. Var hamnar det återkopplade systemets poler? Gör även en uppskattning av vilken översläng stegsvaret får vid den höga nivån.

(2 p)

Lösning:

Uppgift 4.

Ett mekaniskt system består av en massa, vars läge $y(t)$ påverkas av såväl en fjäderkraft och en friktionskraft som av en yttre kraft $u(t)$. Systemet beskrivs av differentialekvationen

$$m\ddot{y}(t) = u(t) - ky(t) - b\dot{y}(t)$$

där $y(t)$ betecknar massans position och $y(t) = 0$ anger massans viloläge då $u(t) = 0$. Konstanterna m, k och b betecknar massa, fjäderkonstant respektive friktionskoefficient. Vi antar att $m = k = 1$.

a. Inför tillståndsvariablerna $x_1(t) = y(t)$ och $x_2(t) = \dot{y}(t)$. Verifiera att systemet beskrivs på tillståndsform av modellen

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -b \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}$$

(1 p)

b. Antag att $b = 0.5$. Bestäm en positionsreglering i form av en tillståndsåterkoppling på formen

$$u(t) = -L_u x(t) + K_r r(t)$$

sådan att det återkopplade systemets poler placeras i -2.
Ledning: I detta steg behöver du bara bestämma L_u. (2 p)

c. Antag att man lägger på en referenssignal i form av ett steg med amplituden ett. Vad blir utsignalen $y(t)$ när massan ställt in sig i sin nya position? Vad är ett lämpligt värde på K_r? (2 p)

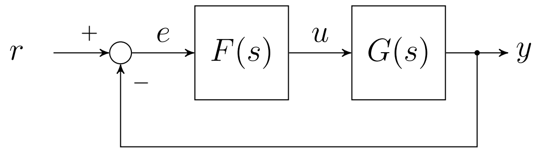
Lösning:

Uppgift 5.
Vi skall i denna uppgift studera det enkelt återkopplade systemet enligt figuren nedan, där processens överföringsfunktion ges av

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

och regulatorn är en PI-regulator med överföringsfunktionen

$$F(s) = K \cdot \frac{s+1}{s}, \quad K > 0$$



a. Ange bandbredden för det återkopplade systemet som funktion av förstärkningen K. (1 p)

b. Antag att referenssignalen är sinusformad, dvs $r(t) = \sin \omega t$. Ange ett villkor på K för att förstärkningen från referenssignalen $r(t)$ till styrsignalen $u(t)$ skall vara mindre än ett för alla ω. (2 p)

c. Antag återigen att $r(t) = \sin \omega t$. Ange ett villkor på K för att förstärkningen från referenssignalen $r(t)$ till styrsignalens derivata $\dot{u}(t)$ skall vara mindre än ett för alla ω i intervallet $0 \leq \omega \leq 10$. (3 p)

Lösning:

SLUT!

Lösningsförslag

1. (a) Det slutna systemet är av typen $\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ med nominella värden (stegsvar A) $\omega_n = 1$ och $\zeta = 1/2$. Parameterändringarna ger i fall (1) en ökning av ω_n och en minskning av ζ, dvs stegsvaret blir snabbare men mer oscillativt, alltså enligt diagram B. I fall (2) ökas ζ medan ω_n är oförändrat jämfört med det nominella fallet, dvs enligt diagram C (i detta fallet fås två reella poler, dvs det blir ingen översläng).

   (b) Linjärisering ger

   $$\Delta\dot{y}(t) + \cos\pi/4 \cdot \Delta y(t) = -\sin\pi/4 \cdot \Delta u(t)$$

   vilket efter Laplace-transformering ger överföringsfunktionen

   $$\frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)} = -\frac{1/\sqrt{2}}{s+1/\sqrt{2}}$$

   (c) Gör liknämnigt och approximera:

   $$G(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{s+1}{s^2+2s} = \frac{-1}{s(s+1)(s+2)} \approx \frac{-1}{2s},$$

   där approximationen gäller för små ω. Förstärkningen för denna är 1 (eller 0 dB) för $\omega = 0.5$.

   (d) Lågfrekvensasymptoten lutar -20 dB per dekad, vilket svarar mot PI-regulatorns I-del, dvs processen har ingen integration. Eftersom processen är stabil, så kan det förenklade Nyquistkriteriet användas: systemet är instabilt, eftersom fasmarginalen är negativ.

   (e) Kretsöverföringen blir $L(s) = \frac{K}{s^2+s-2}$, dvs det återkopplade systemet har överföringsfunktionen

   $$T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{K}{s^2+s+K-2}$$

   Polerna ges av den karakteristiska ekvationen $s^2+s+K-2=0$, som har lösningar i vänstra halvplanet då alla koefficienter är positiva (alternativt: lös ut rötterna!). Det sökta stabilitetsvillkoret är alltså $K > 2$.

2. Vid den önskade skärfrekvensen gäller att $\arg G(i\omega_c) = -\pi/2 - 3\arctan 0.4 = -155°$, så att fasen måste lyftas 35°. Om max faslyft $\varphi_{max} = 35°$ görs vid $\omega = \omega_c$, så följer enl formelbladet att b kan väljas som

$$b = \frac{1 + \sin \varphi_{max}}{1 - \sin \varphi_{max}} \approx 3.7$$

Max faslyft sker vid "mittfrekvensen" $\sqrt{b}/T$, som skall vara lika med ω_c, vilket ger $T \approx 4.8$.
Kvar återstår att bestämma K_p, som bestäms ur villkoret att kretsöverföringen skall ha förstärkning 1 vid $\omega = \omega_c$:

$$|G(i \cdot 0.4)| \cdot K_p \frac{|1 + i\sqrt{b}|}{|1 + i/\sqrt{b}|} = 1$$

vilket ger $K_p \approx 0.11$. Regulatorn blir alltså:

$$F_{PD}(s) = 0.11 \frac{1 + 4.8s}{1 + 1.3s}$$

3. (a) Det återkopplade systemets överföringsfunktion blir med sedvanliga beteckningar

$$G_c(s) = \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)} = \frac{K_p s + K_i}{s(s + \alpha) + K_p s + K_i}$$

dvs den karakteristiska ekvationen är $s^2 + (K_p + \alpha)s + K_i = 0$.

(b) Med $\alpha = 0.03$ och den sökta polplaceringen får vi designekvationen

$$s^2 + (K_p + 0.03)s + K_i = (s + 0.04)^2 = s^2 + 0.08s + 0.0016$$

vilket ger $K_p = 0.05$ och $K_i = 0.0016$.

(c) Med de valda regulatorparametrarna fås med $\alpha = 0.01$ det karakteristiska polynomet

$$s^2 + (K_p + \alpha)s + K_i = s^2 + 0.06s + 0.0016 = s^2 + 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 0.04 + (0.04)^2$$

Polerna blir alltså nu komplexa, $s \approx -0.03 \pm 0.0265i$, och av det sista uttrycket framgår att den relativa dämpningen blir $\zeta = \frac{3}{4}$. Av formelbladet framgår att överslängen ges av uttrycket $M = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \approx 0.03 = 3\%$.

4. (a) Med de valda tillståndsvariablerna fås $\dot{x}_1 = x_2$ och $\dot{x}_2 = -k/m \cdot x_1 - b/m \cdot x_2 + 1/m \cdot u = -x_1 - b \cdot x_2 + u$. På vektorform blir detta den givna modellen

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -b \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

(b) Med de vanliga beteckningarna beskrivs det återkopplade systemet av

$$\dot{x}(t) = (A - BL_u)x(t) + BK_r r(t)$$

med

$$A - BL_u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - l_1 & -b - l_2 \end{bmatrix}$$

och med $b = 0.5$ blir därmed det karakteristiska polynomet $\det(sI - (A - BL_u)) = s(s + l_2 + 0.5) + l_1 + 1$. Slutna systemets önskade karakteristiska polynom är $(s + 2)^2 = s^2 + 4s + 4$, vilket uppnås med valen $l_1 = 3$ och $l_2 = 3.5$.

(c) Det slutna systemet är

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ K_r \end{bmatrix} r(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Med $r(t) = 1$ fås stationärt (då $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$) att $x_2 = 0$ och $y = x_1 = K_r/4$. Med $K_r = 4$ fås alltså inget stationärt fel.

5. (a) Det återkopplade systemets överföringsfunktion är

$$G_c(s) = \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)} = \frac{K}{s + K}$$

Bandbredden ω_b ges av

$$\frac{|G(i\omega_b)|}{|G(0)|} = \frac{K}{\sqrt{\omega_b^2 + K^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

vilket ger $\omega_b = K$.

(b) Överföringsfunktionen från referens till styrsignal är

$$G_{ru} = \frac{F(s)}{1 + F(s)G(s)} = K\frac{s + 1}{s + K}$$

och kravet att förstärkningen för sinussignaler skall vara mindre än ett ger

$$|G_{ru}(i\omega)| = K\frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{K^2+\omega^2}} = \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{1+(\omega/K)^2}} < 1$$

dvs $K < 1$.

(c) Överföringsfunktionen från referens till styrsignalens derivata är

$$G_{ru} = \frac{sF(s)}{1+F(s)G(s)} = K\frac{s(s+1)}{s+K}$$

och kravet på förstärkningen ger

$$|G_{rud}(i\omega)| = K\frac{\omega\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{K^2+\omega^2}} = \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{1/\omega^2+1/K^2}} < 1, \quad 0 < \omega < 10$$

Det framgår att täljaren växer och nämnaren avtar med ökande ω, dvs förstärkningen ökar med ω. Därför är kravet för $\omega = 10$ bestämmande och vi får villkoret

$$\frac{\sqrt{1+10^2}}{\sqrt{1/10^2+1/K^2}} < 1,$$

dvs approximativt $K < 0.1$ (K positivt enligt uppgiftens formulering).