CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för signaler och system
Reglerteknik, automation och mekatronik

ERE 102 Reglerteknik D
Tentamen 2015-01-13

08.30 – 12.30 M

Examinator: Bo Egardt, tel 3721.

Tillåtna hjälpmedel:

- Typgodkänd räknare
- Mathematics Handbook (Beta)
- Physics Handbook
- Formelblad (bilagd tentatesen)

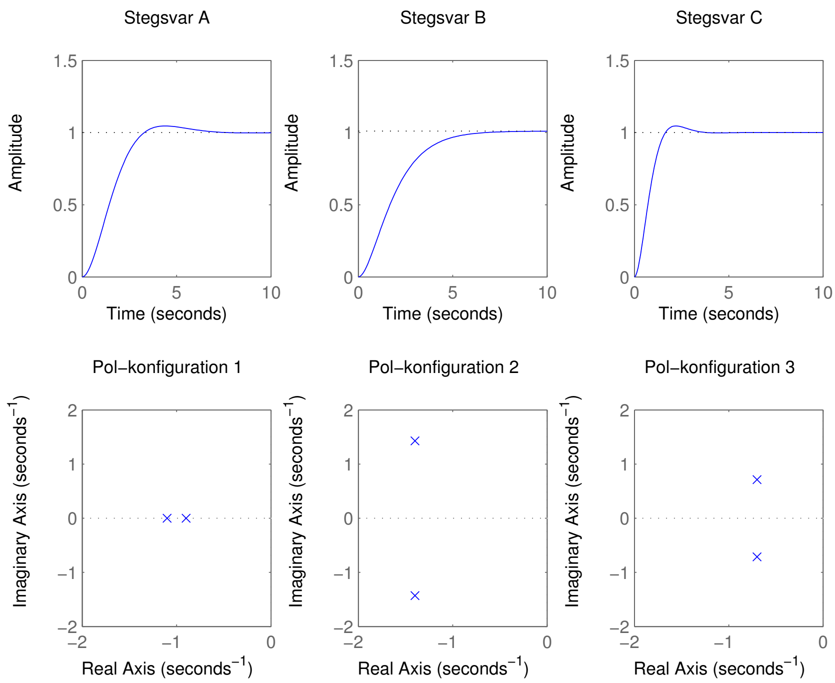
Poängberäkning: Tentamen består av 5 uppgifter om totalt 30 poäng. Nominella betygsgränser är 12 (3), 18 (4) respektive 24 (5) poäng. Lösningarna skall vara tydliga och väl motiverade!

Tentamensresultat: Granskning av rättningen erbjuds den 27 januari kl 11.00 – 12.00 i Oskar Wigströms rum på plan 5. Kommer du senare mottages endast skriftliga klagomål mot rättningen. Sådana skriftliga klagomål måste lämnas in **senast två veckor** efter ordinarie granskning.

LYCKA TILL!

Uppgift 1.

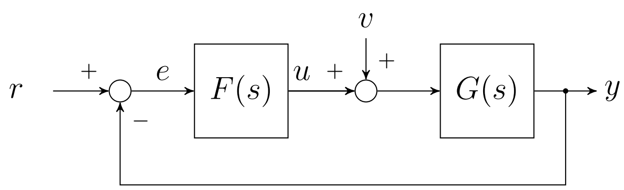
a. Figuren nedan visar stegsvar och pol-konfigurationer för tre olika system. Para ihop de figurer som hör ihop, dvs beskriver samma system—och glöm inte att motivera ditt svar! (2 p)



b. En process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2+s+1}$$

återkopplas med en P-regulator enligt nedan.

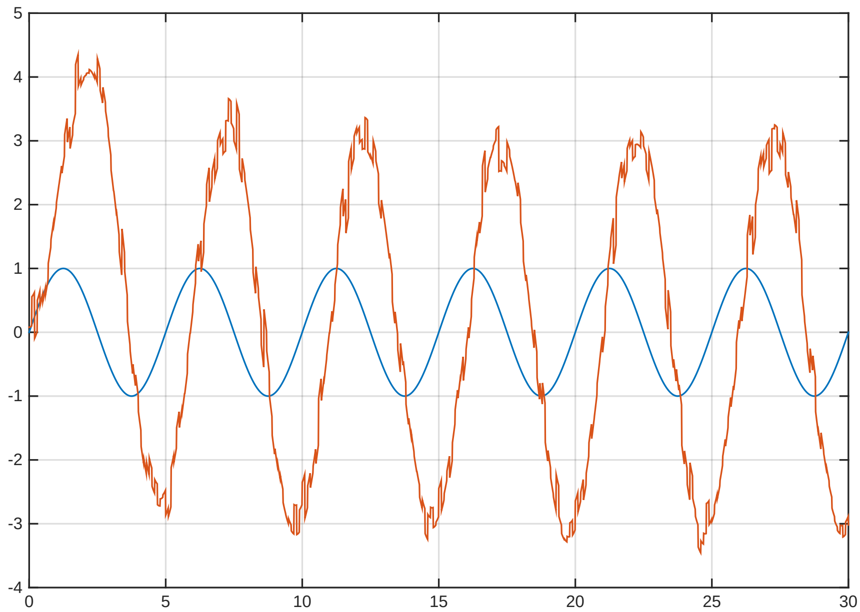


Stegstörningen v ger ett bidrag till processens utsignal y. Hur mycket dämpas detta bidrag stationärt (jämfört med open loop) då återkopplingskretsen sluts med $F(s) = K = 2$? (2 p)

c. Hur stor är fasförskjutningen för mycket höga frekvenser ($\omega \to \infty$) för systemet med överföringsfunktionen $G(s)$ nedan? (2 p)

$$G(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{s+1}{s^2+2s+2}$$

d. En frekvensanalys har genomförts på en process med resultatet nedan. I figuren visas insignalen $u(t)$ och utsignalen $y(t)$, den senare uppmätt med mätbrus. Anta att processen kan beskrivas som ett första ordningens system utan dödtid. Bestäm förstärkning och tidskonstant (approximativt). (2 p)

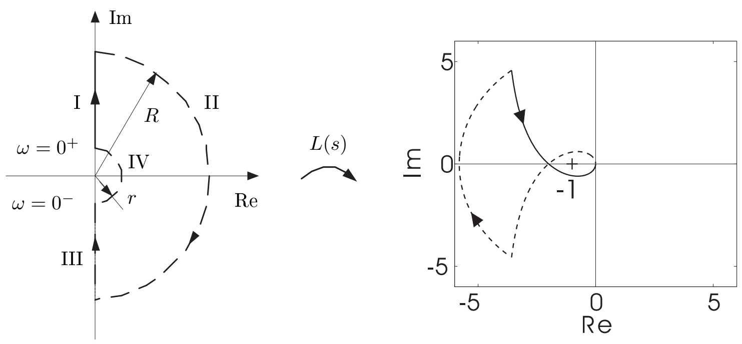


e. Ett andra ordningens system beskrivet av

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 2y(t) = u(t)$$

återkopplas med en P-regulator $u(t) = K(r(t) - y(t))$, där $r(t)$ är börvärdet. För vilka värden på K kommer $y(t)$ alltid att vara begränsad då $r(t)$ är begränsad? (2 p)

Uppgift 2.
Ett enkelt återkopplat system har en kretsöverföring $L(s)$ med två poler, varav en ligger strikt i höger halvplan. Man vet också att $L(s)$ har minst ett nollställe och att detta ligger strikt i vänster halvplan. Figuren nedan visar till vänster Nyquists kontur, som omsluter höger halvplan då $R \to \infty$ och $r \to 0$. Till höger ses avbildningen $L(s)$ då s följer Nyquists kontur medurs.



a. Figuren till höger är förenklad. I själva verket börjar själva Nyquist-kurvan (kurvdel I) i oändligheten med argumentet $-\frac{3}{2}\pi$. Visa hur man kan sluta sig till att kretsöverföringen ges av

$$L(s) = \frac{s+b}{s(s-a)} \quad a > 0, b > 0$$

(3 p)

b. Avgör om det slutna systemet är stabilt. (2 p)

Uppgift 3.
En process har överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{2(1-s)}{s(1+s)^2}$$

a. Skissa systemets frekvenskurva $G(i\omega), \omega \in [0, \infty)$ i ett Nyquistdiagram och motivera speciellt hur du kommer fram till beteendet för mycket låga resp. höga frekvenser. (3 p)

b. Bestäm parametrarna för en PD-regulator

$$F_{PD}(s) = K_p \frac{1 + s\tau_d}{1 + s\tau_d/b}$$

som ger en fasmarginal på 60° vid en skärfrekvens (överkorsningsfrekvens) $\omega_c = 0.4$ rad/s. (3 p)

Uppgift 4.
Ett system beskrivs av differentialekvationerna

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + u(t),
\end{aligned}
$$

där som vanligt $u(t)$ är styrsignalen och utsignalen ges av $y(t) = x_1(t)$. Systemet skall regleras med tillståndsåterkoppling enligt

$$u(t) = -Lx(t) + K_r r(t),$$

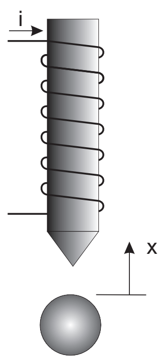
där $x(t) = [x_1(t)\ x_2(t)]^T$ och $r(t)$ är en referenssignal.

a. Visa att alla återkopplingsvektorer L med positiva element ger ett stabilt slutet system. (2 p)

b. Anta att man vill att det slutna systemets dynamik skall bestämmas av den relativa dämpningen ζ och den naturliga (odämpade) egenfrekvensen ω_n. Beräkna L som funktion av ζ och ω_n. (1 p)

c. Bestäm för det L som bestämdes i (b) förstärkningen K_r så att utsignalen stationärt är lika med referenssignalen. (2 p)

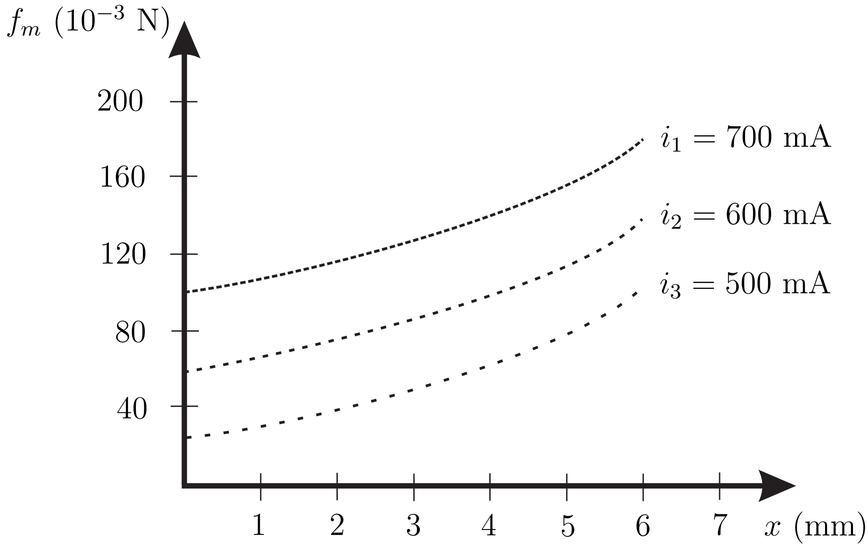
Uppgift 5.
Traditionella kullager kan förbättras genom att kombinera magnetism och reglerteknik. Genom att styra magnetfältet runt en roterande axel, så kan man se till att axeln aldrig vidrör magnetlagret, och på detta sätt blir axelfriktionen försumbar. I denna uppgift skall vi studera en förenklad variant av detta problem, där det går ut på att få en metallkula att sväva på en viss höjd genom att reglera magnetfältet som påverkar kulan, se figuren nedan.



Kulans rörelse beskrivs med hjälp av Newton's kraftlag enligt

$$m\ddot{x} = f_m(x, i) - mg,$$

där kraften f_m orsakas av magnetfältet, som i sin tur bestäms av strömmen i och "luftgapet" x mellan kula och magnet.
I figuren nedan visas resultatet från experiment med denna uppställning. Man ser hur kraften f_m beror på avståndet x för tre olika strömmar i_1, i_2 och i_3.



Med hjälp av de uppmätta kurvorna kan man bestämma en approximativ, linjär modell runt en arbetspunkt (x_0, i_0) för hur kraften f_m beror av avståndet $x = x_0 + \Delta x$ och strömmen $i = i_0 + \Delta i$:

$$f_m(x_0 + \Delta x, i_0 + \Delta i) \approx f_m(x_0, i_0) + c_x \Delta x + c_i \Delta i$$

a. Beräkna en jämviktspunkt för kulan för fallet $i_0 = 600$ mA, då kulan väger $8.4 \cdot 10^{-3}$ kg. (1 p)

b. Bestäm en approximativ linjär modell runt jämviktspunkten. Är modellen stabil? (3 p)

OBS! Numeriska värden behöver bara vara ungefärliga, men räkningarna skall vara tydliga och väl motiverade!

SLUT!

Lösningsförslag

1. (a) Två reella poler ger ett väldämpat stegsvar, dvs B-1. Stegsvaren A och C har samma dämpning, men det snabbare C har poler längre från origo, alltså A-3, C-2.

   (b) I open loop gäller $Y(s) = G(s)V(s)$ och i closed-loop $Y(s) = G(s)/(1+F(s)G(s))V(s)$, dvs i stationaritet dämpas bidraget med faktorn $1/(1 + F(0)G(0)) = 1/5$.

   (c) Gör först liknämnigt för att få $G(s)$ som en rationell funktion:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

   För höga frekvenser uppför sig denna som $1/\omega^3$ med fasförskjutningen $-3 \cdot 90° = -270°$.

   (d) Följande kan utläsas av registreringen (ungefärliga siffror):

   - Periodtid c:a 5 s, vilket svarar mot $\omega \approx 2\pi/5 = 0.4\pi$ rad/s.
   - Tidsförskjutning på c:a 1 s, vilket svarar mot en fasförskjutning $\varphi \approx \frac{1}{5} \cdot 2\pi = 0.4\pi$ rad.
   - Förstärkning på c:a 3.

   För ett första ordningens system $G(s) = K/(1 + sT)$ ges förstärkning och fasförskjutning vid frekvensen ω av:

$$|G(i\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}, \qquad \arg G(i\omega) = -\arctan \omega T$$

   Då kan K och T bestämmas:

$$\arg G(i\omega) = -\arctan \omega T \approx -0.4\pi \Rightarrow T = \tan(0.4\pi)/(0.4\pi) \approx 2.4$$

$$|G(i\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} \approx 3 \Rightarrow K \approx 3\sqrt{1+(\tan 0.4\pi)^2} \approx 9.7$$

   (e) Kretsöverföringen blir $L(s) = \frac{K}{s^2+s-2}$, dvs det återkopplade systemet har överföringsfunktionen

$$T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{K}{s^2+s+K-2}$$

   Polerna ges av den karakteristiska ekvationen $s^2 + s + K - 2 = 0$, som har lösningar i vänstra halvplanet då alla koefficienter är positiva (alternativt: lös ut rötterna!). Det sökta stabilitetsvillkoret är alltså $K > 2$.

2. (a) Av figuren framgår att $|L(i\omega)| \to 0, \omega \to \infty$, vilket säger att antalet nollställen är mindre än antalet poler, dvs det finns bara ett (stabilt) nollställe. Dessutom framgår av uppgiften att $|L(i\omega)| \to \infty, \omega \to 0$, dvs $L(s)$ måste ha en integrator. Alltså ges $L(s)$ av

$$L(s) = \frac{s+b}{s(s+a)}, \quad a > 0, b > 0$$

(b) Enligt det fullständiga Nyquistkriteriet ges antalet instabila poler för det slutna systemet, Z, av $Z = P + N$, där P är antalet instabila poler för det öppna systemet, här $P = 1$, och N är antalet varv kurvan till höger i figuren omsluter -1, räknat medurs. I detta fallet omsluts -1 ett varv *moturs*, dvs $N = -1$. Alltså fås $Z = 1 - 1 = 0$ och det slutna systemet är stabilt.

3. (a) Belopp och fas ges av

$$|G(i\omega)| = \frac{2\sqrt{1+\omega^2}}{\omega(1+\omega^2)} = \frac{2}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}$$
$$\arg G(i\omega) = -\arctan\omega - \pi/2 - 2\arctan\omega = -\pi/2 - 3\arctan\omega$$

Nyquistkurvan börjar alltså i oändligheten med fasen $-\pi/2$. Därefter avtar såväl belopp som fas monotont, så att kurvan för höga frekvenser närmar sig origo med en fas på $-\pi/2 - 3 \cdot \pi/2 = -2\pi$.

(b) Vid den önskade skärfrekvensen gäller att $\arg G(i\omega_c) = -\pi/2 - 3\arctan 0.4 = -155°$, så att fasen måste lyftas 35°. Om max faslyft $\varphi_{max} = 35°$ görs vid $\omega = \omega_c$, så följer enl formelbladet att b kan väljas som

$$b = \frac{1+\sin\varphi_{max}}{1-\sin\varphi_{max}} \approx 3.7$$

Max faslyft sker vid "mittfrekvensen" $\sqrt{b}/T$, som skall vara lika med ω_c, vilket ger $T \approx 4.8$.
Kvar återstår att bestämma K_p, som bestäms ur villkoret att kretsöverföringen skall ha förstärkning 1 vid $\omega = \omega_c$:

$$|G(i \cdot 0.4)| \cdot K_p \frac{|1+i\sqrt{b}|}{|1+i/\sqrt{b}|} = 1$$

vilket ger $K_p \approx 0.11$. Regulatorn blir alltså:

$$F_{PD}(s) = 0.11\frac{1+4.8s}{1+1.3s}$$

4. (a) Med vektor/matris-notation är tillståndsmodellen

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) = Cx(t)$$

Med tillståndsåterkoppling ges systemmatrisen får det återkopplade systemet av

$$A - BL = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -l_1 & -1 - l_2 \end{bmatrix}$$

vilket ger det karakteristiska polynomet

$$\det(sI - (A - BL)) = s(s + 1 + l_2) + l_1 = s^2 + (1 + l_2)s + l_1$$

För stabilitet krävs att koefficienterna i det karakteristiska polynomet är positiva, vilket är uppfyllt för $l_1 > 0$ och $l_2 > -1$, och därmed för alla positiva l_1, l_2.

(b) Identifiering av koefficienter för den karakteristiska ekvationen

$$s^2 + (1 + l_2)s + l_1 = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

ger $l_1 = \omega_n^2$ och $l_2 = 2\zeta\omega_n - 1$.

(c) Det slutna systemets överföringsfunktion är

$$G_{ry} = K_r \cdot C(sI - (A - BL))^{-1}B$$
$$= \frac{K_r}{s^2 + (1 + l_2)s + l_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + 1 + l_2 & 1 \\ -l_1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{K_r}{s^2 + (1 + l_2)s + l_1}$$

Villkoret i stationaritet uppfylls genom att sätta $G_{ry}(0) = 1$, vilket ger $K_r = l_1 = \omega_n^2$.

5. (a) I jämvikt gäller

$$f_m(x_0, i_0) = mg \approx 82 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

vilket enligt kurvan för i_2 svarar mot $x_0 \approx 3$ mm.

(b) Ur diagrammet kan linjäriseringen fås approximativt enligt följande. Tangenten till i_2-kurvan har lutningen c_x, som kan bestämmas ur två punkter, t ex

$$c_x = \frac{\partial f_m}{\partial x} \approx \frac{(100 - 50) \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-3}} = 10$$

Konstanten c_i bestäms av hur f_m varierar med i för $x = x_0$:

$$c_i = \frac{\partial f_m}{\partial i} \approx \frac{40 \cdot 10^{-3}}{100 \cdot 10^{-3}} = 0.4$$

Den linjäriserade modellen är alltså

$$m\ddot{\Delta x} = 10\Delta x + 0.4\Delta i$$

Modellens karakteristiska ekvation är $ms^2 - 10 = 0$ med en positiv och en negativ reell rot, dvs modellen är instabil.