CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för signaler och system
Reglerteknik, automation och mekatronik

ERE 102 Reglerteknik D
Tentamen 2014-08-21

14.00 – 18.00 V

Examinator: Bo Egardt, tel 3721.

Tillåtna hjälpmedel:

- Typgodkänd räknare
- Mathematics Handbook (Beta)
- Physics Handbook
- Formelblad (bilagd tentatesen)

Poängberäkning: Tentamen består av 5 uppgifter om totalt 30 poäng. Nominella betygsgränser är 12 (3), 18 (4) respektive 24 (5) poäng. Lösningarna skall vara tydliga och väl motiverade!

Tentamensresultat: Granskning av rättningen erbjuds den 4 september kl 11.00 – 12.00 i rum 5435A. Kommer du senare mottages endast skriftliga klagomål mot rättningen. Sådana skriftliga klagomål måste lämnas in **senast två veckor** efter ordinarie granskning.

LYCKA TILL!

Uppgift 1.

a. Vid ett experiment mäts impulssvaret för ett system upp med följande resultat:

$$g(t) = e^{-0.5t}\big(1 + \cos 0.5t\big)$$

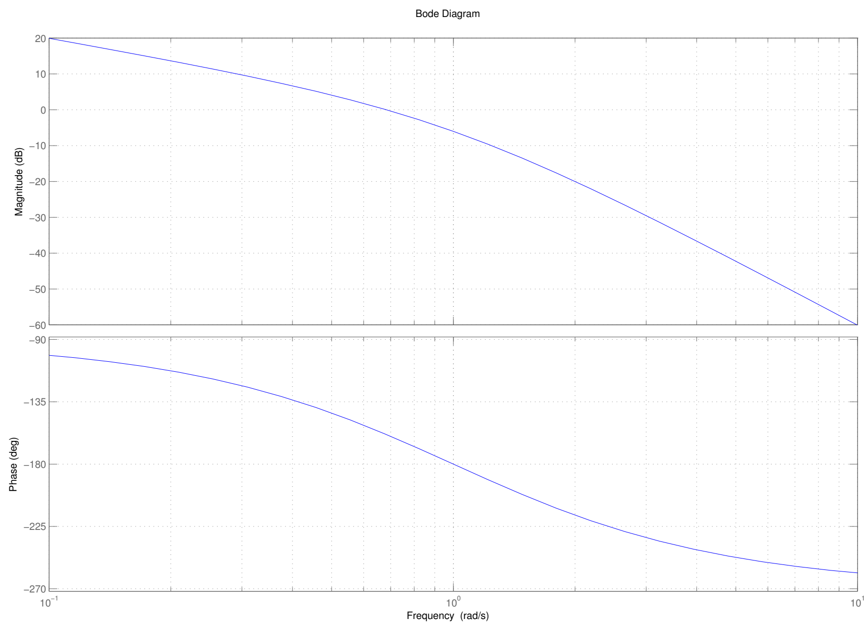
Vilken är systemets statiska förstärkning? (2 p)

b. Ett dynamiskt system med insignalen u och utsignalen y beskrivs av differentialekvationen

$$10\dot{y}(t) + y^2(t) = u(t)$$

Linjärisera differentialekvationen kring de stationära lösningarna som fås för den konstanta insignalen $u = 1$ och bestäm motsvarande överföringsfunktion(er) från insignal till utsignal. (2 p)

c. Figuren nedan visar **kretsförstärkningen** för en reglerkrets. En sinusformad mätstörning med frekvensen $\omega = 3$ rad/s påverkar mätningen som används för återkopplingen. Hur mycket av denna mätstörning slår igenom i processens utsignal? Ett approximativt värde räcker! (2 p)



d. Ett system, som beskrivs av tillståndsmodellen nedan, återkopplas med styrlagen $u(t) = r(t) - 2x_1(t) - 6x_2(t)$, där $r(t)$ är en referenssignal. Bestäm det slutna systemets poler.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

(2 p)

e. I ett återkopplat reglersystem för positionering av en satellit ges det slutna systemets överföringsfunktion från börvärde till ärvärde av

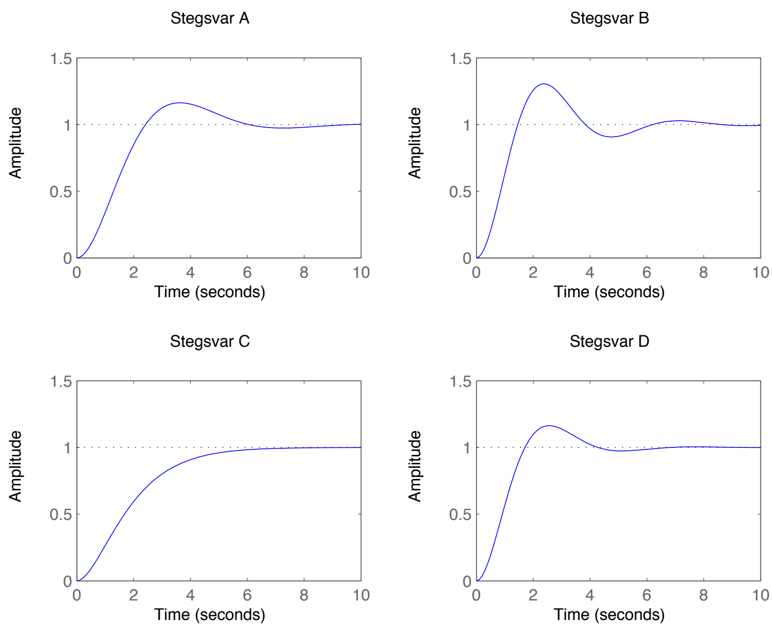
$$G_c(s) = \frac{K_p}{s^2 + K_d s + K_p}$$

där K_p och K_d är regulatorns parametrar. I figur A nedan visas det slutna systemets stegsvar för $K_p = 1$, $K_d = 1$. Avgör vilket av stegsvaren B, C eller D som visar resultatet av följande parameterändringar:

(1) $K_p = 2,\ K_d = 1$

(2) $K_p = 2,\ K_d = \sqrt{2}$

OBS! Motivering krävs! (2 p)

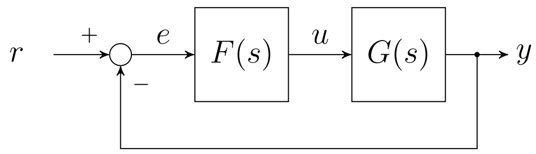


Uppgift 2.

En process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$$

återkopplas med en P-regulator $F(s) = K > 0$ enligt nedan.

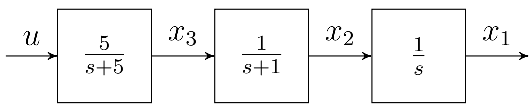


a. För vilka värden på K är det slutna systemet stabilt? (2 p)

b. Vad blir det kvarstående felet då r är ett steg med amplituden 10 och $K = 4$? (2 p)

c. Vilka blir det slutna systemets poler då $K \to \infty$?
Ledning: För små x gäller att $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$. (2 p)

Uppgift 3.
Ett positioneringssystem för en satellitantenn skall styras med återkoppling. Positioneringssystemet, som visas i blockschemat nedan, består av en motor med växellåda som roterar antennen och på så sätt riktar in den mot den aktuella satelliten.
Utsignalen från regulatorn är u som är en spänning. Spänningen styr en motor, som ger ett vridmoment x_3. Vridmomentet påverkar antennens rotationshastighet x_2, som sedan ger en position x_1.



a. Ställ upp en tillståndsmodell för systemet. (2 p)

b. Bestäm en tillståndsåterkoppling, som ger det slutna systemet en pol i $p_1 = -10$ samt två komplexkonjugerade poler i $p_{2,3} = -1 \pm i$. (3 p)
Ledning: För en 3×3 matris ges determinanten av

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Uppgift 4.
En regulator skall dimensioneras för en process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{e^{-s}}{s(s+1)}$$

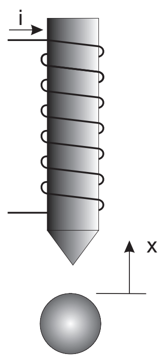
Följande specifikationer gäller:

- Fasmarginalen skall uppfylla villkoret $\varphi_m \geq 30°$
- Överkorsningsfrekvensen skall uppfylla $\omega_c \geq 1$ rad/s.

a. Vilken regulatortyp är lämplig för att lösa uppgiften? (1 p)

b. Dimensionera en regulator som uppfyller specifikationerna! (4 p)

Uppgift 5.
Traditionella kullager kan förbättras genom att kombinera magnetism och reglerteknik. Genom att styra magnetfältet runt en roterande axel, så kan man se till att axeln aldrig vidrör magnetlagret, och på detta sätt blir axelfriktionen försumbar. I denna uppgift skall vi studera en förenklad variant av detta problem, där det går ut på att få en metallkula att sväva på en viss höjd genom att reglera magnetfältet som påverkar kulan, se figuren nedan.

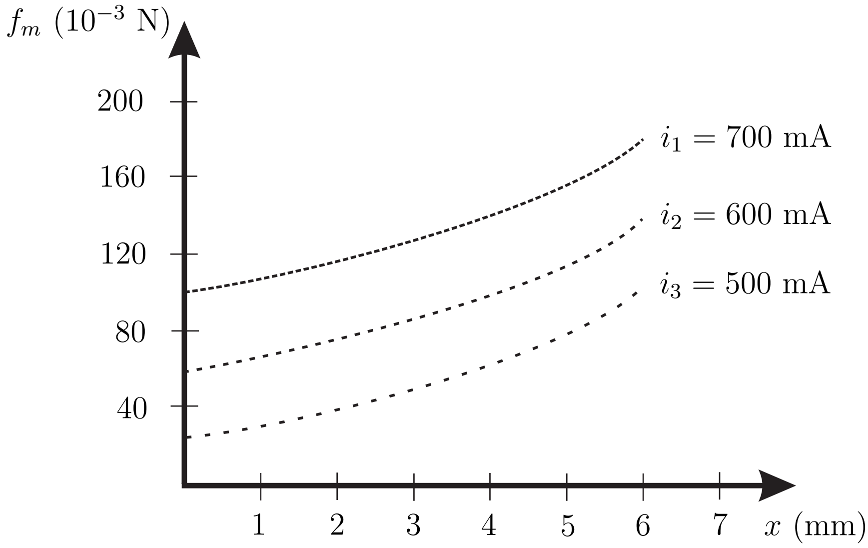


Kulans rörelse beskrivs med hjälp av Newton's kraftlag enligt

$$m\ddot{x} = f_m(x,i) - mg,$$

där kraften f_m orsakas av magnetfältet, som i sin tur bestäms av strömmen i och "luftgapet" x mellan kula och magnet.

I figuren nedan visas resultatet från experiment med denna uppställning. Man ser hur kraften f_m beror på avståndet x för tre olika strömmar i_1, i_2 och i_3.



Med hjälp av de uppmätta kurvorna kan man bestämma en approximativ, linjär modell runt en arbetspunkt (x_0, i_0) för hur kraften f_m beror av avståndet $x = x_0 + \Delta x$ och strömmen $i = i_0 + \Delta i$:

$$f_m(x_0 + \Delta x, i_0 + \Delta i) \approx f_m(x_0, i_0) + c_x \Delta x + c_i \Delta i$$

a. Beräkna en jämviktspunkt för kulan för fallet $i_0 = 600$ mA, då kulan väger $8.4 \cdot 10^{-3}$ kg. (1 p)

b. Bestäm en approximativ linjär modell runt jämviktspunkten. Är modellen stabil? (3 p)

OBS! Numeriska värden behöver bara vara ungefärliga, men räkningarna skall vara tydliga och väl motiverade!

SLUT!

Lösningsförslag

1. (a) Impulssvaret ger efter L-transformering $G(s) = \frac{1}{s+0.5} + \frac{s+0.5}{(s+0.5)^2+0.5^2}$ med statiska förstärkningen $G(0) = 2 + 1 = 3$.

   (b) De stationära lösningarna fås genom att sätta $u = u_0 = 1$ och $\dot{y} = 0$, vilket ger två lösningar: $y_0 = 1$ respektive $y_0 = -1$. Den linjäriserade diff-ekvationen blir, uttryckt i avvikelser från de stationära värdena: $10\dot{\Delta y} + 2y_0\Delta y = \Delta u$. Laplacetransformering ger motsvarande överföringsfunktioner:

$$G_1(s) = \frac{1}{10s+2} \qquad G_{-1}(s) = \frac{1}{10s-2}$$

   (c) Figuren ger $|L(i \cdot 3)| \approx -30dB \approx 0.03$ och dessutom gäller $|T| \approx |L|$ i detta frekvensområde. Mätstörningen dämpas alltså ungefär en faktor 30.

   (d) Det återkopplade systemet blir

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -6 & -9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

   med det karakteristiska polynomet

$$\begin{vmatrix} \lambda+6 & 9 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+6) + 9 = (\lambda+3)^2$$

   dvs det slutna systemet har en dubbelpol i -3.

   (e) Det slutna systemet är av typen $\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ med nominella värden (stegsvar A) $\omega_n = 1$ och $\zeta = 1/2$. Parameterändringarna ger i fall (1) en ökning av ω_n och en minskning av ζ, dvs stegsvaret blir snabbare men mer oscillativt, alltså enligt diagram B. I fall (2) ökas ω_n medan ζ är oförändrat jämfört med det nominella fallet. Detta ger alltså ett snabbare stegsvar med oförändrad dämpning, dvs enligt diagram D.

2. (a) Den karakteristiska ekvationen ges av

$$s^2 + s + 1 + K(s+1) = s^2 + (K+1)s + (K+1) = 0$$

   med lösningen

$$s = -\frac{K+1}{2} \pm \sqrt{(\frac{K+1}{2})^2 - (K+1)} \qquad (1)$$

För små K fås ett stabilt, komplexkonjugerat polpar. För ökande K fås så småningom två reella poler, men eftersom beloppet av den andra termen i (**??**) alltid är mindre än beloppet av den första termen, så blir båda polerna negativa, dvs stabila. Systemet är alltså stabilt för alla $K > 0$.

(b) Eftersom det slutna systemet är stabilt, så kan det kvarstående felet beräknas med användning av slutvärdessatsen:

$$e_\infty = (1/(1 + KG(0)) \cdot 10 = 2$$

(c) Använd lösningen i (a) för att approximera för stora K:

$$s = -\frac{K+1}{2} \pm \sqrt{(\frac{K+1}{2})^2 - (K+1)} = -\frac{K+1}{2} \pm \sqrt{(\frac{K-1}{2})^2 - 1}$$
$$\approx -\frac{K+1}{2} \pm \frac{K-1}{2}\big(1 - \frac{1}{2}(\frac{2}{K-1})^2\big)$$

som asymptotiskt ($K \to \infty$) ger de två polerna $s = -K$ och $s = -1$. Notera att den senare sammanfaller med det öppna systemets nollställe!

3. (a) Tillståndsmodellen blir:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -5x_3 + 5u \end{aligned}$$

(b) Efter tillståndsåterkoppling fås systemmatrisen

$$A - BL = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -5l_1 & -5l_2 & -5 - 5l_3 \end{bmatrix}$$

som ger det karakteristiska polynomet $\det(sI - A + BL) = s^3 + (6 + 5l_3)s^2 + (5 + 5l_3 + 5l_2)s + 5l_1$, vilket skall vara lika med det specificerade, nämligen $(s+10)((s+1)^2+1) = s^3+12s^2+22s+20$. Detta ger $l_1 = 4, l_2 = 2.2, l_3 = 1.2$.

4. (a) Eftersom $\arg G(i \cdot 1) \approx -192°$, så följer att fasen måste lyftas vid ω_c. Alltså är det lämpligt att använda en fasvancerande länk eller en PD-regulator.

(b) Använd t ex en PD-regulator på formen

$$F(s) = K_p \frac{1 + sT}{1 + sT/b}$$

Låt $\omega_c = 1$. Enligt a) följer då att fasen måste lyftas $\varphi_{max} = 42°$ och om max faslyft görs vid $\omega = \omega_c$, så följer enl formelbladet att b kan väljas som

$$b = \frac{1 + \sin \varphi_{max}}{1 - \sin \varphi_{max}} \approx 5$$

Max faslyft sker vid "mittfrekvensen" $\sqrt{b}/T$, som skall vara lika med ω_c, vilket ger $T = \sqrt{5}$.
Kvar återstår att bestämma K_p, som bestäms ur villkoret att kretsöverföringen skall ha förstärkning 1 vid $\omega = \omega_c$:

$$|G(i \cdot 1)| \cdot K_p \frac{|1 + i\sqrt{5}|}{|1 + i/\sqrt{5}|} = 1$$

vilket ger $K_p = \sqrt{2}/\sqrt{5}$. Regulatorn blir alltså:

$$F(s) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \frac{1 + s\sqrt{5}}{1 + s/\sqrt{5}}$$

5. (a) I jämvikt gäller

$$f_m(x_0, i_0) = mg \approx 82 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

vilket enligt kurvan för i_2 svarar mot $x_0 \approx 3$ mm.

(b) Ur diagrammet kan linjäriseringen fås approximativt enligt följande. Tangenten till i_2-kurvan har lutningen c_x, som kan bestämmas ur två punkter, t ex

$$c_x = \frac{\partial f_m}{\partial x} \approx \frac{(100 - 50) \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-3}} = 10$$

Konstanten c_i bestäms av hur f_m varierar med i för $x = x_0$:

$$c_i = \frac{\partial f_m}{\partial i} \approx \frac{40 \cdot 10^{-3}}{100 \cdot 10^{-3}} = 0.4$$

Den linjäriserade modellen är alltså

$$m\ddot{\Delta x} = 10\Delta x + 0.4\Delta i$$

Modellens karakteristiska ekvation är $ms^2 - 10 = 0$ med en positiv och en negativ reell rot, dvs modellen är instabil.