CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för signaler och system
Reglerteknik, automation och mekatronik

ERE 102 Reglerteknik D
Tentamen 2014-04-24

14.00 – 18.00 M

Examinator: Bo Egardt, tel 3721.

Tillåtna hjälpmedel:

- Typgodkänd räknare
- Mathematics Handbook (Beta)
- Physics Handbook
- Formelblad (bilagd tentatesen)

Poängberäkning: Tentamen består av 5 uppgifter om totalt 30 poäng. Nominella betygsgränser är 12 (3), 18 (4) respektive 24 (5) poäng. Lösningarna skall vara tydliga och väl motiverade!

Tentamensresultat: Granskning av rättningen erbjuds den 8 maj kl 11.00 – 12.00. Kommer du senare mottages endast skriftliga klagomål mot rättningen. Sådana skriftliga klagomål måste lämnas in **senast två veckor** efter ordinarie granskning.

LYCKA TILL!

Uppgift 1.

a. Ett andra ordningens system beskrivs av differentialekvationen

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = u(t-1)$$

där som vanligt u är insignal och y utsignal. Bestäm systemets stegsvar. (2 p)

b. Ett system, som beskrivs av tillståndsmodellen nedan, har en långsam och en snabb pol. Bestäm en tillståndsåterkoppling, som lämnar den snabba polen oförändrad och flyttar den långsamma polen till samma läge som den snabba.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

(3 p)

c. Beräkna överföringsfunktionen $\frac{Y(s)}{R(s)}$ för det återkopplade reglersystemet nedan. För vilka värden på K är systemet stabilt? (2 p)

d. Konstruera ett digitalt högpassfilter med undre gränsfrekvensen 500 Hz genom att utgå från motsvarande analoga filter av Butterworth-typ av ordning 1. Använd Tustins (bilinjär) transformation och samplingsfrekvensen 10 kHz. OBS! Ingen hänsyn behöver tas till förvrängningen av frekvensskalan (frequency warping). (2 p)

Uppgift 2.

a. Vid ett experiment mäts impulssvaret för ett system upp med följande resultat:

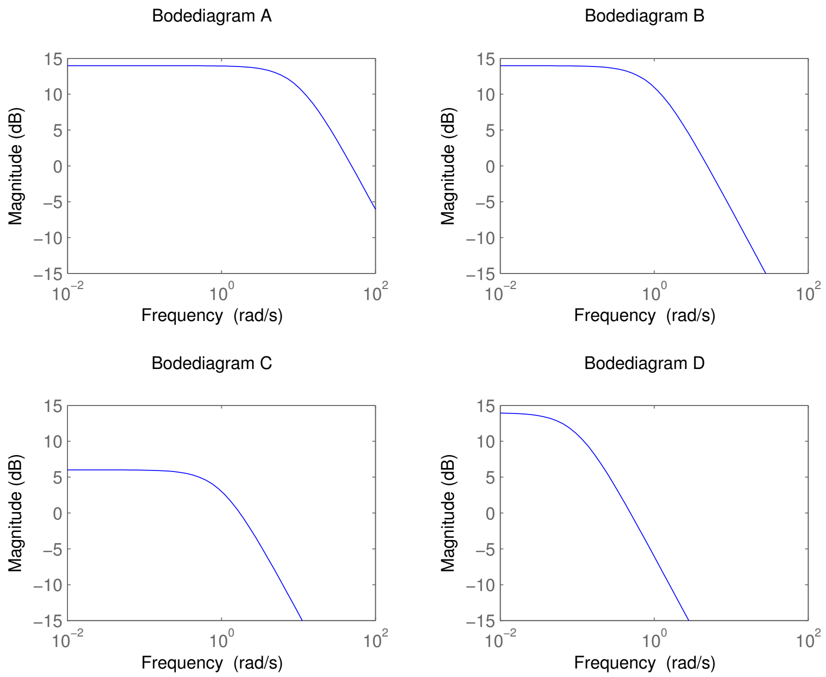
$$g(t) = e^{-0.5t}(1 + 2e^{-0.5t})$$

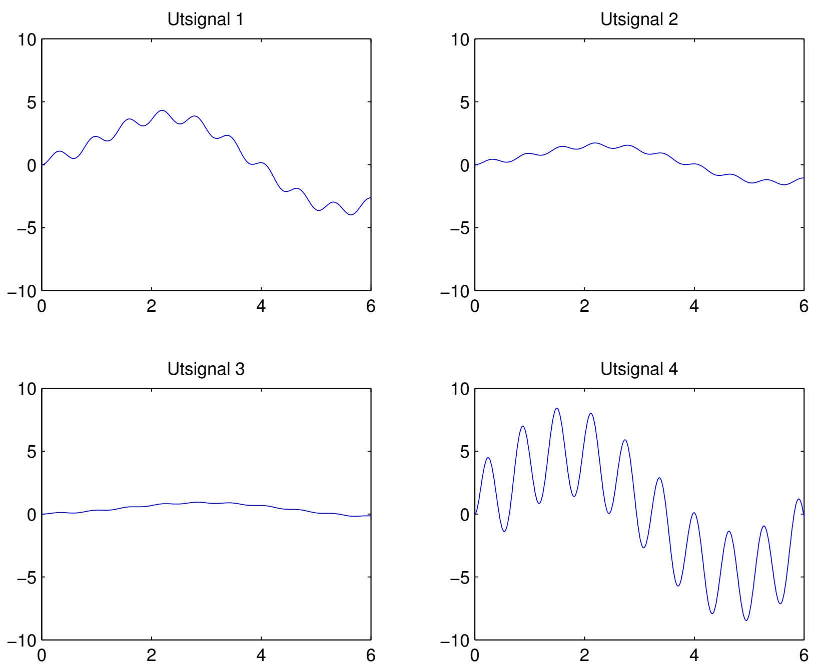
Vilken är systemets statiska förstärkning? (2 p)

b. Följande signal har använts som insignal till fyra olika stabila minimumfas-system:

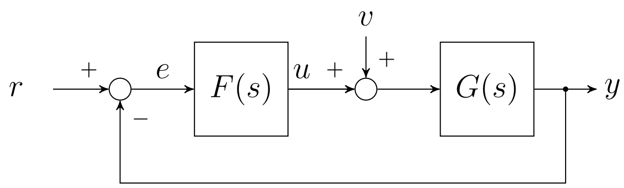
$$u(t) = \sin t + \sin 10t$$

Para med hjälp av figurerna på nästa sida ihop utsignalerna med respektive systems Bodediagram (amplituddelen).
OBS! Motivering krävs! (3 p)


Bodediagram A
Bodediagram B
Bodediagram C
Bodediagram D
Magnitude (dB)
Frequency (rad/s)
15
10
5
0
−5
−10
−15
10^{-2}
10^{0}
10^{2}


Utsignal 1
Utsignal 2
Utsignal 3
Utsignal 4
10
5
0
−5
−10
0
2
4
6

Uppgift 3.
Blockschemat nedan visar ett reglersystem, innehållande en process med överföringsfunktionen $G(s) = 1/(s+1)^2$ och en P-regulator med överföringsfunktionen $F(s) = K$. Processen påverkas av en sinusformad störning v med frekvensen 0,5 rad/s och amplituden 2,5.



a. Beräkna amplituden för den sinusformade komponenten i utsignalen, som orsakas av störningen, då ingen återkoppling används (dvs $K = 0$). (2 p)

b. Bestäm P-regulatorns förstärkning K så att fasmarginalen blir 50°. (2 p)

c. Hur stor blir nu amplituden för den sinusformade komponenten i utsignalen? (2 p)

Uppgift 4.
Ett återkopplat system är stabilt och har dessutom en stabil kretsöverföring. Anta att känslighetsfunktionen $S(i\omega)$ uppfyller följande krav:

$$|S(i\omega)| \leq 2$$

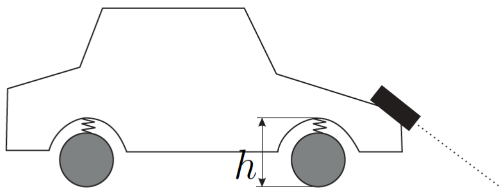
a. Vilken amplitudmarginal garanteras med villkoret på S? (2 p)

b. Vilken fasmarginal garanteras med villkoret på S?
Ledning: Cosinussatsen anger sambandet mellan längderna a, b och c i en triangel och den mot sidan c stående vinkeln γ:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

(3 p)

Uppgift 5.
Vi skall i denna uppgift studera ett aktivt stötdämparsystem för en bil. I detta system ersätts fjädrar och stötdämpare av ett hydraulservo, vars kraft styrs av en regulator, som mäter avståndet mellan kaross och marken och försöker hålla detta konstant kring referensvärdet (som sätts till 0).



Hydraulservot beskrivs av överföringsfunktionen

$$G_{\text{servo}}(s) = \frac{1}{s/10 + 1}$$

och bilens dynamik beskrivs av

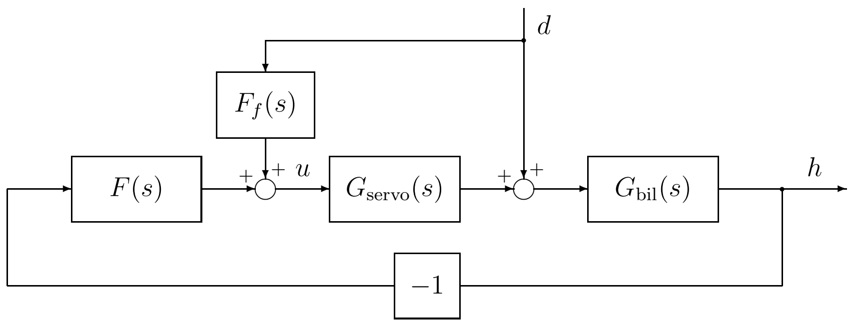
$$G_{\text{bil}}(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Regulatorn har överföringsfunktionen

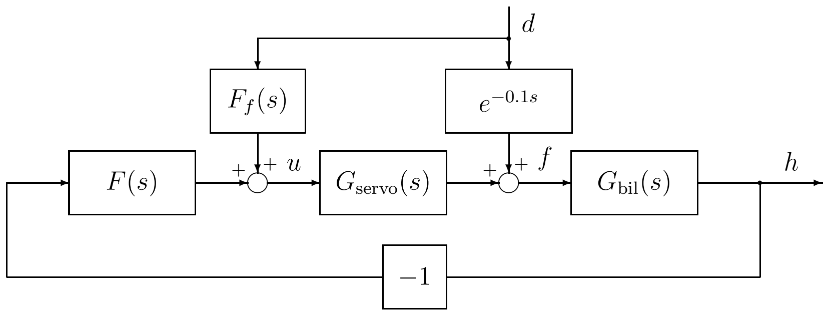
$$F(s) = 2\left(\frac{3}{s} + 1\right)$$

Slutligen kan vägens höjdförändringar ses som en laststörning d.

a. För att förbättra egenskaperna på ojämna vägar har en laseravståndsmätare installerats längst fram i bilen. På så sätt kan störningen d mätas innan den påverkar bilen, och vi kan använda denna mätning för en framkoppling $F_f(s)$ enligt blockschemat nedan. Hur skall $F_f(s)$ väljas så att störningen inte skall synas alls i utsignalen h? (2 p)



b. I själva verket fungerar lasermätningen så bra att den mäter störningen 0.1 s *innan* den påverkar bilen. Blockschemat förändras nu enligt nedan. Hur skall kompenseringen $F_f(s)$ ändras så att störningen d återigen inte slår igenom i utsignalen h? (1 p)



c. Anta samma situation som i (b) men att $F_f(s)$ förblir oförändrad från (a), dvs det kommer inte längre att vara en perfekt utsläckning av störningen. Visa att en störning med frekvensen $\omega = 10\pi$ i själva verket kommer att påverka bilen med dubbla amplituden jämfört med fallet utan framkoppling.
Ledning: Jämförelsen mellan de två fallen kan med fördel göras genom att bilda kvoten av motsvarande överföringsfunktioner. (2 p)

SLUT!

Lösningsförslag

1. (a) Laplacetransformering ger överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{e^{-s}}{s(s+1)}$$

Utan tidsfördröjningen ges stegsvaret av ($U(s) = 1/s$)

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

vilket i tidsplanet motsvarar

$$y(t) = t - 1 + e^{-t}, \quad t \geq 0 \quad (y(t) = 0,\ t < 0)$$

Med en tidsfördröjning på 1 s fås istället ($t \to t-1$)

$$y(t) = t - 2 + e^{-(t-1)}, \quad t \geq 1 \quad (y(t) = 0,\ t < 1)$$

(b) Beräkna först systemets egenvärden:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 4 & 3 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+4) + 3 = (\lambda+1)(\lambda+3)$$

dvs uppgiften är att med återkopplingen flytta polen -1 till -3, vilket ger ett önskat karakteristiskt polynom $(\lambda+3)^2 = \lambda^2 + 6\lambda + 9$:

$$\det(\lambda I - (A - BL)) = \begin{vmatrix} \lambda + 4 + l_1 & 3 + l_2 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + (4 + l_1)\lambda + 3 + l_2$$

Identifiering av koefficienter ger $l_1 = 2$ och $l_2 = 6$.

(c) Förenkla först det block som innehåller en inre återkoppling och framkoppling:

$$\frac{1/s}{1 + 4/s} - 0.1 = \frac{0.6 - 0.1s}{s+4}$$

Detta ger för hela systemet

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{0.6-0.1s}{s+4}\frac{K}{s}}{1 + \frac{0.6-0.1s}{s+4}\frac{K}{s}} = \frac{K(0.6 - 0.1s)}{s(s+4) + K(0.6 - 0.1s)} = \frac{K(0.6 - 0.1s)}{s^2 + (4 - 0.1K)s + 0.6K}$$

Lösning av karakteristiska ekvationen ger att det slutna systemet är stabilt precis då $0 < K < 40$ (kan ses direkt från villkoret att koefficienterna i det karakteristiska polynomet av grad 2 skall vara positiva).

(d) Det analoga HP-filtret ges av $H(s) = s/(s+\omega_c)$, där $\omega_c = 2\pi \cdot 500$. Tustins formel ger

$$H(z) = \frac{\frac{2}{h}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}{\frac{2}{h}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 2\pi \cdot 500} = \frac{2(z-1)}{2(z-1) + 1000\pi h(z+1)} \approx \frac{0.86(z-1)}{z-0.73}$$

2. (a) Impulssvaret $g(t) = e^{-0.5t} + 2e^{-t}$ ger efter Laplace-transformering

$$G(s) = \frac{1}{s+0.5} + \frac{2}{s+1},$$

som har den statiska förstärkningen $G(0) = 2 + 2 = 4$.

(b) Notera först att insignalen innehåller en kompenent med frekvensen $\omega = 1$ och en komponent med $\omega = 10$. Från Bodedigrammen ses att A och B har hög förstärkning för $\omega = 1$, dvs de svarar mot utsignalerna 1 och 4. Däremot har A mycket högre förstärkning för $\omega = 10$, och alltså kan vi para ihop A-4 och B-1. Det är också tydligt att frekvensen $\omega = 10$ slår igenom betydligt mer i utsignal 2 jämfört med nr 3, vilket förklaras av den högre förstärkningen vid $\omega = 10$ för C jämfört med D. Alltså: C-2 och D-3.

3. (a) Utsignalens amplitud blir

$$A_y = 2.5 \cdot |G(i\omega)| = \frac{2.5}{|1+0.5i|^2} = \frac{2.5}{1.25} = 2$$

(b) Fasmarginalen 50° ger

$$\arg KG(i\omega_c) = -2 \arctan \omega_c = -130^\circ \Rightarrow \omega_c = \tan 65^\circ = 2.14$$

och K kan bestämmas:

$$|KG(i\omega_c)| = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{|G(i\omega_c)|} = |1 + i\omega_c|^2 = 5.6$$

(c) Utsignalens amplitud blir nu

$$A_y = 2.5\left|\frac{G}{1+KG}\right| = \frac{2.5}{|(1+s)^2 + K|_{s=0.5i}} = \frac{2.5}{|1 + K - 0.5^2 + i|} \approx 0.39$$

4. Nyquists förenklade stabilitetskriterium gäller eftersom $L(s)$ är stabil. Alltså passerar $L(i\omega)$ till höger om den kritiska punkten $(-1, 0)$. Känslighetsfunktionen ges av $S(s) = 1/(1 + L(s))$, där $L(s)$ är kretsöverföringen, vilket ger

$$|S(i\omega)| \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad |1 + L(i\omega)| \geq 1/2$$

dvs avståndet från $L(i\omega)$ till punkten -1 är större än 0.5. Följande slutsatser kan då dras:

a. Nyquistkurvan korsar negativa realaxeln till höger om punkten $(-0.5, 0)$, vilket innebär att avståndet till origo är mindre än 0.5. Eftersom detta avstånd också är lika med $1/A_m$, så medför detta att amplitudmarginalen uppfyller $A_m \geq 2$.

b. Nyquistkurvan korsar enhetscirkeln i punkten $L(i\omega_\pi)$ med $|L(i\omega_\pi)| = 1$ på avståndet $c > 0.5$ till punkten -1. Från triangeln som bildas av punkterna $L(i\omega_\pi)$, -1 och origo fås med användningen av cosinussatsen och definitionen av fasmarginalen φ_m:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi_m = 2 - 2\cos\varphi_m \geq 1/4$$

vilket ger $\cos\varphi_m \leq 7/8$ eller $\varphi_m \geq \arccos 7/8 \approx 29^o$.

5. (a) Överföringsfunktionen från d till h blir

$$G_{dh}(s) = \frac{(1 + F_f(s)G_{\text{servo}}(s))G_{\text{bil}}(s)}{1 + F(s)G_{\text{servo}}(s)G_{\text{bil}}(s)}$$

dvs för att ingen påverkan på h skall fås, så bör kompenseringen väljas som

$$F_f(s) = -1/G_{\text{servo}}(s) = -(1 + s/10)$$

Detta är en stabil kompensering, men den innehåller en ren derivering.

(b) Överföringsfunktionen modifieras nu till

$$G_{dh}(s) = \frac{(e^{-0.1s} + F_f(s)G_{\text{servo}}(s))G_{\text{bil}}(s)}{1 + F(s)G_{\text{servo}}(s)G_{\text{bil}}(s)}$$

vilket ger en ändrad kompensering enligt

$$F_f(s) = -e^{-0.1s}/G_{\text{servo}}(s) = -e^{-0.1s}(1 + s/10)$$

Jämfört med (a) innebär detta bara en extra fördröjning av framkopplingen.

(c) Överföringsfunktionen från d till h är med framkopplingen från (a):

$$G_{dh}^{\text{ff}}(s) = \frac{(e^{-0.1s} + F_f(s)G_{\text{servo}}(s))G_{\text{bil}}(s)}{1 + F(s)G_{\text{servo}}(s)G_{\text{bil}}(s)} = \frac{(e^{-0.1s} - 1)G_{\text{bil}}(s)}{1 + F(s)G_{\text{servo}}(s)G_{\text{bil}}(s)}$$

medan motsvarande överföringsfunktion utan framkoppling är

$$G_{dh}(s) = \frac{e^{-0.1s} G_{\mathrm{bil}}(s)}{1 + F(s) G_{\mathrm{servo}}(s) G_{\mathrm{bil}}(s)}$$

Studera nu kvoten

$$Q(s) = \frac{G_{dh}^{\mathrm{ff}}(s)}{G_{dh}(s)} = \frac{e^{-0.1s} - 1}{e^{-0.1s}}$$

Det gäller att $|Q(i\omega)| = |e^{-i \cdot 0.1\omega} - 1| \leq 2$ och för $\omega = 10\pi$ fås

$$|Q(i \cdot 10\pi)| = |e^{-i\pi} - 1| = |-1 - 1| = 2$$

dvs denna störningsfrekvens slår igenom med dubbla amplituden med framkoppling jämfört med fallet utan framkoppling.