CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för signaler och system
Reglerteknik, automation och mekatronik

# ERE 102 Reglerteknik D
# Tentamen 2013-12-16

08.30 – 12.30 M

Examinator: Bo Egardt, tel 3721.

**Tillåtna hjälpmedel:**

- Typgodkänd räknare
- Beta
- Formelblad (bilagd tentatesen)

**Poängberäkning:** Tentamen består av 5 uppgifter om totalt 30 poäng. Nominella betygsgränser är 12 (3), 18 (4) respektive 24 (5) poäng. Lösningarna skall vara tydliga och väl motiverade!

**Tentamensresultat:** Granskning av rättningen erbjuds den 9 januari eller den 16 januari kl 11.00 – 12.00. Kommer du senare mottages endast skriftliga klagomål mot rättningen. Sådana skriftliga klagomål måste lämnas in **senast två veckor** efter ordinarie granskning.

LYCKA TILL!

**Uppgift 1.**

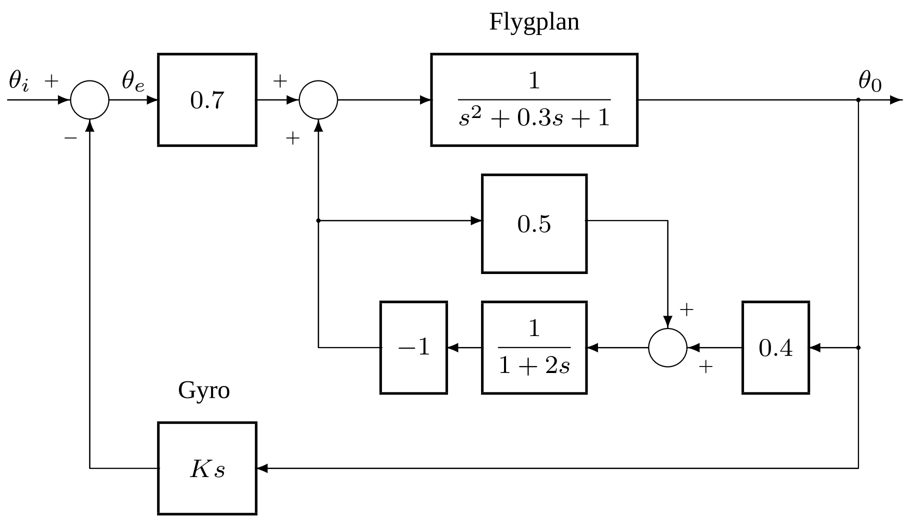
a. Vilka av följande system är insignal-utsignal-stabila? Motivera!

$$G_1(s) = \frac{s-3}{s^2+2s+6}$$
$$G_2(s) = \frac{s+3}{s^2+2s}$$

(2 p)

b. Figuren nedan visar ett blockdiagram för ett flygplan vid ett vindtunnelförsök. Insignalen $\theta_i$ är pilotens styrsignal och utsignalen $\theta_0$ är flygplanets attitydvinkel. Bestäm överföringsfunktionen från $\theta_i$ till $\theta_0$ *då gyroåterkopplingen faller bort*, dvs då $K = 0$.

(2 p)

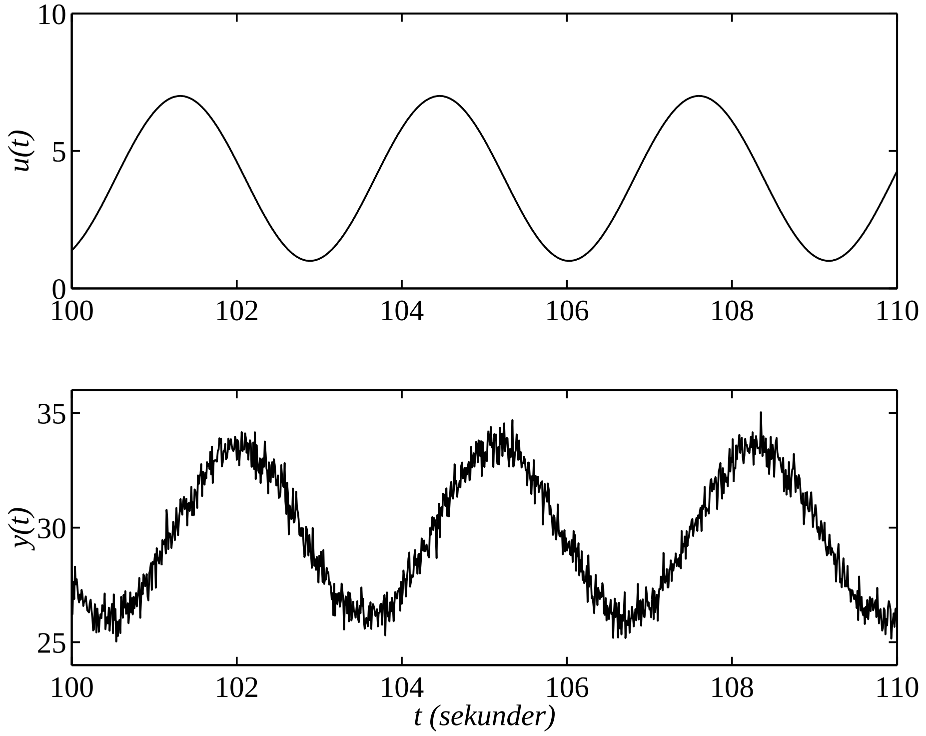



c. (OBS! Denna uppgift var försedd med ett tryckfel och stryks i rättningen. Uppgiften nedan korrigerad.)
Ett återkopplat system är stabilt och har dessutom en stabil kretsöverföring. Anta att känslighetsfunktionen $S(i\omega)$ uppfyller följande krav:

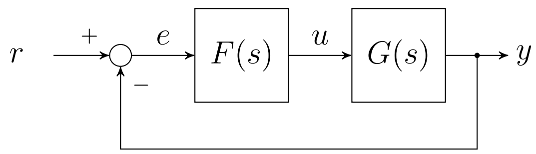
$$|S(i\omega)| \leq 2$$

Vilken amplitudmarginal garanterar detta? (3 p)

d. En frekvensanalys har genomförts på en process med resultatet nedan. I figuren visas insignalen $u(t)$ och utsignalen $y(t)$, den senare uppmätt med mätbrus. Anta att processen kan beskrivas som ett första ordningens system utan dödtid. Bestäm förstärkning och tidskonstant.
OBS! Bortse från offset i signalerna! (3 p)



**Uppgift 2.**
Blockschemat nedan visar ett återkopplat reglersystem med en process $G(s)$ och en regulator $F(s)$.




Processens överföringsfunktion ges av

$$G(s) = \frac{s-2}{(s+a)(s+b)}$$

och regulatorn är en P-regulator

$$F(s) = K \qquad (K > 0)$$

Stabiliteten för det återkopplade (slutna) systemet skall undersökas i ett par olika fall.

a. Anta att det slutna systemets karakteristiska ekvation skrivs som $s^2 + ps + q = 0$, där $p$ och $q$ är konstanter som i detta fallet beror på $a$, $b$ och $K$. Visa att det slutna systemet är stabilt precis då $p > 0$, $q > 0$. (2 p)

b. Anta att $a = b = -1$, vilket innebär att det öppna systemet är instabilt. Avgör om det går att stabilisera systemet med P-regulatorn. (1 p)

c. Anta att $a > 0$ och $b > 0$, dvs det öppna systemet är stabilt. Ge ett exempel på att detta inte garanterar att det slutna systemet är stabilt. Det räcker med att ge numeriska värden på $a$, $b$ och $K$, plus en motivering! (2 p)

**Uppgift 3.**
En obemannad undervattensfarkost drivs av en propeller, som i sin tur drivs av en elmotor. Sambandet mellan varvtalet $N$ (varv/minut) och motorns styrspänning $u$ (Volt) beskrivs av differentialekvationen

$$J\frac{dN(t)}{dt} + M(N(t)) = \frac{K_T}{R}\big(u(t) - K_E N(t)\big), \quad M(N) = K_G N^2$$

där $J$ är det totala tröghetsmomentet för propellern och elmotorns rotor, $R$ är resistansen i motorkretsen, och $K_T$ och $K_E$ är motorkonstanter. Det bromsande momentet ges av funktionen $M(N)$, som är kvadratisk i varvtalet.

a. Vilken konstant spänning $u_0$ krävs för att ge det konstanta varvtalet $N_0$? (1 p)

b. Linjärisera modellen kring arbetspunkten $(u_0, N_0)$ enligt (a). (2 p)

c. Vilken är den linjäriserade modellens tidskonstant? Hur beror denna på det valda varvtalet $N_0$? (2 p)

**Uppgift 4.**
Ett system som beskrivs av tillståndsmodellen

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

skall regleras med tillståndsåterkoppling enligt

$$u(t) = -L\mathbf{x}(t) + K_r r(t),$$

där $r(t)$ är en referenssignal.

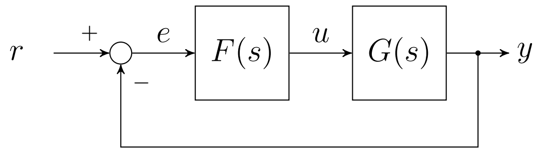
a. Bestäm återkopplingsvektorn $L$, så att det återkopplade systemet får en relativ dämpning $\zeta = 1/\sqrt{2}$ och en naturlig (odämpad) egenfrekvens $\omega_n = \sqrt{2}$. (3 p)

b. Bestäm förstärkningen $K_r$ så att utsignalen stationärt är lika med referenssignalen. (2 p)

**Uppgift 5.**
En process som beskrivs med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{s(s+4)}$$

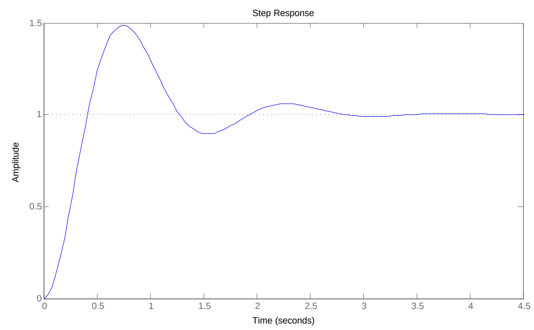
skall regleras enligt blockschemat nedan:




För att bl a eliminera kvarstående fel vid processtörningar, så har en kollega till dig designat en PI-regulator med syftet att få en skärfrekvens (överkorsningsfrekvens) $\omega_c = 4$ och tillräcklig fasmarginal. Så här blev resultatet:

$$F_1(s) = K_p(1 + \frac{1}{sT_i}), \qquad K_p = 22 \text{ och } T_i = 1$$

När denna regulator kopplas till processen (dvs $F(s) = F_1(s)$), så fås följande stegsvar (vid börvärdesändring), som har lite väl stor översläng:




a. Verifiera att skärfrekvensen är ungefär som avsett (dvs $\omega_c \approx 4$) och beräkna fasmarginalen $\varphi_m$. (2 p)

b. Föreslå hur du vill komplettera din kollegas design, så att skärfrekvensen bibehålls men fasmarginalen ökas till $\varphi_m = 50°$. Din regulator $F_2(s)$ skall alltså tillsammans med regulatorn $F_1(s)$ ge den totala regulatorn

$$F(s) = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

Genomför beräkningarna och ange överföringsfunktionen för den totala regulatorn.

(3 p)

SLUT!

## Lösningsförslag

1. (a) $G_1(s)$ är insignal-utsignal-stabilt, eftersom polerna ligger strikt i VHP $(-1 \pm i\sqrt{5})$.
   $G_2(s)$ är inte i-u-stabilt, eftersom den innehåller en integrator (ett steg som insignal ger en växande utsignal).

   (b) Överföringsfunktionen för återkopplingslänken är (om återkopplingen räknas som negativ):

   $$F(s) = 0.4\frac{1/(1+2s)}{1+0.5/(1+2s)} = \frac{0.2}{s+0.75}$$

   Den sökta överföringsfunktionen blir då

   $$\frac{\Theta_0(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{0.7/(s^2+0.3s+1)}{1+0.2/((s+0.75)(s^2+0.3s+1))} = \frac{0.7(s+0.75)}{s^3+1.05s^2+1.225s+0.95}$$

   (c) Nyquists förenklade stabilitetskriterium gäller eftersom $L(s)$ är stabil. Alltså passerar $L(i\omega)$ till höger om den kritiska punkten $(-1, 0)$. Känslighetsfunktionen ges av $S(s) = 1/(1+L(s))$, där $L(s)$ är kretsöverföringen, vilket ger

   $$|S(i\omega)| \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad |1+L(i\omega)| \geq 1/2$$

   dvs avståndet från $L(i\omega)$ till punkten -1 är större än 0.5. Alltså korsar kurvan negativa realaxeln till höger om punkten $(-0.5, 0)$, vilket innebär att amplitudmarginalen uppfyller $A_m \geq 2$.

   (d) Följande kan utläsas av registreringen (ungefärliga siffror):

   - Periodtid c:a 3.1 s, vilket svarar mot $\omega \approx 2\pi/3.1 \approx 2$.
   - Tidsförskjutning på c:a 0.7 s, vilket svarar mot en fasförskjutning $\varphi \approx \frac{0.7}{3.1} \cdot 2\pi \approx 1.4$ rad.
   - Förstärkning på c:a 1.1.

   För ett första ordningens system $G(s) = K/(1+sT)$ ges förstärkning och fasförskjutning vid frekvensen $\omega$ av:

   $$|G(i\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}, \qquad \arg G(i\omega) = -\arctan \omega T$$

   Då kan $K$ och $T$ bestämmas:

   $$\arg G(i\omega) = -\arctan \omega T = -1.4 \quad \Rightarrow \quad T = \tan(1.4)/2 \approx 2.9$$
   $$|G(i\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} = 1.1 \quad \Rightarrow \quad K \approx 5.9 \cdot 1.1 \approx 6.5$$

2. (a) Lösningen till den karakteristiska ekvationen kan skrivas

$$s = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$$

och tre fall kan särskiljas:

- Om $q < 0$, så fås två reella rötter med olika tecken.
- Om $0 < q < (\frac{p}{2})^2$, så fås två reella rötter med samma tecken, som är motsatt tecknet för $p$.
- Om $q > (\frac{p}{2})^2$, så fås två komplexkonjugerade rötter med realdel $-\frac{p}{2}$.

Eftersom systemet är stabilt precis då rötterna till den karakteristiska ekvationen har negativ realdel, så är slutsaten att systemet är stabilt precis då $p > 0$ och $q > 0$.

(b) Den karakteristiska ekvationen för det slutna systemet är

$$(s + a)(s + b) + K(s - 2) = s^2 + (a + b + K)s + ab - 2K = 0$$

dvs villkoret för stabilitet då $a = b = -1$ blir $K - 2 > 0$ och $1 - 2K > 0$, eller $K > 2$ och $K < 1/2$, vilket är omöjligt att uppfylla.

(c) Det öppna systemet är nu stabilt, dvs $a > 0$ och $b > 0$. Vi söker alltså värden på $a > 0$, $b > 0$ och $K > 0$, som uppfyller att antingen $a + b + K < 0$ (vilket är omöjligt) eller $ab - 2K < 0$. Det finns många sådana val, som uppfyller det andra villkoret, t ex $a = b = K = 1$.

3. (a) Vid stationaritet fås villkoret

$$K_G N_0^2 = \frac{K_T}{R}\big(u_0 - K_E N_0\big) \quad \Rightarrow \quad u_0 = K_E N_0 + \frac{RK_G}{K_T} N_0^2$$

(b) Med $\Delta N = N - N_0$, $\Delta u = u - u_0$ fås linjäriseringen enligt

$$J\frac{d\Delta N(t)}{dt} + \big(2K_G N_0 + \frac{K_T K_E}{R}\big)\Delta N(t) = \frac{K_T}{R}\Delta u(t)$$

(c) Tidskonstanten ges enligt ovan av

$$T = \frac{J}{2K_G N_0 + \frac{K_T K_E}{R}}$$

dvs minskar med ökande varvtal.

4. (a) Kraven på relativ dämpning och naturlig egenfrekvens innebär att det karakteristiska polynomet för det slutna systemet är

$$s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2 = s^2 + 2\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = s^2 + 2s + 2$$

Med tillståndsåterkoppling ges systemmatrisen får det återkopplade systemet av

$$A - BL = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & 1 + l_2 \\ -l_1 & -l_2 \end{bmatrix}$$

vilket ger det karakteristiska polynomet

$$\det(sI - (A - BL)) = (s - l_1)(s + l_2) + l_1(1 + l_2) = s^2 + (l_2 - l_1)s + l_1$$

Identifiering av koefficienter ger $l_1 = 2$ och $l_2 = 4$.

(b) Det slutna systemets överföringsfunktion är

$$\begin{aligned} G_{ry} &= K_r \cdot C(sI - (A - BL)^{-1}B \\ &= \frac{K_r}{s^2 + 2s + 2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + l_2 & 1 + l_2 \\ -l_1 & s - l_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{K_r(1 - s)}{s^2 + 2s + 2} \end{aligned}$$

Villkoret i stationaritet uppfylls genom att sätta $G_{ry}(0) = 1$, vilket ger $K_r = 2$.

5. (a) Beräkna kretsöverföringens förstärkning vid $\omega = 4$:

$$|L(i{\cdot}4)| = |F_1(i{\cdot}4)|{\cdot}|G(i{\cdot}4)| = K_p \frac{\sqrt{1 + (4T_i)^2}}{4T_i} \cdot \frac{1}{4\sqrt{4^2 + 4^2}} \approx 1.002$$

dvs vi kan dra slutsatsen att $\omega_c \approx 4$. Fasmarginalen kan då beräknas (observera att $G$s brytfrekvens är precis 4):

$$\begin{aligned} \varphi_m &\approx 180^\circ + \arg F_1(i \cdot 4) + \arg G(i \cdot 4) \\ &= 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ - 90^\circ + \arctan(4T_i) \\ &= \arctan 4 - 45^\circ \approx 31^\circ \end{aligned}$$

(b) Fasen behöver alltså höjas c:a $50^\circ - 31^\circ = 19^\circ$, och detta kan göras med en PD-regulator

$$F_2(s) = K_2 \frac{1 + \tau_d s}{1 + \tau_d s / b}$$

Med $\varphi_{max} = 19^\circ$ fås värdet på $b$:

$$b = \frac{1 + \sin \varphi_{max}}{1 - \sin \varphi_{max}} \approx 1.97$$

Max faslyft placeras vid $\omega = 4$ fås genom att välja $\sqrt{b}/\tau_d = 4$, vilket ger $\tau_d \approx 0.35$. Slutligen justeras förstärkningen, så att skärfrekvensen bibehålls:

$$|F_2(i \cdot 4)| = 1 \quad \Rightarrow \quad K_2 = \frac{\sqrt{1 + (\frac{4\tau_d}{b})^2}}{\sqrt{1 + (4\tau_d)^2}} \approx 0.71$$

Den totala regulatorn är alltså

$$\begin{aligned} F(s) = F_1(s)F_2(s) = K_p(1 + \frac{1}{sT_i})K_2\frac{1 + \tau_d s}{1 + \tau_d s/b} \\ \approx 15.6 \cdot \frac{1 + s}{s} \cdot \frac{1 + 0.35s}{1 + 0.18s} \end{aligned}$$