CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för signaler och system
Reglerteknik, automation och mekatronik

ERE 102 Reglerteknik D
Tentamen 2013-08-22

14.00 – 18.00 V

Examinator: Bo Egardt, tel 3721.

Tillåtna hjälpmedel:

- Typgodkänd räknare
- Beta
- Formelblad (bilagd tentatesen)

Poängberäkning: Tentamen består av 5 uppgifter om totalt 30 poäng. Nominella betygsgränser är 12 (3), 18 (4) respektive 24 (5) poäng. Lösningarna skall vara tydliga och väl motiverade!

Tentamensresultat: Granskning av rättningen erbjuds den 5 september kl 11.00 – 12.00. Kommer du senare mottages endast skriftliga klagomål mot rättningen. Sådana skriftliga klagomål måste lämnas in **senast två veckor** efter ordinarie granskning.

LYCKA TILL!

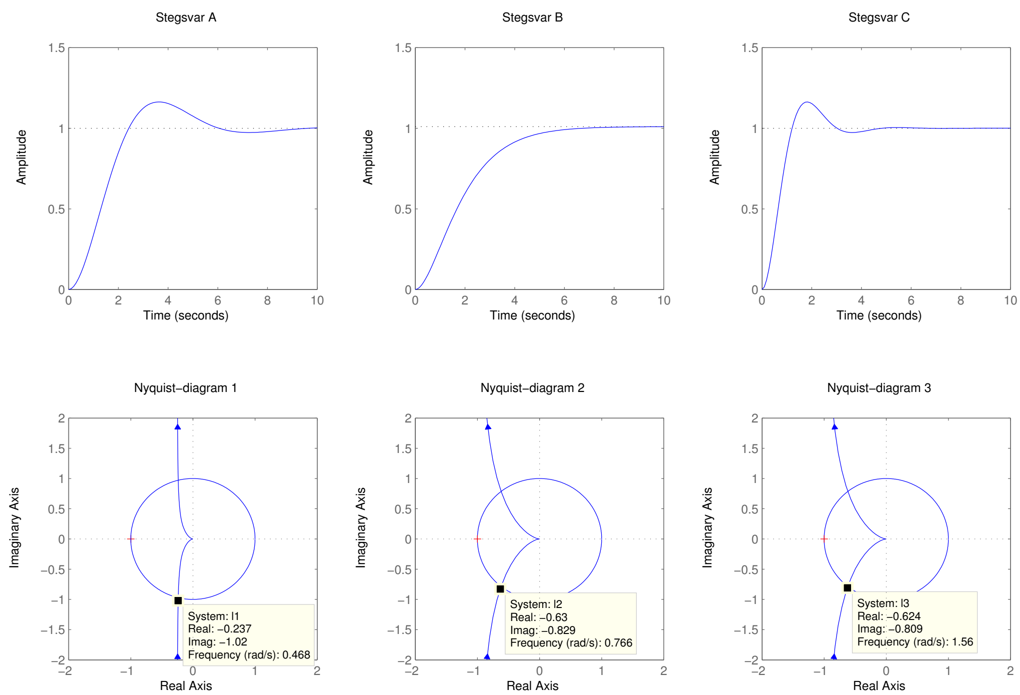
Uppgift 1.

a. Sambandet mellan insignalen u och utsignalen y för ett dynamiskt system ges av differentialekvationen

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 3u(t-2)$$

Låt insignalen vara $u(t) = \sin \omega t$. Bestäm $y(t)$ för stora t $(t \to \infty)$.
(2 p)

b. Figuren nedan visar Nyquist-diagrammen för tre olika kretsöverföringsfunktioner, och stegsvaren för motsvarande enkelt återkopplade system (dvs återkopplade med -1). Para ihop de figurer som hör ihop, dvs beskriver samma system. Var noga med att motivera ditt svar! (2 p)



c. Ett andra ordningens system beskrivet av

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) = u(t)$$

återkopplas med en P-regulator $u(t) = K(r(t) - y(t))$, där $r(t)$ är börvärdet. För vilka värden på K kommer $y(t)$ alltid att vara begränsad då $r(t)$ är begränsad? (2 p)

d. Beräkna impulssvaret för processen med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{2s^2 + 4s + 3}{(s+1)(s^2 + 2s + 2)}$$

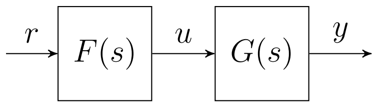
(2 p)

e. En process där utsignalen y bör följa börvärdet r ges av

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2 + 5s + 1}$$

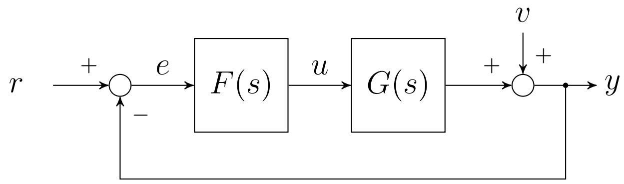
En möjlighet att styra denna process är att påverka styrsignalen u enligt nedan:

$$F(s) = \frac{s^2 + 5s + 1}{s+1}$$



Ange två orsaker till varför denna regulatorstruktur normalt inte är att föredra. (2 p)

Uppgift 2.
Blockschemat nedan visar ett återkopplat reglersystem med en process $G(s)$ och en regulator $F(s)$. Processen påverkas av en laststörning v.



Processens överföringsfunktion ges av

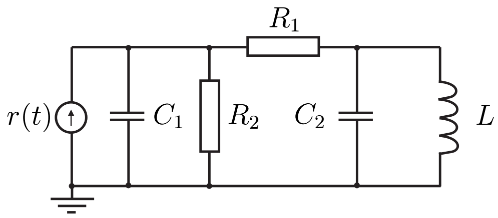
$$G(s) = \frac{3s+2}{2s+3}$$

a. Bestäm en regulator $F(s) = K$, så att det återkopplade systemet från r till y får en pol i $s = -1$. (2 p)

b. Bestäm det kvarstående felet då systemet utsätts för en laststörning $v(t) = 5$, $t \geq 0$. (2 p)

c. Hur stor bör förstärkningen K vara för att det kvarstående felet på grund av laststörningen skall minska till 20% av laststörningens amplitud? Vad blir då det slutna systemets pol? (1 p)

Uppgift 3.
Den elektriska kretsen nedan drivs av en strömgenerator, som ger strömmen $r(t)$.



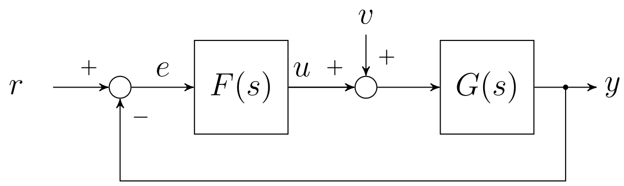
a. Hur många tillstånd krävs för att ställa upp en tillståndsmodell för kretsen? Motivera! (1 p)

b. Välj tillståndsvariabler och formulera en tillståndsmodell med $r(t)$ som insignal. (4 p)

Uppgift 4.
En process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{s(s+8)^2}$$

skall återkopplas enligt figuren nedan:

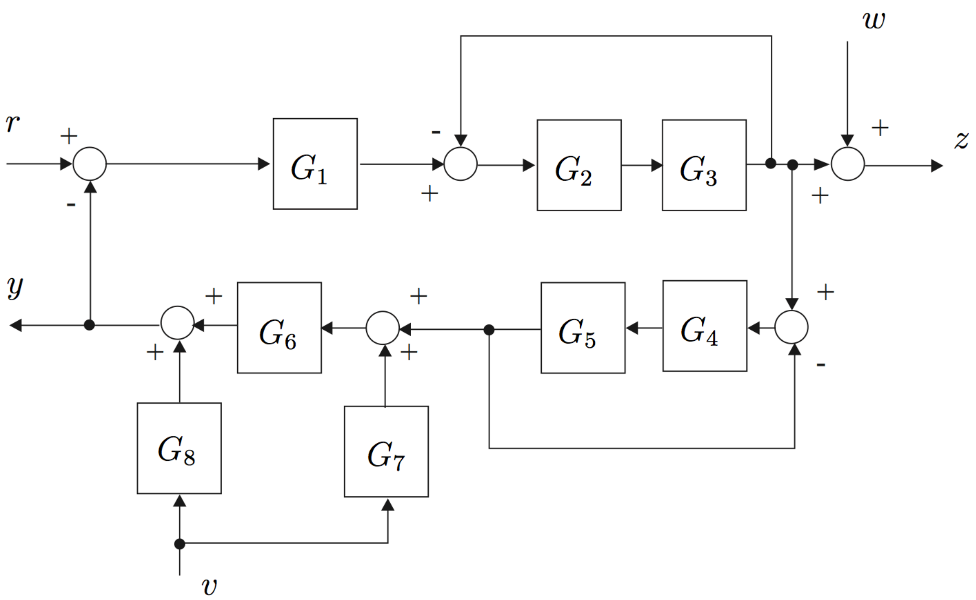


Kraven på reglersystemet är att kvarstående fel efter en stegstörning v skall elimineras, samt att fasmarginalen skall vara $\varphi_m = 50°$.

a. Dimensionera en regulator, som uppfyller kraven. Välj skärfrekvens (överkorsningsfrekvens) enligt $\omega_c = 0.4\,\omega_{150}$, där $\arg G(i\omega_{150}) = -150°$. (3 p)

b. Fasmarginalen är ett mått på hur regulatorn klarar av att hantera osäkerheter i processen. Vilken är (med den givna specifikationen) den största tidsfördröjningen i processen som kan tillåtas, innan det återkopplade systemet blir instabilt? (2 p)

Uppgift 5.
Betrakta blockschemat nedan:



a. Bestäm med överföringsfunktioner hur z beror på systemets insignaler r, v och w. (3 p)

b. Anta att G_1, G_2 och G_4 är av oss bestämda, dvs ingår i vår reglering av processen från r till y, och att G_3, G_5 och G_6 är modeller av olika delprocesser. Vad kallas då denna typ av reglering? Motivera! (1 p)

c. Om även G7 bestäms av oss vad kallas då den typen av reglering och vad bör G7 idealt vara om vi vill kompensera bort processtörningen v totalt? (1 p)

SLUT

Lösningsförslag

1. (a) Laplace-transformering (med initialvillkoren 0) ger

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = 3e^{-2s}U(s),$$

vilket ger överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3e^{-2s}}{(s+1)(s+2)}$$

Eftersom $G(s)$ är strikt stabil, så ges utsignalen för stora t av

$$\begin{aligned} y(t) &= |G(i\omega)| \sin(\omega t + \arg G(i\omega)) \\ &= \frac{3}{\sqrt{(1+\omega^2)(4+\omega^2)}} \sin(\omega t - 2\omega - \arctan \omega - \arctan \frac{\omega}{2}) \end{aligned}$$

(b) Den betydligt större fasmarginalen i (1) betyder ett stegsvar utan översläng i B. Nyquistdiagrammen i (2, 3) har samma fasmarginal men en betydligt högre skärfrekvens i 3, som alltså ger ett snabbare stegsvar. Alltså: A-2, B-1, C-3.

(c) Kretsöverföringen blir $L(s) = \frac{K}{s(s+3)}$, dvs det återkopplade systemet har överföringsfunktionen

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{K}{s^2 + 3s + K}$$

Polerna ges av den karakteristiska ekvationen $s^2 + 3s + K = 0$, som har lösningar i vänstra halvplanet (lös ut rötterna!) för alla $K > 0$. Det sökta stabilitetsvillkoret är alltså $K > 0$.

(d) Partialbråksuppdelning ger

$$G(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{s+1}{s^2+2s+2} = \frac{1}{s+1} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1},$$

vilket ger impulssvaret $e^{-t}(1 + \cos t)$.

(e) Den föreslagna strukturen är en öppen styrning, dvs 1) det finns ingen möjlighet att hantera störningar och 2) förändringar i processen gör att utsignalen inte längre följer börvärdet. Dessutom så 3) innehåller förfiltret en ren derivering (täljaren har högre ordningstal än nämnaren) vilket innebär att man får mycket stora styrsignaler vid snabba förändringar av börvärdet.

2. (a) Det återkopplade systemets överföringsfunktion ges av

$$G_{ry}(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{K(3s+2)}{2s+3+K(3s+2)} = \frac{K(3s+2)}{(3K+2)s+2K+3},$$

vilket ger polen

$$s = -\frac{2K+3}{3K+2}$$

Med valet $K = 1$ fås polen $s = -1$.

(b) Överföringsfunktionen från laststörning till fel är

$$G_{ve} = -\frac{1}{1+L(s)} = -\frac{2s+3}{2s+3+K(3s+2)} = -\frac{2s+3}{(3K+2)s+2K+3}$$

Eftersom systemet är stabilt kan vi använda slutvärdessatsen:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} -s\frac{2s+3}{(3K+2)s+2K+3} \cdot \frac{5}{s} = -3$$

(c) Det kvarstående felet är $15/(2K+3)$, dvs man behöver välja $K = 6$ för att detta skall minska till $0.2 \cdot 5 = 1$. Polen blir i detta fall $s = -15/20 = -3/4$. Notera alltså att polen flyttar närmare origo (egentligen nollstället) då förstärkningen ökas!

3. (a) Det krävs 3 tillstånd, ett vardera för den upplagrade energin i induktansen och de två kapacitanserna.

(b) Välj spänningarna v_1 och v_2 över C_1 respektive C_2, samt strömmen i_L genom L som tillståndsvariabler. Detta ger

$$\begin{aligned}\frac{dv_1}{dt} &= \frac{1}{C_1}i_1\\ \frac{dv_2}{dt} &= \frac{1}{C_2}i_2\\ \frac{di_L}{dt} &= \frac{1}{L}v_2\end{aligned}$$

där i_1, i_2 är strömmarna genom kapacitanserna. Det återstår att uttrycka dessa i termer av v_1, v_2, i_L och insignalen r. Kirschoffs samband för strömmarna ger

$$\begin{aligned}r &= i_1 + v_1/R_2 + (v_1 - v_2)/R_1\\ (v_1 - v_2)/R_1 &= i_2 + i_L\end{aligned}$$

Dessa samband kan användas för att eliminera i_1 och i_2 ovan:

$$\begin{aligned}
\frac{dv_1}{dt} &= \frac{1}{C_1}(r - v_1/R_2 - (v_1 - v_2)/R_1)\\
\frac{dv_2}{dt} &= \frac{1}{C_2}((v_1 - v_2)/R_1 - i_L)\\
\frac{di_L}{dt} &= \frac{1}{L}v_2
\end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned}
\frac{dv_1}{dt} &= -\frac{1}{C_1}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})v_1 + \frac{1}{R_1C_1}v_2 + \frac{1}{C_1}r\\
\frac{dv_2}{dt} &= \frac{1}{R_1C_2}v_1 - \frac{1}{R_1C_2}v_2 - \frac{1}{C_2}i_L\\
\frac{di_L}{dt} &= \frac{1}{L}v_2
\end{aligned}$$

som är en tillståndsmodell för kretsen med tillståndsvariablerna v_1, v_2, i_L och insignal r.

4. (a) Välj en PI-regulator $F(s) = K_p(1 + \frac{1}{T_i s})$, eftersom kvarstående fel skall elimineras. Regulatorn dimensioneras i följande steg:

   i. Skärfrekvensen väljs från $\arg G(i\omega_{150}) = -90° - 2\arctan\omega_{150}/8 = -150°$, som ger $\omega_{150} = 8\tan 30° \approx 4.6$ rad/s och $\omega_c \approx 1.85$ rad/s.

   ii. Från $\arg G(i\omega_c) = -116°$ följer att PI-regulatorn kan tillåtas sänka fasen med 14° (180-116-50). Detta ger $\arg F(i\omega_c) = \arctan(\omega_c T_i) - 90° = -14°$, dvs $T_i \approx 2.17$.

   iii. Slutligen ger villkoret $|F(i\omega_c)G(i\omega_c)| = 1$ att K_p skall väljas som

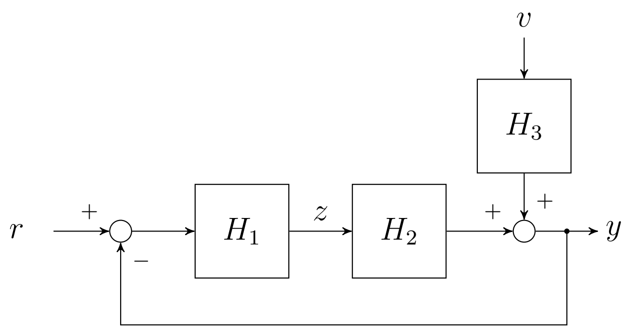
   $$K_p = \frac{\omega_c(\omega_c^2 + 8^2)\cdot T_i\omega_c}{\sqrt{(1 + (T_i\omega_c)^2}} \approx 121$$

   (b) En tidsfördröjning T_d ger fasvridningen $-\omega T_d$. Fasmarginalen på 50° blir 0 (dvs man når gränsen för instabilitet) om följande villkor är uppfyllt:

   $$-\omega_c T_d = -50\frac{\pi}{180}$$

   som ger $T_d = 0.47$ s.

5. (a) Börja med att konstatera att överföringsfunktionen från w till z är 1, eftersom z inte används i det återkopplade systemet. Anta sedan för enkelhets skull att $w = 0$, vilket gör att vi kan förenkla blockschemat till följande:



där

$$H_1 = G_1 \frac{G_2 G_3}{1 + G_2 G_3} \qquad H_2 = \frac{G_4 G_5}{1 + G_4 G_5} G_6 \qquad H_3 = G_6 G_7 + G_8$$

Detta ger

$$Z(s) = \frac{H_1}{1 + H_1 H_2} R(s) - \frac{H_1 H_3}{1 + H_1 H_2} V(s) + W(s)$$

där inverkan av w åter tagits med. Insättning av uttrycken för H_i ger slutligen:

$$\frac{Z(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 (1 + G_4 G_5)}{(1 + G_2 G_3)(1 + G_4 G_5) + G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6}$$

$$\frac{Z(s)}{V(s)} = -\frac{G_1 G_2 G_3 (G_6 G_7 + G_8)(1 + G_4 G_5)}{(1 + G_2 G_3)(1 + G_4 G_5) + G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6}$$

$$\frac{Z(s)}{W(s)} = 1$$

(b) Kaskadreglering. Det finns två inre loopar, dels med G_2 som reglerar G_3, dels med G_4 som reglerar G_5. I den yttre loopen reglerar G_1 utsignalen y från hela systemet.

(c) Framkoppling. Om man väljer $G_7 = -G_8/G_6$, så elimineras idealt inverkan av v.