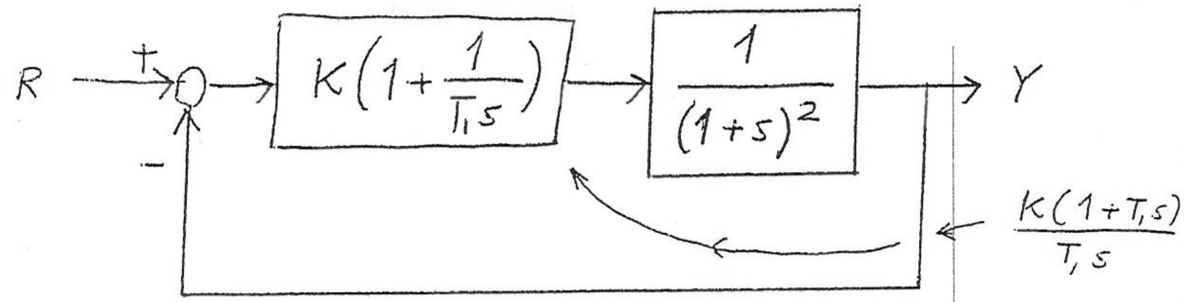
Lösningar - Reglerteknik D 9/4 2010

$\boxed{1}$



$$G_{TOT} = \frac{\dfrac{K(1+T_1 s)}{(1+s)^2 T_1 s}}{1 + \dfrac{K(1+T_1 s)}{(1+s)^2 T_1 s}} = \frac{K(1+T_1 s)}{(1+s)^2 T_1 s + K(1+T_1 s)} =$$

$$= \frac{K(1+T_1 s)}{T_1 s^3 + 2T_1 s^2 + (1+K)T_1 s + K}$$

Rouths metod

s^3	T_1	$(1+K)T_1$
s^2	$2T_1$	K
s^1	a	0
s^0	K	

$$a = \frac{2T_1^2(1+K) - T_1 K}{2T_1} = \frac{2T_1(1+K) - K}{2}$$

Villkor för stabilitet

$$2T_1(1+K) - K > 0$$

$$\Rightarrow 2T_1(1+K) > K$$

$$\Rightarrow 2T_1 > \frac{K}{1+K}$$

$$\boxed{T_1 > \frac{K}{2(1+K)}}$$

2

$$\frac{3s+2}{2s^2+3s+1} = \frac{3s+2}{(1+2s)(1+s)} = \frac{A}{1+2s} + \frac{B}{1+s}$$

$$= \frac{A(1+s)+B(1+2s)}{(1+2s)(1+s)} = \frac{(A+B)+(A+2B)s}{(1+2s)(1+s)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ A+2B=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=1 \end{cases}$$

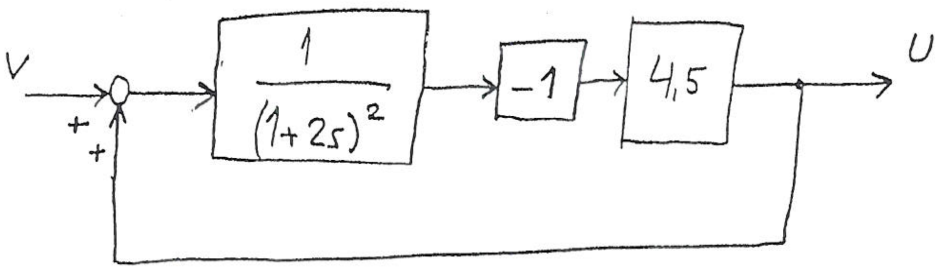
$$\Rightarrow \quad G(s) = \frac{1}{1+2s} + \frac{1}{1+s}$$

Diskretisering ger (enl tabell)

$$H(z) = \frac{1-e^{-1}}{z-e^{-1}} + \frac{1-e^{-0,5}}{z-e^{-0,5}} = \frac{0,632}{z-0,368} + \frac{0,393}{z-0,607} =$$

$$= \frac{1,026z - 0,5281}{z^2 - 0,9744z + 0,2231}$$

$\boxed{3}$ Omritning av blockschemat ger: (Sätt $R=0$)



$$G(s) = \frac{\dfrac{-4,5}{(1+2s)^2}}{1 - \dfrac{-4,5}{(1+2s)^2}} = \frac{-4,5}{(1+2s)^2 + 4,5} =$$

$$= \frac{-4,5}{4s^2 + 4s + 5,5}$$

$\boxed{4}$

$$\cancel{|G(j\omega)| = \frac{1}{1+\omega^2}}$$

$$\cancel{A_y = 2,5 \cdot} \frac{1}{1+0,5^2} = \frac{2,5}{1,25} \cancel{= 2}$$

b)

$$G_v = \frac{Y}{V} = \frac{\dfrac{1}{(1+s)^2}}{1 + \dfrac{6}{(1+s)^2}} = \frac{1}{s^2 + 2s + 7} \overset{s=j\omega}{=} \frac{1}{7-\omega^2 + 2j\omega}$$

$$|G_v(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(7-\omega^2)^2 + (2\omega)^2}}$$

$$\cancel{A_y = 2,5 \cdot} \frac{1}{\sqrt{(7-0,5^2)^2 + 1}} \cancel{= 0,366}$$

5)

$y(k) = 0{,}8\,y(k-1) + 2u(k-1) \quad \Rightarrow \quad H_P(z) = \dfrac{2z^{-1}}{1-0{,}8z^{-1}} = \dfrac{2}{z-0{,}8}$

$g(k) = y(k-1) \quad \Rightarrow \quad H_G(z) = z^{-1} = \dfrac{1}{z}$

$H_R(z) = K \qquad K > 0$

$$H_{tot}(z) = \frac{H_R H_P}{1 + H_R H_P H_G}$$

Kar. ekv. $\quad 1 + H_R H_P H_G = 0$

$$1 + \frac{2K}{z(z-0{,}8)} = 0$$

$$z^2 - 0{,}8z + 2K = 0$$

Poler: $\quad z_{1,2} = 0{,}4 \pm \sqrt{0{,}4^2 - 2K}$

$K \leq 0{,}08 \Rightarrow$ Reella poler $\quad |z_{1,2}| \leq 0{,}4 + 0{,}4 = 0{,}8 \qquad$ stabilt, ty $|z_{1,2}| < 1$

$K > 0{,}08 \Rightarrow$ Komplexa poler

$$z_{1,2} = 0{,}4 \pm j\sqrt{2K - 0{,}16}$$

$$|z_{1,2}|^2 = 0{,}4^2 + (2K - 0{,}16)$$

Stabilt om: $\quad |z_{1,2}| < 1 \Leftrightarrow |z_{1,2}|^2 < 1$

$$\therefore \cancel{0{,}4^2} + 2K - \cancel{0{,}16} < 1$$

$$\underline{\underline{K < 0{,}5}}$$

6

$$\frac{X_1}{u} = \frac{2}{s+3} \Rightarrow x_1(s+3) = 2u$$

$$\Rightarrow \dot{x}_1 = -3x_1 + 2u$$

$$\frac{x_2}{x_1+6v+x_3} = \frac{5}{1+2s} \Rightarrow x_2(1+2s) = 5(x_1+6v+x_3)$$

$$\Rightarrow 2\dot{x}_2 = -x_2 + 5x_1 + 30v + 5x_3$$

$$\Rightarrow \dot{x}_2 = 2{,}5\,x_1 - 0{,}5\,x_2 + 2{,}5\,x_3 + 15\,v$$

$$\frac{x_3}{x_2-x_3} = \frac{10}{s+4} \Rightarrow x_3(s+4) = 10(x_2-x_3)$$

$$\Rightarrow \dot{x}_3 = -4x_3 + 10x_2 - 10x_3$$

$$\Rightarrow \dot{x}_3 = 10\,x_2 - 14\,x_3$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2{,}5 & -0{,}5 & 2{,}5 \\ 0 & 10 & -14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 15 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$\boxed{7}$

$$G(j\omega) = \frac{2 \cdot e^{-0,5 j\omega}}{1 + 2,5 j\omega}$$

$$\varphi = \angle G(j\omega) = -0,5 \cdot \omega \cdot \frac{180}{\pi} - \arctan(2,5\omega) =$$

$$= -\frac{90\,\omega}{\pi} - \arctan(2,5\omega)$$

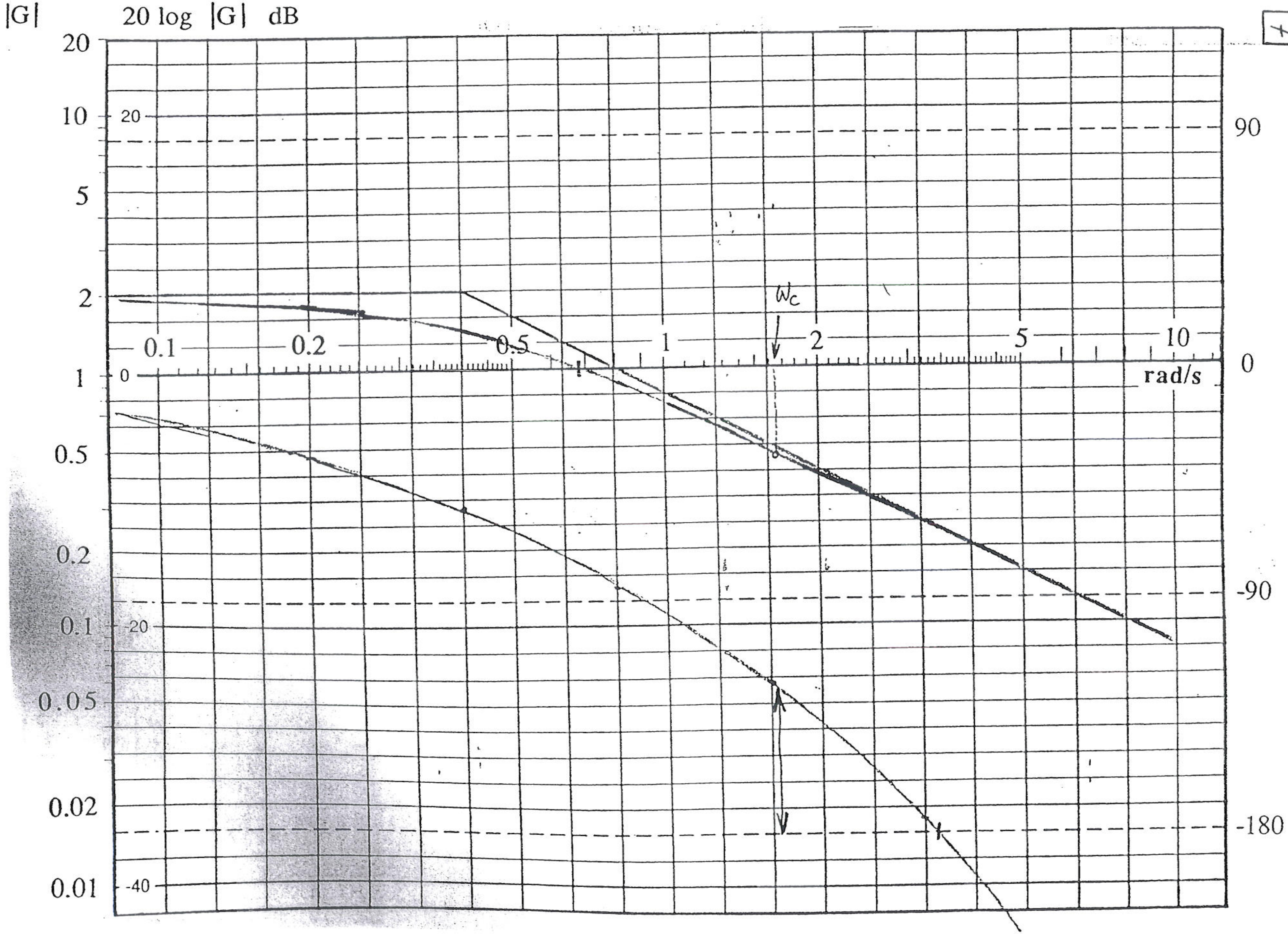
ω	φ
0,2	$-5,7 - 26,7 = -32$
0,4	$-11,5 - 45 = -56$
0,8	$-22,9 - 63,4 = -86$
1,6	$-45,9 - 76 = -122$
3,2	$-91,7 - 82,9 = -175$
5	$-143,3 - 85,4 = -229$

$\phi_m = 45 + 11 = 56^\circ$ ger erf. $(\omega_c) \approx 1,6$

$$|G(1,6)| = 0,45 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{0,45} \approx 2,22$$

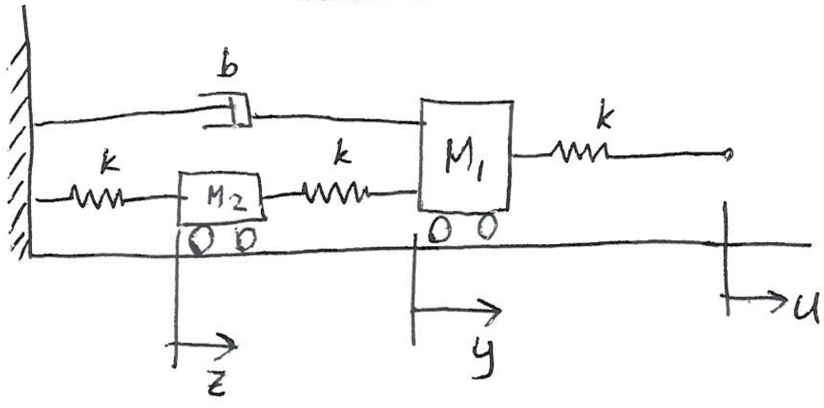
$$\frac{1}{T_I} = 0,2 \cdot \omega_c \quad \Rightarrow \quad T_I = \frac{1}{0,2 \cdot 1,6} = \frac{1}{0,32} = 3,125$$

Svar $\begin{cases} K \approx 2,2 \\ T_I \approx 3,1 \end{cases}$



|G|
20 log |G| dB
20
10
5
2
1
0.5
0.2
0.1
0.05
0.02
0.01
20
0
-20
-40
0.1
0.2
0.5
1
2
5
10
rad/s
90
0
-90
-180
W_c

8



$F = M \cdot a$

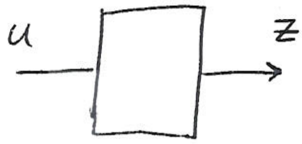
Insignal u

Utsignal z

Välj variablerna
$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = z \\ x_4 = \dot{z} \end{cases}$$

Massa 1

$$k(u-y) - k(y-z) - b\dot{y} = M_1 \ddot{y}$$



Massa 2

$$k(y-z) - kz = M_2 \ddot{z}$$

Med tillst. variabler

$$M_1 \dot{x}_2 = -bx_2 - 2kx_1 + kx_3 + ku$$

$$M_2 \dot{x}_4 = kx_1 - 2kx_3$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_3 = x_4 \end{cases}$$

På matrisform

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2k}{M_1} & -\frac{b}{M_1} & \frac{k}{M_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{M_2} & 0 & -\frac{2k}{M_2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{M_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$\boxed{9}$ <u>Kurvan ger:</u>

Total ändring av utsignalen $\Delta y = 90-20 = 70$ enheter

Dödtid ≈ 8 s

Tidskonstant (63%) ≈ 7 s. (Nivå $20+70\cdot 0{,}63 = 64{,}1$)

Statisk förstärkning

$$K = \frac{70}{5} = 14 \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{14\cdot e^{-8s}}{1+7s}$$

$\boxed{10}$

a. Den frekvens erhålles som $f = \frac{\Omega}{2\pi}\cdot f_s$, där Ω är vinkeln hos nollstället i övre halvplanet.

Nollställena ges i sin tur av

$z^2 + 1{,}2z + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = -0{,}6 \pm j\sqrt{0{,}6^2 - 1} = -0{,}6 \pm j0{,}8 = e^{\pm j126{,}9^\circ} = e^{\pm j2{,}21\,\text{rad}}$, så att

$\Omega = 126{,}9^\circ = 2{,}21$ rad .

Alltså släcks frekvensen $f = \frac{2{,}21}{2\pi}\cdot 800\text{ Hz} = \underline{\underline{282\text{Hz}}}$

b. Vi utgår från det analoga LP-filtret $H_{LP}(s) = \frac{1}{s+1}$ med gränsvinkelfrekvensen $\omega_{gLP} = 1$ rad/s . Detta transformerar vi till ett analogt HP-filter med gränsvinkelfrekvensen ω_{gHP} enligt $s \;\rightarrow\; \frac{\omega_{gLP}\cdot\omega_{gHP}}{s} = \frac{\omega_{gHP}}{s}$, så att

$$H_{HP}(s) = \frac{1}{\frac{\omega_{gHP}}{s}+1} = \frac{s}{s+\omega_{gHP}}.$$

ω_{gHP} ges av $\omega_{gHP} = \tan\frac{\Omega_g}{2}$, där Ω_g är den normerade vinkelfrekvens som motsvarar det diskreta filtrets övre gränsfrekvens.

Alltså: $\Omega_g = 2\pi\cdot\frac{500\text{Hz}}{10\text{kHz}}\text{rad} = 0{,}314159$ rad , så att

$$\omega_{gHP} = \tan\frac{0{,}314159\text{ rad}}{2} = 0{,}15838 .$$

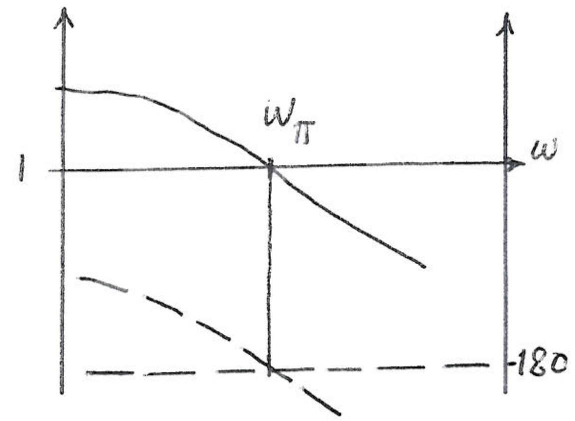
Överföringsfunktionen $H(z)$ för det diskreta filtret ges nu av $H(z) = \left[H_{HP}(s)\right]_{s=\frac{z-1}{z+1}}$, där alltså

$H_{HP}(s) = \frac{s}{s+\omega_{gHP}} = \frac{s}{s+0{,}15838}$, vilket ger

$$H(z) = \frac{\frac{z-1}{z+1}}{\frac{z-1}{z+1}+\omega_{gHP}} = \frac{\frac{z-1}{z+1}}{\frac{z-1}{z+1}+0{,}15838} = \frac{z-1}{z-1+0{,}15838\,(z+1)} = \underline{\underline{\frac{z-1}{1{,}15838\,z-0{,}8416}}} = \underline{\underline{0{,}8633\cdot\frac{z-1}{z-0{,}7265}}}$$

11

Ursprungligt Bodediagram (skiss)



Systemet måste ha varit på instabilitetsgränsen med $\phi_m = 0°$

$\omega_\pi = \omega_c$

$$\omega_\pi = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{30} = 0{,}209 \text{ rad/s}$$

Minskad dödtid höjer faskurvan. Höjningen ges av följande

vid aktuell frekvens

$$\angle e^{4j\omega} = 4\,\omega \frac{180}{\pi} = \frac{4 \cdot 0{,}209 \cdot 180}{\pi} = 48°$$

Svar Fasmarginalen blir $\phi_m = 48°$

(vilket normalt är helt OK)