TENTAMEN

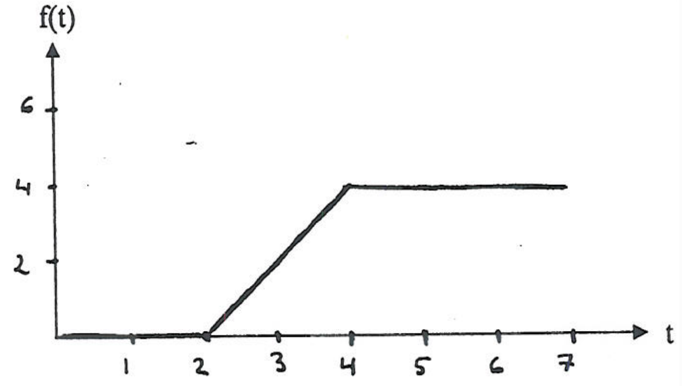
Reglerteknik D, D3, lp 2

Kursbeteckning:	**ERE 102**
Datum:	Måndag 2009-12-14 fm
Examinator och ansv. lärare:	Bertil Thomas, tel 5743, 0733-124381 Besöker tentamen 10.00 (ca)
Tillåtna hjälpmedel:	Formelsamling(ar), typgodkänd miniräknare, bodediagram, pennor, linjaler.
Antal uppgifter:	10
Maxpoäng	25
Preliminära betygsgränser:	10 / 15 / 20

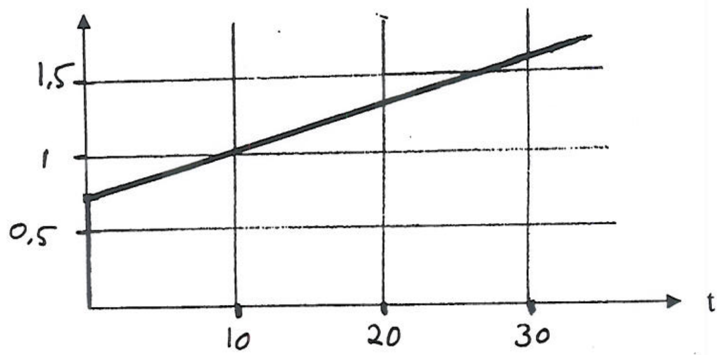
Tentan gäller även för omtenterande i de tidigare kurserna ERE100 resp ERE101.

1

a) Bestäm Laplace-transformen för följande signal: (1 p)



b) Figuren nedan visar stegsvaret för en PI-regulator. Bestäm integrationstiden T_I och förstärkningen K. (1 p)



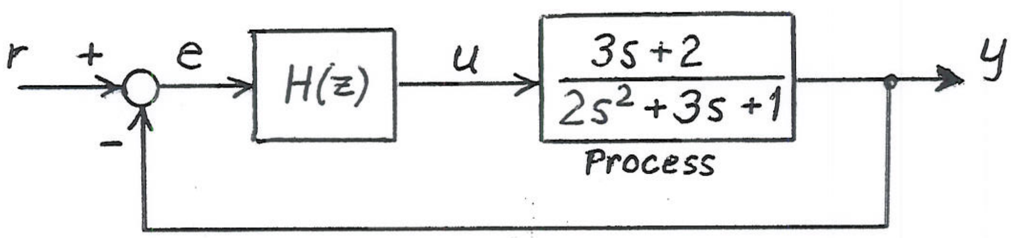
PI-regulatorns överföringsfunktion antas vara $G = K(1 + \frac{1}{T_I s})$

2

Processen i nedanstående reglersystem ska regleras med en tidsdiskret regulator H(z). För att kunna göra beräkningar på egenskaperna hos reglersystemet (stabilitet mm) måste man först diskretisera processen.

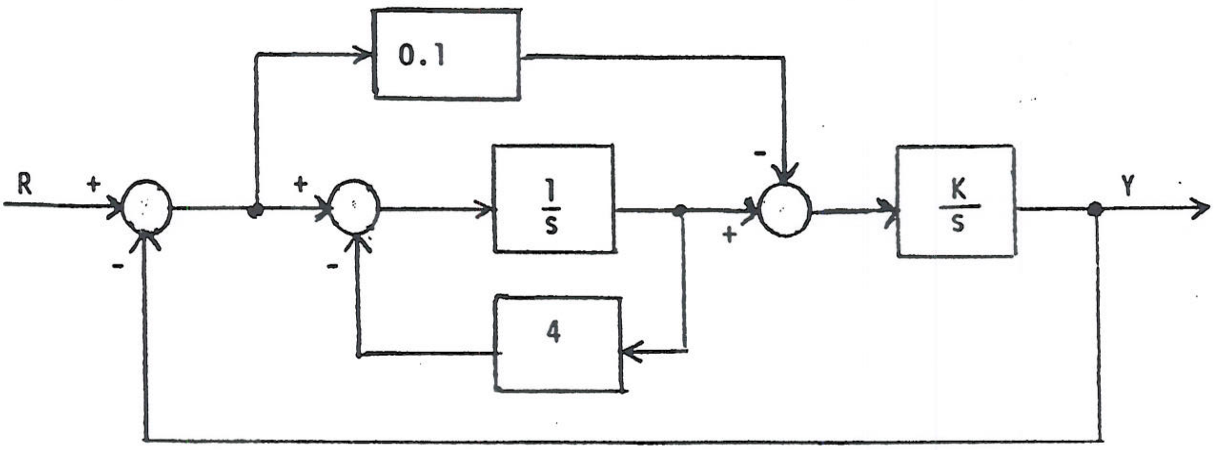
Uppgift: Bestäm den tidsdiskreta motsvarigheten till processens överföringsfunktion under förutsättning att styrningen sker med en styckvis konstant insignal. Samplingstiden är h = 1 sekund.

(2p)



③

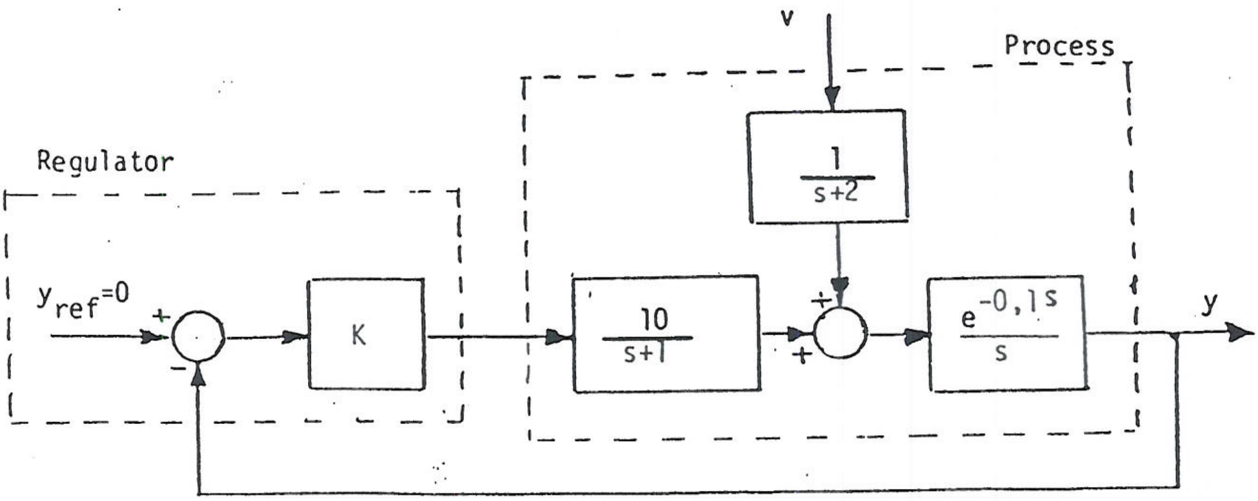
a)



Beräkna överföringsfunktionen $Y(s)/R(s)$ i ovanstående reglerkrets.
För vilka värden på faktorn K är systemet stabilt?

(2p)

b)



Uppgifter:

Bestäm först hur kretsöverföringen G_K ser ut för ovanstående system?
Bestäm därefter vilket värde vi ska ha på förstärkningen K för att få en fasmarginal på 45 grader. (Detta kan t ex göras med hjälp av Bodediagram).

(3p)

4

Nedanstående process ska regleras med en PI-regulator. Ziegler-Nichols metod ska användas för dimensioneringen. Bestäm parametrarna K och T_I enligt denna metod. (2p)

$$G = \frac{5 \cdot e^{-10s}}{1+20s}$$

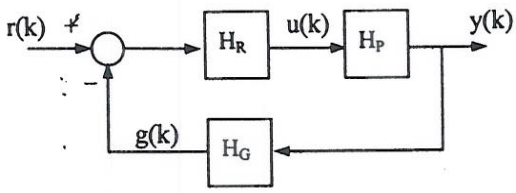
5

Processen H_P i reglersystemet i figuren kan beskrivas med differensekvationen:

$$y(k) = 0{,}8y(k-1) + 2u(k-1)$$

Givaren H_G kan beskrivas med differensekvationen:

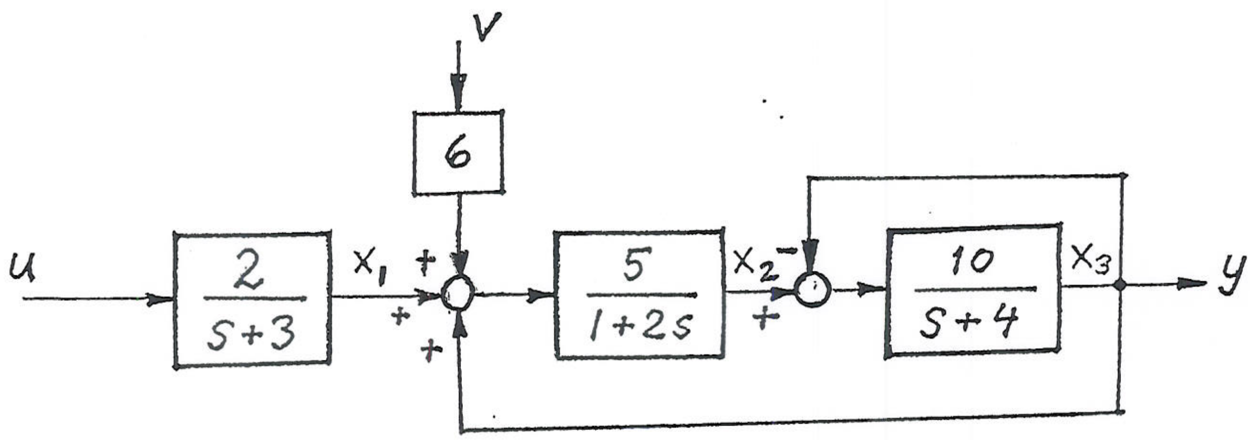
$$g(k) = y(k-1)$$



En tidsdiskret, proportionell regulator med överföringsfunktion $H_R(z) = K$, där $K>0$, ska användas som regulator i reglersystemet. Bestäm hur stort K maximalt får vara om reglersystemet ska vara stabilt. (2 p)

6

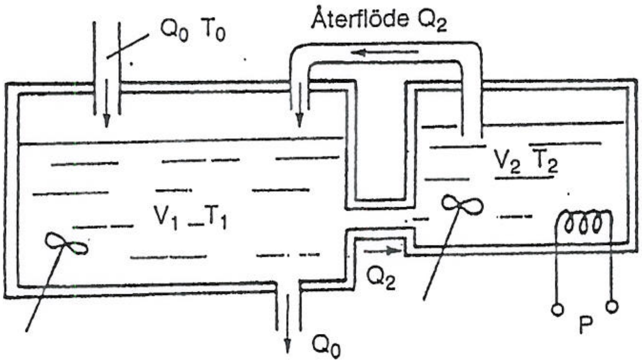
Figuren nedan beskriver ett system med två insignaler (u och v) samt en utsignal y. Ställ upp systemet på tillståndsform. Utsignalen från de tre blocken som ligger i serie med varandra ska väljas som tillstånd. (2p)



7

I en kemisk process finns ett system med två vattentankar enligt nedanstående figur. Den större tanken används för beredning av en viss kemikalie. Den mindre tanken används för uppvärmning och för tillsättning av speciella ämnen. Båda tankarna antas ha "ideal omrörning".

Temperaturen T_0 i inflödet är varierande, liksom effekten P. Dödtiden i flödet Q_2 kan försummas.



Tillförd värmeeffekt P (W)
Temperatur inflödet T_0 (°C)
Temperatur stor tank T_1 (°C)
Temperatur liten tank T_2 (°C)

Volymer: $\begin{cases} V_1 = 2 \text{ m}^3 \\ V_2 = 1 \text{ m}^3 \end{cases}$

Flöden: $\begin{cases} Q_0 = 0{,}002 \text{ m}^3/\text{s} \\ Q_2 = 0{,}001 \text{ m}^3/\text{s} \end{cases}$

Spec. värmekap. $c = 4{,}2 \cdot 10^3$ J/kg °C

Densitet $\rho = 1000$ kg/m^3

Uppgifter

Ställ upp en tillståndsmodell för systemet med T_1 och T_2 som tillståndsvariabler samt T_0 och P som insignaler (variabler). Temperaturen T_1 ska vara utsignal. Flödena Q_0 och Q_2 antas vara konstanta. Ställ upp modellen på matrisform med uträknade värden på de tre konstanta A- B- och C-matriserna (systemmatris, insignalmatris och utsignalmatris).

(3p)

⑧

Ett reglersystem för positionering av en lyftarm i en produktionscell ska dimensioneras. Se nedanstående blockschema. Lyftarmen är en del av en större produktionsprocess med robotar, transportband och numeriskt styrda verktygsmaskiner. Börvärdet till lyftarmen kommer från ett överordnat styrsystem. Här studerar vi bara rörelsen i en dimension.

Sambandet mellan u och y beskrivs med följande differentialekvation:

$$5y'' + y' = 3u$$

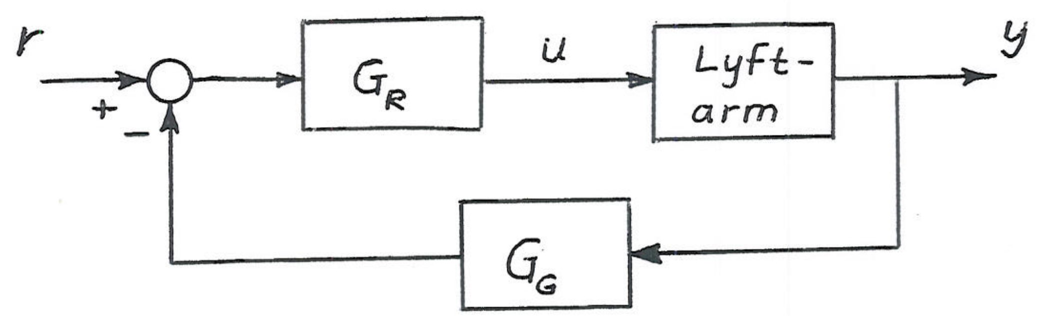
I återkopplingen (givare + mätomvandlare) finns en fördröjning som motsvarar en tidskonstant på en sekund, d v s

$$G_G(s) = \frac{1}{1+s}$$

För hela systemet från börvärde r till position y önskar man en total överföringsfunktion enligt följande:

$$G_{TOT} = \frac{K}{(1+2s)^2}$$

Uppgift: Bestäm först parametern K så att systemet inte får något kvarstående fel vid stegformade börvärdesändringar (d v s så att $e_0 = 0$). Bestäm därefter vilken överföringsfunktion regulatorn G_R ska ha för att man ska få den önskade totala överföringsfunktionen. Förenkla uttrycket så långt som möjligt.



r = **börvärde**
u = **styrsignal till lyftarmens motor**
y = **position**

(2 p)

9

a. Vilken frekvens släcks ut av ett tidsdiskret notchfilter med överföringsfunktionen

$$H(z) = \frac{z^2 + 1{,}2z + 1}{z^2 - 1{,}08\,z + 0{,}81}$$

och samplingsfrekvensen 800Hz? (1p)

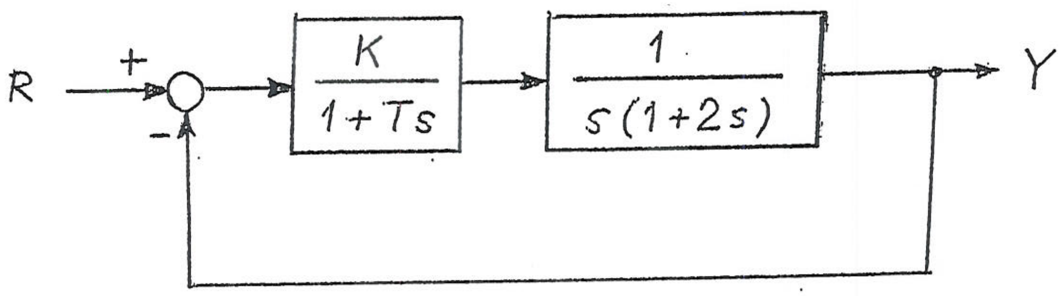
b. Utgå från motsvarande analoga filter och bestäm med hjälp av bilinjär transform överföringsfunktionen för ett tidsdiskret högpass Butterworthfilter av ordning 1 med samplingsfrekvensen 10kHz och undre gränsfrekvensen 500Hz.

(2 p)

10

Blockschemat nedan visar ett reglersystem, där vi kan anta att både K och T är större än noll. Härled för systemet en formel med vilken man kan beräkna det K-värde som, för olika värden på T, ger en önskad amplitudmarginal A_m (i gånger).
Formeln ska alltså vara en funktion av både A_m och T, dvs $K = f(A_m, T)$.

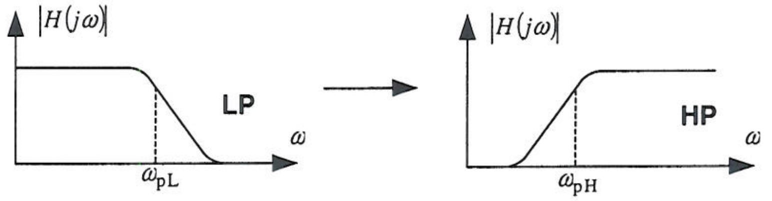
(2 p)



Formelsamling - signalbehandling

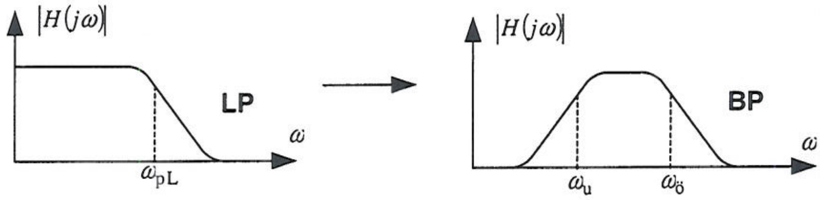
Filtertransformering

LP-HP



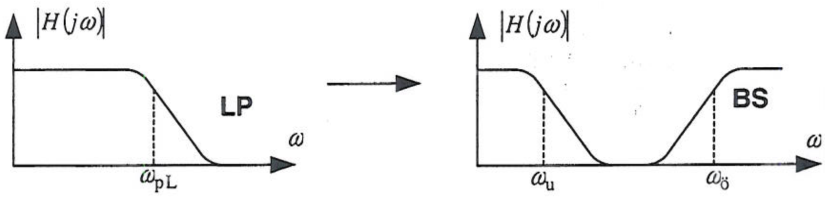
$$s \rightarrow \frac{\omega_{\mathrm{pL}} \cdot \omega_{\mathrm{pH}}}{s}$$

LP-BP



$$s \rightarrow \frac{s^2 + \omega_{\mathrm{ö}} \cdot \omega_{\mathrm{u}}}{s \cdot (\omega_{\mathrm{ö}} - \omega_{\mathrm{u}})} \cdot \omega_{\mathrm{pL}}$$

LP-BS



$$s \rightarrow \frac{s \cdot (\omega_{\mathrm{ö}} - \omega_{\mathrm{u}})}{s^2 + \omega_{\mathrm{ö}} \cdot \omega_{\mathrm{u}}} \cdot \omega_{\mathrm{pL}}$$

Analog LP-länk ordning 1 $\quad H(s) = \dfrac{\omega_g}{s + \omega_g}$

Analog LP-länk ordning 2 $\quad H(s) = \dfrac{\omega_0^2}{s^2 + \dfrac{\omega_0}{Q} \cdot s + \omega_0^2}$

Analog HP-länk ordning 1 $\quad H(s) = \dfrac{s}{s + \omega_g}$

Analog HP-länk ordning 2 $\quad H(s) = \dfrac{s^2}{s^2 + \dfrac{\omega_0}{Q} \cdot s + \omega_0^2}$

där $Q = \dfrac{1}{2\cos\alpha}$ och $\alpha = \pi - \arg s_{\mathrm{pol}}$

Normerad vinkelfrekvens $\quad \Omega = 2\pi \dfrac{f}{f_s}$

Bilinjär transform $\quad \omega_g' = \tan \dfrac{\Omega_g}{2} \qquad s = \dfrac{z-1}{z+1}$

Lösningar - Tentamen 2009-12-14 D

1 a) $f(t) = 2\rho(t-2) - 2\rho(t-4) \Rightarrow$

$$F(s) = 2\cdot\frac{1}{s^2}e^{-2s} - 2\cdot\frac{1}{s^2}\cdot e^{-4s} =$$

$$= \frac{2\left(e^{-2s} - e^{-4s}\right)}{s^2}$$

b) Vi ser

$$\left.\begin{aligned} K &= 0{,}75 \\ T_I &= 27 \end{aligned}\right\} \Rightarrow G = 0{,}75\left(1 + \frac{1}{27s}\right)$$

2

$$\frac{3s+2}{2s^2+3s+1} = \frac{3s+2}{(1+2s)(1+s)} = \frac{A}{1+2s} + \frac{B}{1+s}$$

$$= \frac{A(1+s) + B(1+2s)}{(1+2s)(1+s)} = \frac{(A+B) + (A+2B)s}{(1+2s)(1+s)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 2 \\ A + 2B = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{1}{1+2s} + \frac{1}{1+s}$$

Diskretisering ger (enl tabell)

$$H(z) = \frac{1-e^{-1}}{z-e^{-1}} + \frac{1-e^{-0{,}5}}{z-e^{-0{,}5}} = \frac{0{,}632}{z-0{,}368} + \frac{0{,}393}{z-0{,}607} =$$

$$= \frac{1{,}026z - 0{,}5281}{z^2 - 0{,}9744z + 0{,}2231}$$

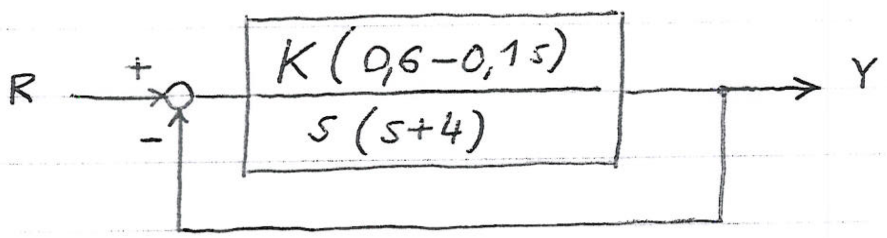
$\boxed{3}$ a) Inre återkopplingen

$$G = \frac{\frac{1}{s}}{1 + 4\cdot\frac{1}{s}} = \frac{1}{s+4}$$

Parallellkopplingen

$$\frac{1}{s+4} - 0{,}1 = \frac{1 - 0{,}1(s+4)}{s+4} = \frac{0{,}6 - 0{,}1s}{s+4}$$

Förenklat blockschema



$$\Rightarrow \quad G_{TOT} = \frac{Y}{R} = \frac{\frac{K(0{,}6-0{,}1s)}{s(s+4)}}{1 + \frac{K(0{,}6-0{,}1s)}{s(s+4)}} = \frac{K(0{,}6-0{,}1s)}{s(s+4)+K(0{,}6-0{,}1s)}$$

$$= \frac{K(0{,}6-0{,}1s)}{s^2 + (4-0{,}1\cdot K)s + 0{,}6K}$$

<u>Rouths metod ger</u>

Kar. ekv $s^2 + (4-0{,}1K)s + 0{,}6K = 0$

s^2	1	$0{,}6K$
s^1	$4-0{,}1\cdot K$	0
s^0	$0{,}6\cdot K$	

$\Rightarrow$ Stab. villkor

$$\begin{cases} 4 - 0{,}1K > 0 & (1) \\ 0{,}6K > 0 & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K > 0 \\ K < 40 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{0 < K < 40}$$

$\boxed{3b}$

Kretsöverf $G(s) = K \cdot \dfrac{10\,e^{-0.1s}}{s(s+1)}$

Bodediagram uppritas för $K=1$.

Beloppskurvan måste sänkas 19 dB för att ge det ω_c (≈ 0.85 rad/s) som leder till 45° fasmarginal.

$$\therefore \quad K = 1/10^{19/20} = 0.11$$

Se bodediagrammet på nästa sida!

$\boxed{4}$ Bodediagrammet (två sidor framåt) ger:

$\omega_\pi \approx 0{,}185$

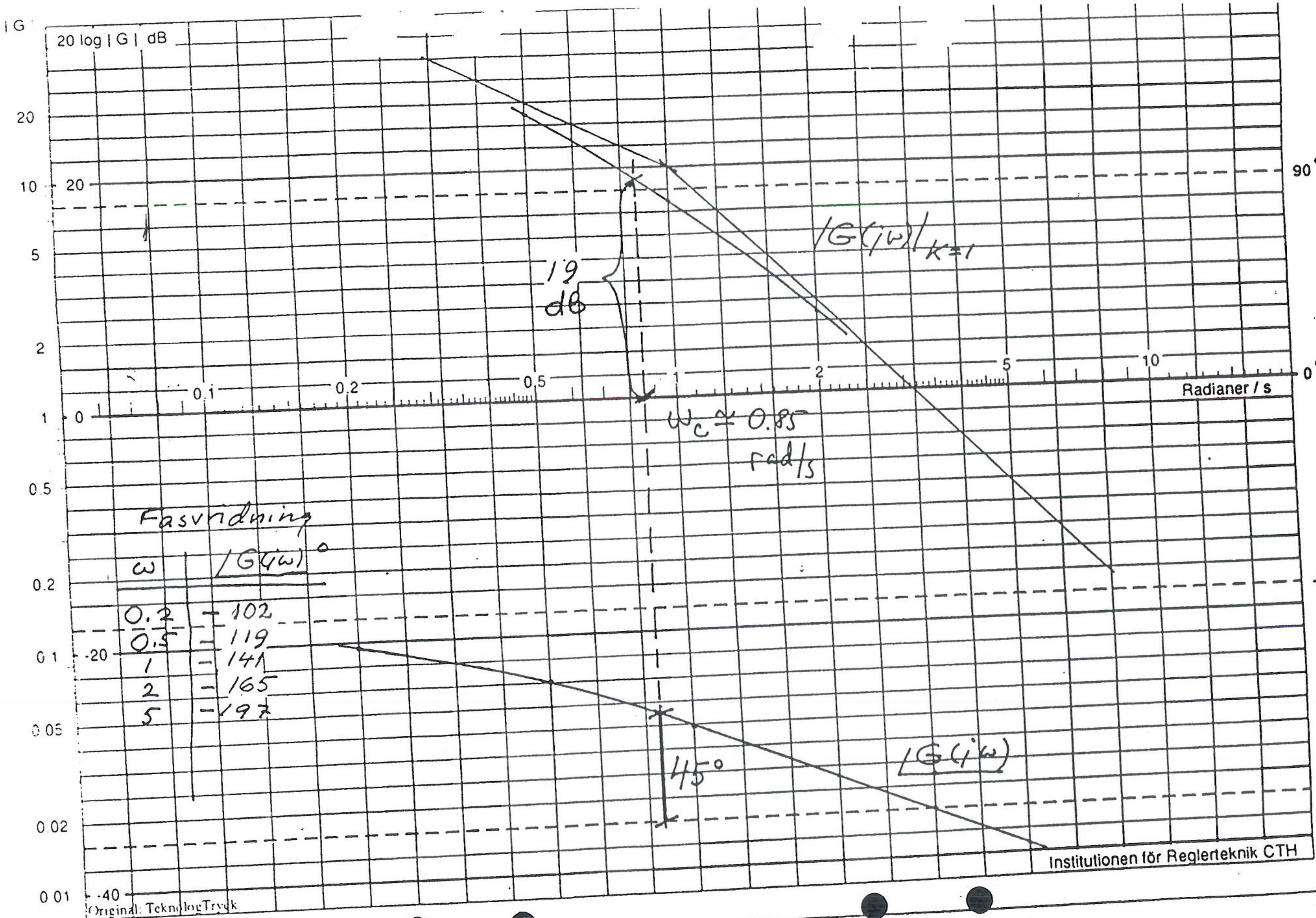
$|G_p(\omega_\pi)| \approx 2{,}2 \text{ dB} = 10^{2{,}2/20} \text{ ggr} = 1{,}29$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_\pi} = 33{,}9 \approx 34 \\ K_0 = \dfrac{1}{|G_p(\omega_\pi)|} = \dfrac{1}{1{,}29} = 0{,}775 \end{cases}$$

Ziegler-Nichols ger

$$\begin{cases} K = 0{,}45 \cdot 0{,}775 = 0{,}35 \\ T_I = 0{,}5 \cdot 34 = 17 \end{cases}$$

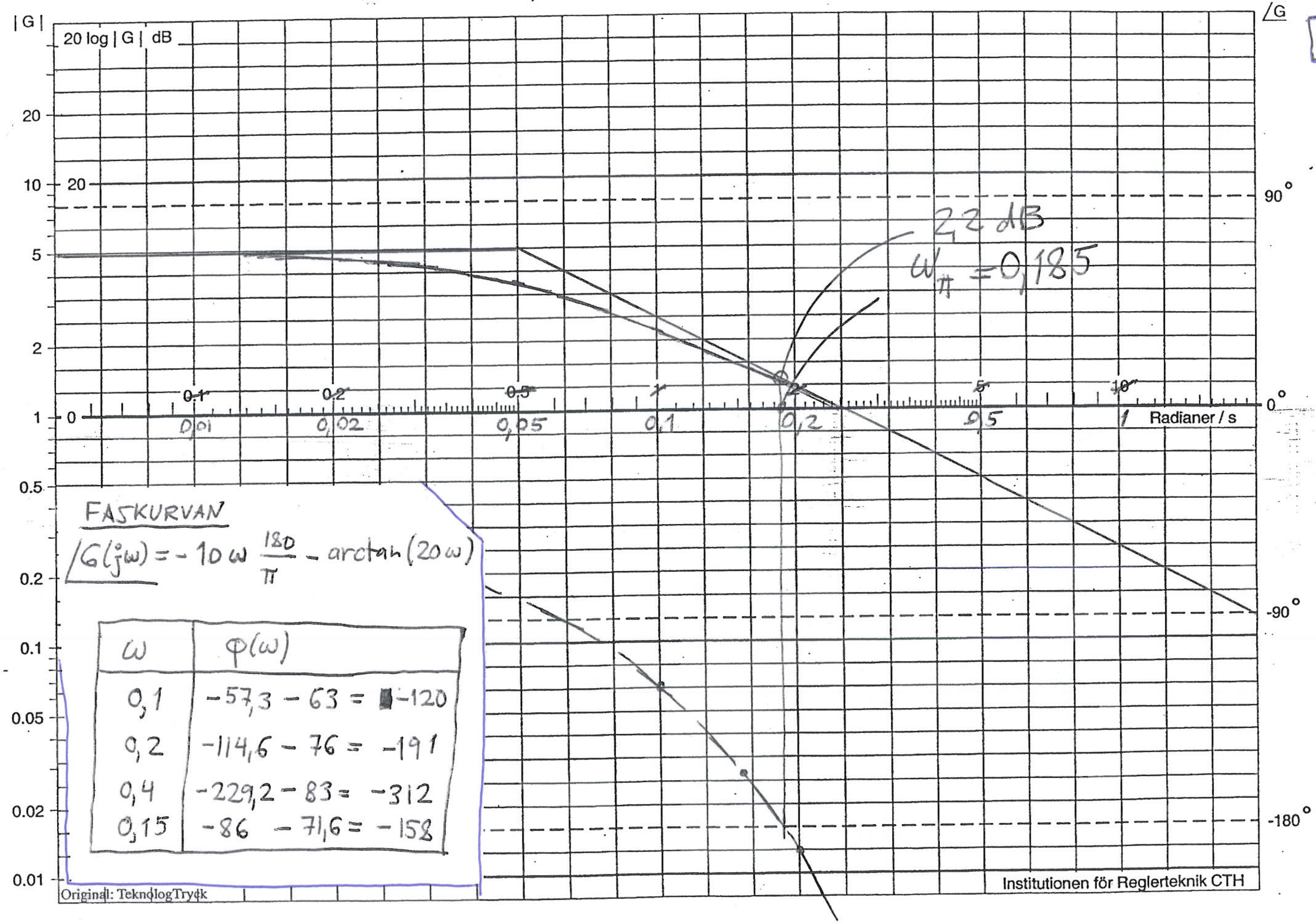
(Ungefärliga värden!)



Fasvridning

ω	$/G(j\omega)$ °
0.2	-102
0.5	-119
1	-141
2	-165
5	-197

4



FASKURVAN

$$\angle G(j\omega) = -10\omega\frac{180}{\pi} - \arctan(20\omega)$$

ω	$\varphi(\omega)$
0,1	−57,3 − 63 = −120
0,2	−114,6 − 76 = −191
0,4	−229,2 − 83 = −312
0,15	−86 − 71,6 = −158

5)

$y(k) = 0{,}8\,y(k-1) + 2u(k-1) \Rightarrow H_P(z) = \dfrac{2z^{-1}}{1-0{,}8z^{-1}} = \dfrac{2}{z-0{,}8}$

$g(k) = y(k-1) \Rightarrow H_G(z) = z^{-1} = \dfrac{1}{z}$

$H_R(z) = K \qquad K>0$

$$H_{tot}(z) = \frac{H_R H_P}{1 + H_R H_P H_G}$$

Kar. ekv. $\quad 1 + H_R H_P H_G = 0$

$$1 + \frac{2K}{z(z-0{,}8)} = 0$$

$$z^2 - 0{,}8z + 2K = 0$$

Poler: $\quad z_{1,2} = 0{,}4 \pm \sqrt{0{,}4^2 - 2K}$

$K \leq 0{,}08 \Rightarrow$ Reella poler $\quad |z_{1,2}| \leq 0{,}4 + 0{,}4 = 0{,}8 \qquad$ stabilt, ty $|z_{1,2}|<1$

$K > 0{,}08 \Rightarrow$ Komplexa poler

$$z_{1,2} = 0{,}4 \pm j\sqrt{2K - 0{,}16}$$

$$|z_{1,2}|^2 = 0{,}4^2 + (2K - 0{,}16)$$

Stabilt om: $|z_{1,2}| < 1 \iff |z_{1,2}|^2 < 1$

$$\therefore\ \cancel{0{,}4^2} + 2K - \cancel{0{,}16} < 1$$

$$\underline{\underline{K < 0{,}5}}$$

6

$$\frac{X_1}{U} = \frac{2}{s+3} \Rightarrow X_1(s+3) = 2U$$

$$\Rightarrow \dot{x}_1 = -3x_1 + 2u$$

$$\frac{X_2}{X_1 + 6V + X_3} = \frac{5}{1+2s} \Rightarrow X_2(1+2s) = 5(X_1 + 6V + X_3)$$

$$\Rightarrow 2\dot{x}_2 = -x_2 + 5x_1 + 30v + 5x_3$$

$$\Rightarrow \dot{x}_2 = 2{,}5\,x_1 - 0{,}5\,x_2 + 2{,}5\,x_3 + 15\,v$$

$$\frac{X_3}{X_2 - X_3} = \frac{10}{s+4} \Rightarrow X_3(s+4) = 10(X_2 - X_3)$$

$$\Rightarrow \dot{x}_3 = -4x_3 + 10x_2 - 10x_3$$

$$\Rightarrow \dot{x}_3 = 10\,x_2 - 14\,x_3$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2{,}5 & -0{,}5 & 2{,}5 \\ 0 & 10 & -14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 15 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

7

$$\frac{dE}{dt} = P_{in} - P_{ut}$$

Tank 1 $\begin{cases} E = V_1 T_1 \rho c \\ P_{in} = Q_0 T_0 \rho c + Q_2 T_2 \rho c \\ P_{ut} = (Q_0 + Q_2) T_1 \rho c \end{cases}$

Tank 2 $\begin{cases} E = V_2 T_2 \rho c \\ P_{in} = P + Q_2 T_1 \rho c \\ P_{ut} = Q_2 T_2 \rho c \end{cases}$

__Tank 1__

$$\frac{d}{dt}(V_1 T_1 \cancel{\rho c}) = Q_0 T_0 \cancel{\rho c} + Q_2 T_2 \cancel{\rho c} - (Q_0 + Q_2) T_1 \cancel{\rho c}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dT_1}{dt} = \frac{Q_0}{V_1} T_0 + \frac{Q_2}{V_1} T_2 - \left(\frac{Q_0 + Q_2}{V_1}\right) T_1$$

__Tank 2__

$$\frac{d}{dt}(V_2 T_2 \rho c) = P + Q_2 T_1 \rho c - Q_2 T_2 \rho c$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dT_2}{dt} = \frac{P}{V_2 \rho c} + \frac{Q_2}{V_2} T_1 - \frac{Q_2}{V_2} T_2$$

__På matrisform fås__

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{Q_0 + Q_2}{V_1} & \frac{Q_2}{V_1} \\ \frac{Q_2}{V_2} & -\frac{Q_2}{V_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{Q_0}{V_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{V_2 \rho c} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_0 \\ P \end{bmatrix}$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

Med siffror fås

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0015 & 0{,}0005 \\ 0{,}001 & 0{,}001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}001 & 0 \\ 0 & 2{,}38 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ P \end{bmatrix}$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{8}$

Välj $K=1$ $\left(\text{så att} \quad \lim_{s\to 0} G_{TOT} = 1\right)$

Processen

$$5Ys^2 + Ys = 3U \quad \Rightarrow \quad G_p = \frac{3}{s(1+5s)}$$

<u>Modellbaserad dimensionering ger</u>

$$G_R = \frac{G_{TOT}}{G_p(1 - G_G \cdot G_{TOT})} = \frac{\frac{1}{(1+2s)^2}}{\frac{3}{s(1+5s)}\left[1 - \frac{1}{(1+s)(1+2s)^2}\right]} =$$

$$= \frac{s(1+5s)}{3\left[(1+2s)^2 - \frac{1}{1+s}\right]} = \frac{s(1+5s)(1+s)}{3\left[(1+2s)^2(1+s) - 1\right]} =$$

$$= \frac{s(5s^2+6s+1)}{3\left[4s^3+8s^2+5s\right]} = \frac{5s^2+6s+1}{12s^2+24s+15}$$

Lösning uppgift på filter

a) Frekvensen ges av täljarens nollställen:

$$z^2+1{,}2z+1 = 0 \Rightarrow$$

$$z = -0{,}6 \pm j0{,}8 = 1\cdot e^{\pm j129{,}9^\circ} = 1\cdot e^{\pm j2{,}21\,rad} = e^{\pm j\Omega}$$

$$\Omega = 2\pi \frac{f}{f_s} \Rightarrow f = \frac{\Omega}{2\pi}\cdot f_s = \frac{2{,}21}{2\pi}\cdot 800\,Hz = \underline{\underline{282\,Hz}}$$

b) Utgå från analogt filter $H(s) = \dfrac{s}{s+\omega_g'}$

$\omega_g' = \tan\dfrac{\Omega_g}{2}$, där $\Omega_g = 2\pi\cdot\dfrac{f_g}{f_s}$.

f_g är den önskade gränsfrekvensen.

Det önskade filtret fås sedan som

$H(z) = \left[H(s)\right]_{s=\frac{z-1}{z+1}}$. Detta ger

$$\Omega_g = 2\pi\cdot\frac{500}{10k}\,rad = \frac{\pi}{10}\,rad, \text{ så att}$$

$$\omega_g' = \tan\frac{\pi}{20}\,rad = \tan 9^\circ = 0{,}15838 \Rightarrow$$

$$H(s) = \frac{s}{s+0{,}15838} \Rightarrow$$

$$H(z) = \left[\frac{s}{s+0{,}15838}\right]_{s=\frac{z-1}{z+1}} = \frac{\frac{z-1}{z+1}}{\frac{z-1}{z+1}+0{,}15838} =$$

$$= \frac{z-1}{1{,}15838z-0{,}84162} = \underline{\underline{0{,}86327\cdot\frac{z-1}{z-0{,}72655}}}$$

10 Den totala överföringsfunktionen blir

$$G_{TOT} = \frac{\dfrac{K}{s(1+Ts)(1+2s)}}{1 + \dfrac{K}{s(1+Ts)(1+2s)}} = \frac{K}{s(1+Ts)(1+2s)+K} =$$

$$= \frac{K}{2Ts^3 + (2+T)s^2 + s + K}$$

Rouths metod ger

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 2T & 1 \\ s^2 & 2+T & K \\ \hline s^1 & a & 0 \\ s^0 & K & \end{array}$$

där $a = \dfrac{(2+T) - 2TK}{2+T}$

Stabilitetsvillkor

$(\ 2T > 0\ )$ $\quad 2+T-2TK > 0 \Rightarrow 2TK < 2+T$

$(\ 2+T > 0\ )$

$(\ K > 0\ )$ $\quad \Rightarrow K < \dfrac{2+T}{2T}$ för stabilitet

För att få en viss amplitudmarginal A_m (ggr) dividerar vi med A_m, dvs den sökta formeln blir

$$K = \frac{2+T}{2TA_m}$$