Lösningar Reglerteknik D 20/8 -2009

<u>1</u>

$$G_{TOT} = \frac{\dfrac{2K}{(s+1)(s^2+2s+1)}}{1+\dfrac{2K}{(s+1)(s^2+2s+1)}} =$$

$$= \frac{2K}{(s+1)(s^2+2s+1)+2K} = \frac{2K}{s^3+3s^2+3s+2K+1}$$

<u>R-H</u>

s^3	1	3	0
s^2	3	$2K+1$	0
s^1	$\frac{9-(2K+1)}{3}$	0	
s^0	$2K+1$		

Stabilitetsvillkor: $9-(2K+1) > 0$ (1)

$2K+1 > 0$ (2)

(1) $\Rightarrow$ $8-2K>0$ $\Rightarrow$ $K<4$

(2) $\Rightarrow$ $2K>-1$ $\Rightarrow$ $K>-0{,}5$

<u>Svar</u> Systemet är stabilt om

$$-0{,}5 < K < 4$$

2

Z-transformering ger

$$Y\left[1-z^{-1}+0{,}5\,z^{-2}\right]=2\,U\,z^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Y}{U}=\frac{2z^{-1}}{1-z^{-1}+0{,}5z^{-2}}=\frac{2z}{z^2-z+0{,}5}$$

$$z^2-z+0{,}5=0 \quad \Rightarrow \quad z=0{,}5\pm\sqrt{0{,}25-0{,}5}=$$
$$=0{,}5\pm0{,}5j$$

Stabil process!

$$U(z)=\frac{z}{(z-1)^2}\cdot\left(z^{-2}-z^{-5}\right)=\frac{z^{-1}-z^{-4}}{(z-1)^2}$$

$$Y(z)=H(z)\cdot U(z)=\frac{2-2z^{-3}}{(z-1)^2(z^2-z+0{,}5)}$$

3

Nivåbalans ger

$$\frac{dV}{dt} = u_{in} - u_{ut} \quad \Rightarrow \quad A\frac{dh}{dt} = u_1 + u_2 - u_3$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{A}(u_1 + u_2 - u_3)$$

Energibalans ger

$$\frac{dE}{dt} = P_{in} - P_{ut} \qquad \text{där} \begin{cases} P_{in} = u_1 \rho c T_1 + u_2 \rho c T_2 \\ P_{ut} = u_3 \rho c T \\ E = V T \rho c = A h T \rho c \end{cases}$$

dvs $$\frac{dE}{dt} = \frac{d(AhT\rho c)}{dt} = A\rho c\frac{d(hT)}{dt} = A\rho c[h'T + hT']$$

Konstanter bryts ur derivatan

Enligt formel för derivatan av en produkt

Vi får alltså

$$A\rho c[h'T + hT'] = u_1 \rho c T_1 + u_2 \rho c T_2 - u_3 \rho c T$$

Förenkling

$$A[h'T + hT'] = u_1 T_1 + u_2 T_2 - u_3 T$$

$$\Rightarrow hT' = \frac{u_1 T_1 + u_2 T_2 - u_3 T}{A} - h'T = \frac{u_1 T_1 + u_2 T_2 - u_3 T - T(u_1 + u_2 - u_3)}{A}$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} = \frac{u_1(T_1 - T) + u_2(T_2 - T)}{Ah}$$

Tillståndsmodellen blir

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = \dfrac{1}{A}(u_1 + u_2 - u_3) & (1) \\ \dfrac{dT}{dt} = \dfrac{1}{Ah}\left[u_1(T_1 - T) + u_2(T_2 - T)\right] & (2) \end{cases}$$

Modellen är olineär pga produkter och kvoter av variabler i ekvation (2)

4

a) $1/T = 0$. Vrid upp K till självsvängning dvs $\angle G(i\omega) = -180°$ ($\omega = \omega_\pi$!)

$$\angle G = -3\,\text{arctg}\,\omega_\pi = -180° \Rightarrow \omega_\pi = \sqrt{3}$$

$$\therefore\; T_{sv} = \frac{2\pi}{\omega_\pi} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \Rightarrow T_i = \frac{T_{sv}}{1.2} \approx 3.0$$

Vid självsvängning är $\omega_c = \omega_\pi = \sqrt{3}$

$$\therefore\; \frac{K_{sv}}{|1 + i\sqrt{3}|^3} = 1 \Rightarrow K_{sv} = 8$$

$$K_r = 0.45 * K_{sv} = 3.6$$

$$\therefore\; G_{PI}(s) = 3.6\left(1 + \frac{1}{3s}\right)$$

b) $$G(s) = G_{PI}(s)\, G_{process}(s) = \frac{1.2}{s} \cdot \frac{1 + 3s}{(1 + s)^3}$$

Bodeformen: $$G(i\omega) = \frac{1.2}{i\omega}\, \frac{1 + i\omega/0.33}{(1 + i\omega/1.0)^3}$$

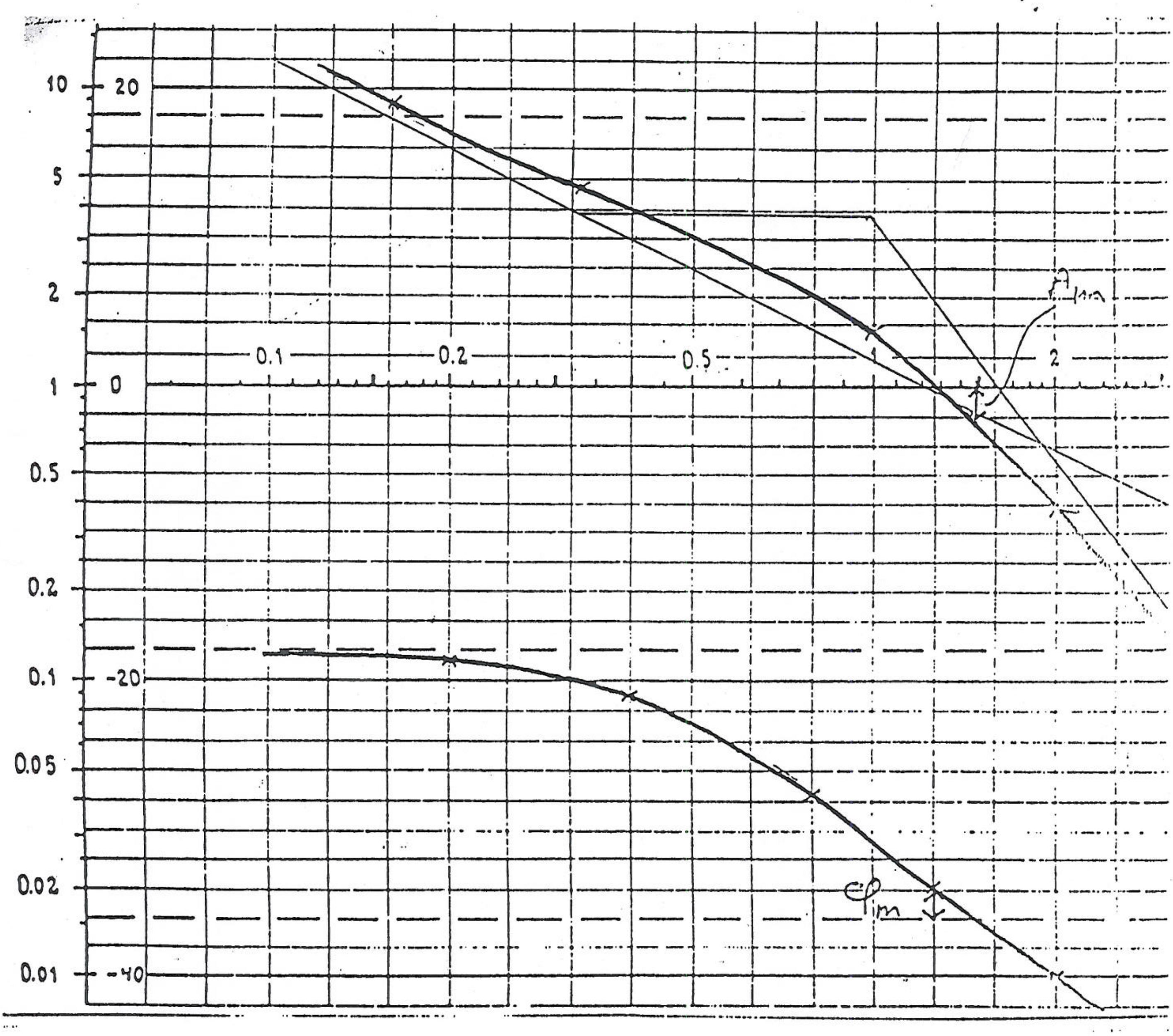
$$\angle G(i\omega) = -90° + \text{arctg}(3\omega) - 3\,\text{arctg}\,\omega$$

Se Bodediagram på nästa sida!

$\varphi_m \approx 10°$ och $A_m \approx 3\,dB$

Mycket svag stabilitet! (Ej användbar)

4 forts

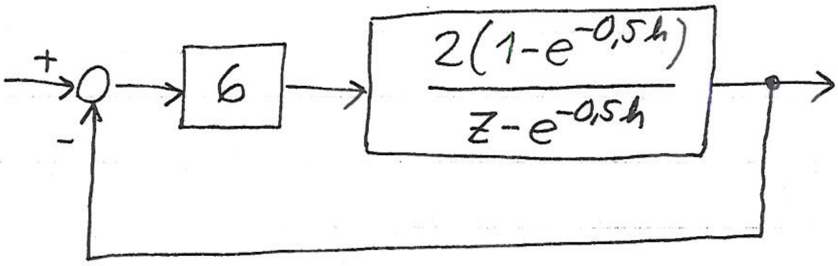


5

Diskretisering av $G(s)$ ger

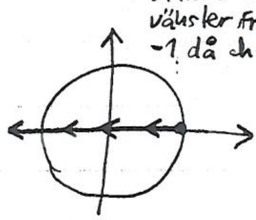
$$H(z) = \frac{2(1-e^{-0,5h})}{z-e^{-0,5h}}$$

Om amplitudmarginalen skall vara $\overbrace{2 \text{ ggr}}^{\text{då } K=3}$ gäller att systemet med $K=6$ skall vara på instabilitetsgränsen, (blockschemat nedan)



$\Rightarrow$ Kar ekv. $\quad z-e^{-0,5h}+12(1-e^{-0,5h})=0$

Polen vandrar åt vänster från −1 då $h\to\infty$



Pol $\Rightarrow$ $\quad z = 13e^{-0,5h}-12$

För att $\overbrace{\text{systemet}}^{\text{ovan}}$ skall vara på instabilitetsgränsen krävs att $z=-1$ dvs.

$$13e^{-0,5h}-12=-1$$

$$\Rightarrow \quad e^{-0,5h}=\frac{11}{13}$$

$$-0,5h = \ln\left(\frac{11}{13}\right) \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\ln\left(\frac{11}{13}\right)}{-0,5} =$$

$$= -2\ln\left(\frac{11}{13}\right) = 0,334$$

Svar $\quad 0,334$ s.

Inverstransformering av blocken ger

6

a)

$$\frac{X_1}{U_1} = \frac{1}{2s+1} \Rightarrow X_1(2s+1) = U_1 \Rightarrow \dot{x}_1 = -0{,}5\,x_1 + 0{,}5\,u_1$$

$$\frac{X_2}{U_1} = \frac{0{,}8}{5s+1} \Rightarrow X_2(5s+1) = 0{,}8\,U_1 \Rightarrow \dot{x}_2 = -0{,}2\,x_2 + 0{,}16\,u_1$$

$$\frac{X_3}{U_2} = \frac{0{,}8}{3s+1} \Rightarrow X_3(3s+1) = 0{,}8\,U_2 \Rightarrow \dot{x}_3 = -\frac{1}{3}x_3 + \frac{0{,}8}{3}u_2$$

$$\frac{X_4}{U_2} = \frac{1}{4s+1} \Rightarrow X_4(4s+1) = U_2 \Rightarrow \dot{x}_4 = -0{,}25\,x_4 + 0{,}25\,u_2$$

På matrisform fås:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0{,}16 & 0 \\ 0 & 0{,}267 \\ 0 & 0{,}25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Tilläggsekvation $y_1 = x_1 + x_3$ $y_2 = x_2 + x_4$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

---

b) Diagrammet ger:

$$K \cdot 2 = \frac{1}{2{,}5} \Rightarrow \text{Välj } K = 0{,}2$$

7

a) Återkopplingslagen ger:

$$\frac{T}{T_i} = \frac{\frac{1}{1+30\cdot s}}{1 + \frac{1}{(1+30\cdot s)}\cdot 3{,}6 \cdot 1{,}2\left(1+\frac{1}{45\cdot s}+s\right)} =$$

$$= \frac{45\cdot s}{(1+30s)\cdot 45\cdot s + 3{,}6\cdot 1{,}2\,(45\cdot s + 1 + 45s^2)} =$$

$$= \frac{45\cdot s}{4{,}32 + 239{,}4\cdot s + 1544{,}4\cdot s^2}$$

---

b) Lämplig metod är att bestämma systemets poler
Polerna = rötterna till den karakteristiska ekvationen.

$$\Rightarrow \quad 1544{,}4\, s^2 + 239{,}4\, s + 4{,}32 = 0$$

$$\Rightarrow \quad s^2 + 0{,}155\, s + 0{,}0028 = 0$$

$$\Rightarrow \quad s = -\frac{0{,}155}{2} \pm \sqrt{\frac{0{,}155}{2} - 0{,}0028} =$$

$$= -0{,}0775 \pm 0{,}0566$$

$$\Rightarrow \quad s_1 = -0{,}0775 + 0{,}0566 = -0{,}0209$$

$$s_2 = -0{,}0775 - 0{,}0566 = -0{,}1341$$

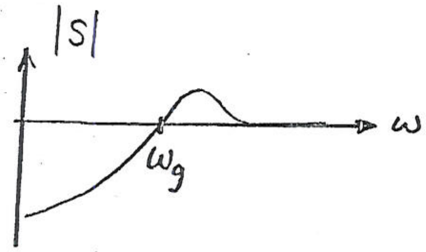
$\Rightarrow$ Två reella poler i vänstra halvplanet $\Rightarrow$ Systemet är stabilt

8

Känslighetsfunktionen

$$S = \frac{1}{1+G_R G_P} = \frac{1}{1+\frac{16}{(1+s)^2}} = \frac{(1+s)^2}{(1+s)^2+16} =$$

$$= \frac{s^2+2s+1}{s^2+2s+17}$$



$$S(j\omega) = \frac{1-\omega^2+2j\omega}{17-\omega^2+2j\omega}$$

Principiellt utseende på amplitudkurvan för S

$$|S(j\omega)| = \frac{\sqrt{(1-\omega^2)^2+4\omega^2}}{\sqrt{(17-\omega^2)^2+4\omega^2}} = 1$$

Vi ska bestämma den frekvens ω_g där $|S|=1$

Ekv. $(1-\omega^2)^2+4\omega^2 = (17-\omega^2)^2+4\omega^2$ Sätt $\omega^2=p$

$$\Rightarrow (1-p)^2 = (17-p)^2$$

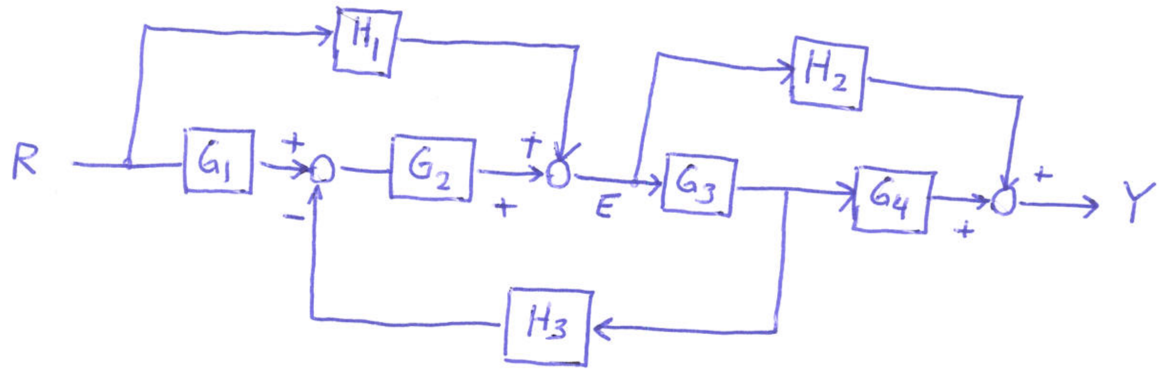
$$\Rightarrow 1-2p+p^2 = 289-34p+p^2$$

$$\Rightarrow 32p = 288 \quad \Rightarrow p = \frac{288}{32} = 9$$

$$\Rightarrow \omega_g = 3$$

Svar Regulatorn dämpar störningarna upp till frekvensen $\omega = 3$ rad/s. Därefter hänger den inte med längre.

9



Ekvationsmetoden ger (med hjälpvariabeln E)

$$\begin{cases} E = RH_1 + G_2(RG_1 - EG_3H_3) & (1) \\ Y = EH_2 + EG_3G_4 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \quad E(1 + G_2G_3H_3) = R(H_1 + G_1G_2)$$

$$\text{dvs} \quad E = R\,\frac{(H_1 + G_1G_2)}{(1 + G_2G_3H_3)}$$

$$(2) \quad Y = E(H_2 + G_3G_4) = \frac{R(H_1 + G_1G_2)(H_2 + G_3G_4)}{(1 + G_2G_3H_3)}$$

$$\Rightarrow \quad G_{TOT} = \frac{Y}{R} = \frac{(H_1 + G_1G_2)(H_2 + G_3G_4)}{(1 + G_2G_3H_3)} =$$

$$= \frac{H_1H_2 + H_1G_3G_4 + H_2G_1G_2 + G_1G_2G_3G_4}{1 + G_2G_3H_3}$$

10

a. Den frekvens erhålles som $f = \frac{\Omega}{2\pi} \cdot f_s$, där Ω är vinkeln hos nollstället i övre halvplanet.

Nollställena ges i sin tur av

$z^2 + 1,2z + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = -0,6 \pm j\sqrt{0,6^2 - 1} = -0,6 \pm j0,8 = e^{\pm j126,9^\circ} = e^{\pm j2,21\,\mathrm{rad}}$, så att

$\Omega = 126,9^\circ = 2,21$ rad .

Alltså släcks frekvensen $f = \frac{2,21}{2\pi} \cdot 800\ \mathrm{Hz} = \underline{\underline{282\mathrm{Hz}}}$

b. Vi utgår från det analoga LP-filtret $H_{\mathrm{LP}}(s) = \frac{1}{s+1}$ med gränsvinkelfrekvensen $\omega_{\mathrm{gLP}} = 1$ rad/s . Detta transformerar vi till ett analogt HP-filter med gränsvinkelfrekvensen ω_{gHP} enligt $s \rightarrow \frac{\omega_{\mathrm{gLP}} \cdot \omega_{\mathrm{gHP}}}{s} = \frac{\omega_{\mathrm{gHP}}}{s}$, så att

$$H_{\mathrm{HP}}(s) = \frac{1}{\frac{\omega_{\mathrm{gHP}}}{s} + 1} = \frac{s}{s + \omega_{\mathrm{gHP}}}.$$

ω_{gHP} ges av $\omega_{\mathrm{gHP}} = \tan\frac{\Omega_g}{2}$, där Ω_g är den normerade vinkelfrekvens som motsvarar det diskreta filtrets övre gränsfrekvens.

Alltså: $\quad \Omega_g = 2\pi \cdot \frac{500\mathrm{Hz}}{10\mathrm{kHz}}\ \mathrm{rad} = 0,314159\ \mathrm{rad}$, så att

$$\omega_{\mathrm{gHP}} = \tan\frac{0,314159\ \mathrm{rad}}{2} = 0,15838 .$$

Överföringsfunktionen $H(z)$ för det diskreta filtret ges nu av $H(z) = [H_{\mathrm{HP}}(s)]_{s=\frac{z-1}{z+1}}$, där alltså

$H_{\mathrm{HP}}(s) = \frac{s}{s + \omega_{\mathrm{gHP}}} = \frac{s}{s + 0,15838}$, vilket ger

$$H(z) = \frac{\frac{z-1}{z+1}}{\frac{z-1}{z+1} + \omega_{\mathrm{gHP}}} = \frac{\frac{z-1}{z+1}}{\frac{z-1}{z+1} + 0,15838} = \frac{z-1}{z - 1 + 0,15838\,(z+1)} = \underline{\underline{\frac{z-1}{1,15838\,z - 0,8416}}} = \underline{\underline{0,8633 \cdot \frac{z-1}{z - 0,7265}}}$$