Reglerteknik D3

(Kurs nr ERE 100)

Tentamen 030821

Tid: 14:15-18:15, Lokal: M-huset

Lärare: Stefan Pettersson, tel 5146

Tentamen omfattar 25 poäng, där betyg tre fordrar 10 poäng, betyg fyra 15 poäng och betyg fem 20 poäng.

Tentamenresultat anslås senast den *3 september* på avdelningens anslagstavla samt på kursens hemsida.

Granskning av rättning sker den *3 och 4 september* kl 12:00-12:30 på avdelningen.

Tillåtna hjälpmedel:

- Formelsamling i reglerteknik (gammal och ny)
- Bode diagram
- Matematiska och fysikaliska tabeller, t ex Beta och Physics handbook
- Valfri kalkylator med rensat minne (dock ej lösa anteckningar). Ej handdator.

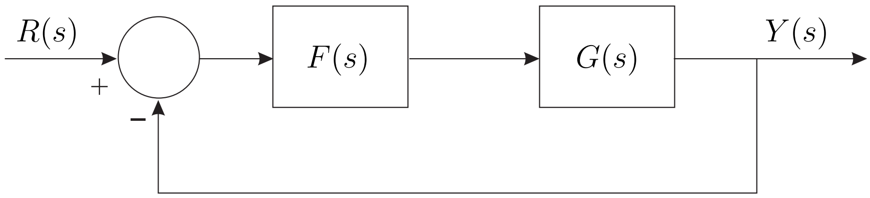
Lycka till!

Avdelningen för reglerteknik och automation
Institutionen för signaler och system
Chalmers tekniska högskola

1

Betrakta det återkopplade systemet enligt figur, där

$$F(s) = K, \qquad G(s) = \frac{1}{s}$$



a) Skissa det återkopplade systemets utsignal $y(t)$ i fallet då $r(t)$ är ett (enhets-) steg.

(1p)

b) Bestäm systemets fasmarginal.

(1p)

c) Uppskatta det maximala värdet av $|S(j\omega)| + |T(j\omega)|$, där S och T är känslighetsfunktionen respektive komplementära känslighetsfunktionen.

(2p)

2

Den tidskontinuerliga överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s)G_2(s), \quad \text{där} \quad G_1(s) = \frac{4}{s+1} \quad \text{och} \quad G_2(s) = \frac{4}{s+2}$$

skall regleras med en dator. För att åstadkomma detta skall $G(s)$ diskretiseras. Antag att samplingsintervallet är $h = \ln 2$ och att datorn lägger ut en styckvis konstant styrsignal $u(t)$.

a) Vad är den motsvarande tidsdiskreta överföringsfunktionen $G_d(z)$?

(2p)

b) Bestäm en tidsdiskret regulator så att samtliga poler hos det återkopplade systemet hamnar i origo.

Ledning: Ansätt följande regulatorstruktur

$$F_d(z) = \frac{D(z)}{C(z)} = \frac{d_0 + d_1 z^{-1}}{c_0 + c_1 z^{-1}}.$$

(3p)

3

Betrakta det återkopplade systemet enligt figuren i uppgift 1, där

$$F(s) = K, \qquad G(s) = -2\frac{s-1}{s^2+5s+4}$$

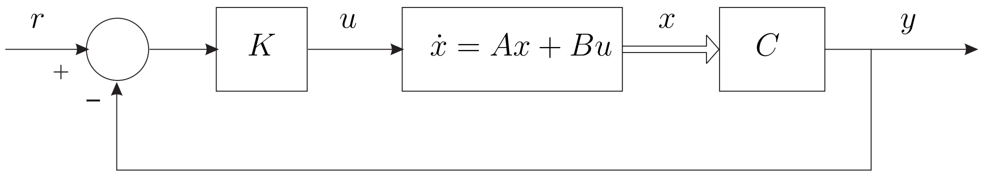
a) Rita Bodediagrammet för $L(s) = F(s)G(s)$ i fallet då $K = 1$. Markera tydligt asymptoterna i amplituddiagrammet. (3p)

b) Bestäm K så att amplitudmarginalen blir 3. (2p)

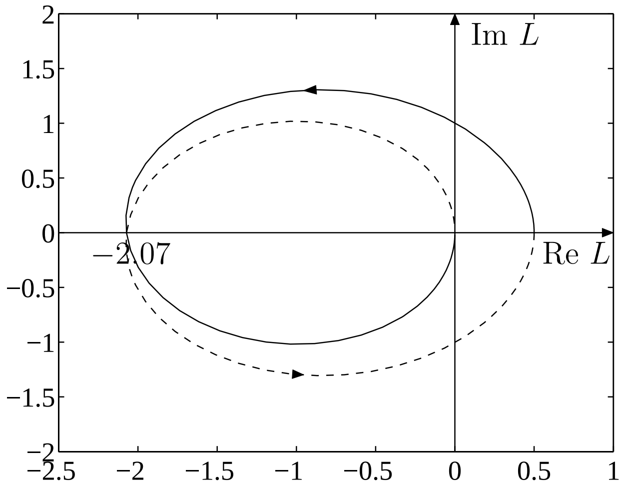
4

Betrakta följande återkopplade system, där

$$A = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0.5 \end{bmatrix},$$



Avbildningen av kretsförstärkningen $L(s)$ för $K = 2$ då s genomlöper Nyquists kontur medurs i högra halvplanet visas i följande figur.

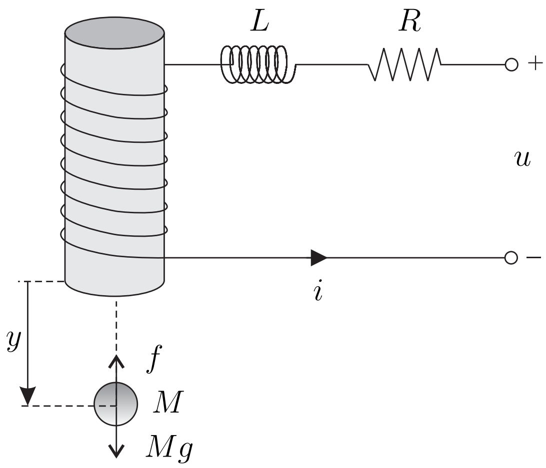


a) Visa att det återkopplade systemet är stabilt för $K = 2$. (3p)

b) Avgör för vilka värden på K som det återkopplade systemet är stabilt. (2p)

5

Figuren visar en kula (av järn) med massan M, påverkad av en elektromagnet med lyftkraften $f(t)$.



Lyftkraften är med proportinalitetskonstanten K proportionell mot strömmen $i(t)$ i kvadrat och omvänt proportionell mot avståndet $y(t)$ mellan kulan och elektromagneten.

a) Ställ upp en tillståndsmodell för systemet, där insignalen u är pålagd spänning och utsignalen är kulans position y.

(2p)

b) Vilken spänning u_0 behövs för att hålla still kulan på avståndet y_0?

(1p)

c) Linjärisera systemet kring jämviktspunkten (u_0, y_0).

(2p)

d) Är det linjäriserade systemet stabilt? Motivera svaret.

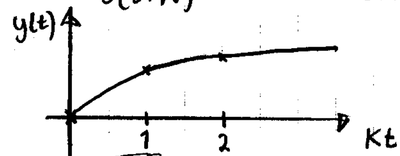
(1p)

REGLERTEKNIK D3, LÖSNINGAR TENTAMEN 030821

1 a)

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K\cdot\frac{1}{s}}{1+K\frac{1}{s}} = \frac{K}{s+K} \Rightarrow Y(s) = \frac{K}{s(s+K)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+K}$$

$$y(t) = 1 - e^{-Kt} \quad t \geq 0$$



b)

$$\varphi_m = 180^\circ + \angle L(j\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ = \boxed{90^\circ}$$

c)

$$|S(j\omega)| + |T(j\omega)| = \left|\frac{1}{1+K\frac{1}{j\omega}}\right| + \left|\frac{K\cdot\frac{1}{j\omega}}{1+K\cdot\frac{1}{j\omega}}\right| = \frac{\omega}{\sqrt{K^2+\omega^2}} + \frac{K}{\sqrt{K^2+\omega^2}} = \frac{K+\omega}{\sqrt{K^2+\omega^2}}$$

$$\frac{d}{d\omega}\left(|S(j\omega)|+|T(j\omega)|\right) = \frac{1\cdot\sqrt{K^2+\omega^2} - (K+\omega)\cdot\frac{1}{2}2\omega\frac{1}{\sqrt{K^2+\omega^2}}}{K^2+\omega^2} = 0$$

$$K^2+\omega^2 - (K+\omega)\omega = 0 \Rightarrow K(K-\omega) = 0 \Rightarrow \omega = K$$

$$|S(jK)| + |T(jK)| = \frac{2K}{\sqrt{2K^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{2}}$$

2 a)

$$G(s) = \frac{16}{(s+1)(s+2)} = \frac{16}{s+1} - \frac{16}{s+2} \Rightarrow G_d(z) = \frac{16(1-e^{-h})z^{-1}}{1-e^{-h}z^{-1}} - \frac{8(1-e^{-2h})z^{-1}}{1-e^{-2h}z^{-1}}$$

$$h = \ln 2 \Rightarrow G_d(z) = \frac{16(1-1/2)z^{-1}}{1-1/2\,z^{-1}} - \frac{8(1-1/2^2)z^{-1}}{1-1/2^2\,z^{-1}} = \frac{8z^{-1}}{1-0{,}5z^{-1}} - \frac{6z^{-1}}{1-0{,}25z^{-1}}$$

$$G_d(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{8z^{-1}(1-0{,}25z^{-1}) - 6z^{-1}(1-0{,}5z^{-1})}{(1-0{,}5z^{-1})(1-0{,}25z^{-1})} = \boxed{\frac{2z^{-1}+z^{-2}}{1-0{,}75z^{-1}+0{,}125z^{-2}}}$$

b) Kar. ekv

$$1 + F_d(z)\cdot G_d(z) = 1 + \frac{D(z)}{C(z)}\cdot\frac{B(z)}{A(z)} = \frac{A(z)C(z)+B(z)D(z)}{A(z)C(z)}$$

Polerna ges av $A(z)C(z) + B(z)D(z) \equiv P(z)$

$$(1-0{,}75z^{-1}+0{,}125z^{-2})\cdot(c_0+c_1z^{-1}) + (2z^{-1}+z^{-2})(d_0+d_1z^{-1}) \equiv (1-\underset{0}{p}z^{-1})^3 = 1$$

$$c_0 - 0{,}75c_0z^{-1} + 0{,}125c_0z^{-2} + c_1z^{-1} - 0{,}75c_1z^{-2} + 0{,}125c_1z^{-3} + 2d_0z^{-1} + 2d_1z^{-2} + d_0z^{-2} + d_1z^{-3} = 1$$

$$\Rightarrow z^0: c_0 = 1$$

$$z^{-1}: -0{,}75c_0 + c_1 + 2d_0 = 0$$

$$z^{-2}: 0{,}125c_0 - 0{,}75c_1 + 2d_1 + d_0 = 0$$

$$z^{-3}: 0{,}125c_1 + d_1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_0 = 1 \\ c_1 + 2d_0 = 0{,}75 \\ 0{,}75c_1 - 2d_1 - d_0 = 0{,}125 \\ 0{,}125c_1 + d_1 = 0 \end{cases}$$

$$c_1 = 0{,}75 - 2d_0 \Rightarrow \begin{cases} 0{,}75(0{,}75-2d_0) - 2d_1 - d_0 = 0{,}125 \\ 0{,}125(0{,}75-2d_0) + d_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}5625 - 2{,}5d_0 - 2d_1 = 0{,}125 \\ 0{,}1875 - 0{,}5d_0 + 2d_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 0{,}75 - 3d_0 = 0{,}125 \Rightarrow d_0 = 5/24$$

$$\Rightarrow d_1 = -1/24 \Rightarrow c_1 = 1/3$$

$$\therefore \boxed{c_0 = 1,\quad c_1 = 1/3,\quad d_0 = 5/24,\quad d_1 = -1/24}$$

3 a) $L(s) = KG(s) \overset{K=1}{=} -2\,\frac{s-1}{s^2+5s+4} = 2\,\frac{1-s}{(1+s)(4+s)} = 0{,}5\,\frac{1-s}{(1+s)(1+s/4)}$

Brytpunkt $\omega = 4$ rad/s , LF-asymptot 0,5

$\underline{/L(j\omega)} = \arctan(-\omega) - \arctan\omega - \arctan\omega/4 = -2\arctan\omega - \arctan\omega/4$

b) $\underline{/L(j\omega_\pi)} = -180^\circ \Rightarrow \omega_\pi = 3$ rad/s

$A_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|} = \frac{2}{K}\sqrt{1+\frac{\omega_\pi^2}{16}} = \frac{2}{K}\sqrt{1+\frac{9}{16}} = 3 \Rightarrow K = \frac{2{,}5}{3} = \boxed{5/6}$

4 a) Enligt Nyquistplotten är $N=-2$ (2 moturs omslingringar)

P bestäms från $L(s)$ nämnarpolynom, som ges av

$\det(sI-A) = \begin{vmatrix} s+0{,}1 & -0{,}2 & 1 \\ -1 & s & 0 \\ 0 & -1 & s \end{vmatrix} = s^2(s+0{,}1) + 1 + 0{,}2s = s^3 + 0{,}1s^2 + 0{,}2s + 1$

Routh-Hurwitz

s^3	1	0,2
s^2	0,1	1
s^1	c_1	0
s^0	d_1	

$c_1 = \frac{0{,}1\cdot 0{,}2 - 1\cdot 1}{0{,}1} = -9{,}8$, $d_1 = 1$

Två teckenväxlingar $\Rightarrow P=2$

$Z = P+N = 2-2 = 0$, dvs stabilt återkopplat system

b) Stabilt så länge $N=-2$, $\Rightarrow K\cdot\left(\frac{-2{,}07}{2}\right) < -1 \Rightarrow \boxed{K > 0{,}97}$

5 a) Kirchoff ger $-u + Ri + L\dot{i} = 0 \Rightarrow \dot{i} = -\frac{R}{L}i + \frac{1}{L}u$

Newton II ger $M\ddot{y} = Mg - f = Mg - Ki^2/y \Rightarrow \ddot{y} = g - \frac{K}{M}i^2/y$

Välj tillstånd $x_1 = i$, $x_2 = y$, $x_3 = \dot{y}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -R/L\,x_1 + 1/L\,u \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= g - \tfrac{K}{M}x_1^2/x_2 \\ y &= x_2 \end{aligned}}$

b) $\dot{x}_3 = 0 \Rightarrow x_{10} = \sqrt{\frac{Mg}{K}y_0}$, $\dot{x}_1 = 0 \Rightarrow u_0 = Rx_{10} = \boxed{R\sqrt{\frac{Mgy_0}{K}}}$

c) $A = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x_0} = \begin{bmatrix} -R/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2\frac{K}{M}\frac{x_{10}}{x_{20}} & \frac{K}{M}\frac{x_{10}^2}{x_{20}^2} & 0 \end{bmatrix} \underset{=}{\overset{\frac{x_{10}}{x_{20}} = \sqrt{\frac{Mg}{Ky_0}}}{=}} \begin{bmatrix} -R/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2\sqrt{\frac{Kg}{My_0}} & \frac{g}{y_0} & 0 \end{bmatrix}$

$B = \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{x_0} = [\,1/L \quad 0 \quad 0\,]^T$, $C = [\,0 \quad 1 \quad 0\,]$

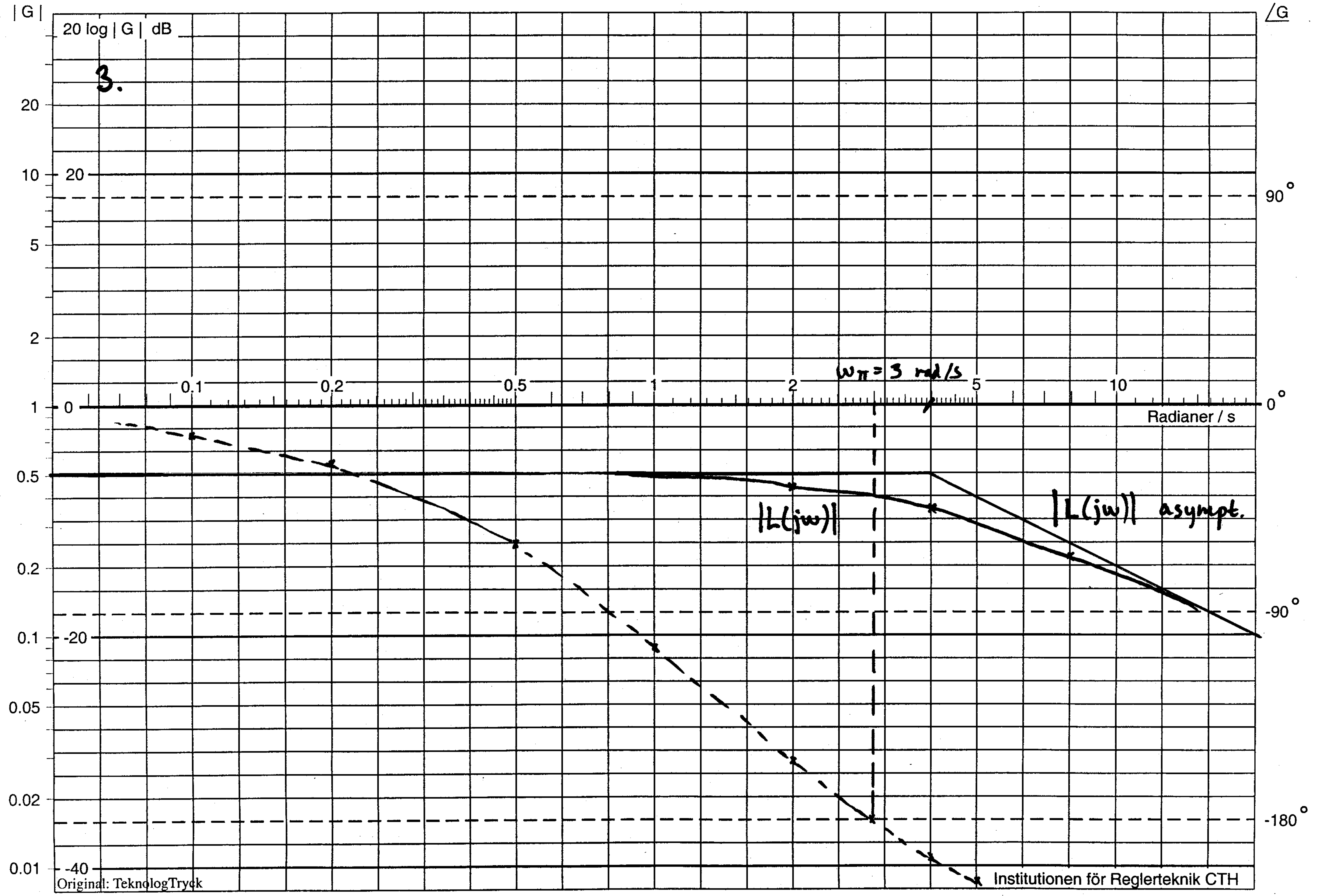
$\Delta\dot{x} = A\Delta x + B\Delta u$, $\Delta y = C\Delta x$

d) Stab. ges av egenvärdena (polerna) till systemet. $\Rightarrow$

$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + R/L & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 2\sqrt{\frac{Kg}{My_0}} & -\frac{g}{y_0} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda + R/L) - \frac{g}{y_0}(\lambda + R/L) = 0$

$\Rightarrow \left(\lambda^2 - \frac{g}{y_0}\right)(\lambda + R/L) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{g/y_0}$, $\lambda_3 = -R/L$

$\therefore$ systemet är instabilt ty 1 pol i HHP.



|G|
20 log |G| dB
3.
20
10
20
5
2
1
0
0.5
0.2
0.1
-20
0.05
0.02
0.01
-40
∠G
90°
0°
-90°
-180°
0.1
0.2
0.5
1
2
5
10
Radianer / s
ω_π = 3 rad/s
|L(jω)|
|L(jω)| asympt.
Original: TeknologTryck
Institutionen för Reglerteknik CTH