Reglerteknik D3

(Kurs nr ERE 100)

Tentamen 020406

Tid: 14:15-18:15, Lokal: V-huset

Lärare: Stefan Pettersson, tel 5146

Tentamen omfattar 25 poäng, där betyg tre fordrar 10 poäng, betyg fyra 15 poäng och betyg fem 20 poäng.

Tentamenresultat anslås senast den *23 april* på avdelningens anslagstavla samt kursens hemsida.

Granskning av rättning sker den *23 och 24 april* kl 12:30-13:00 på avdelningen.

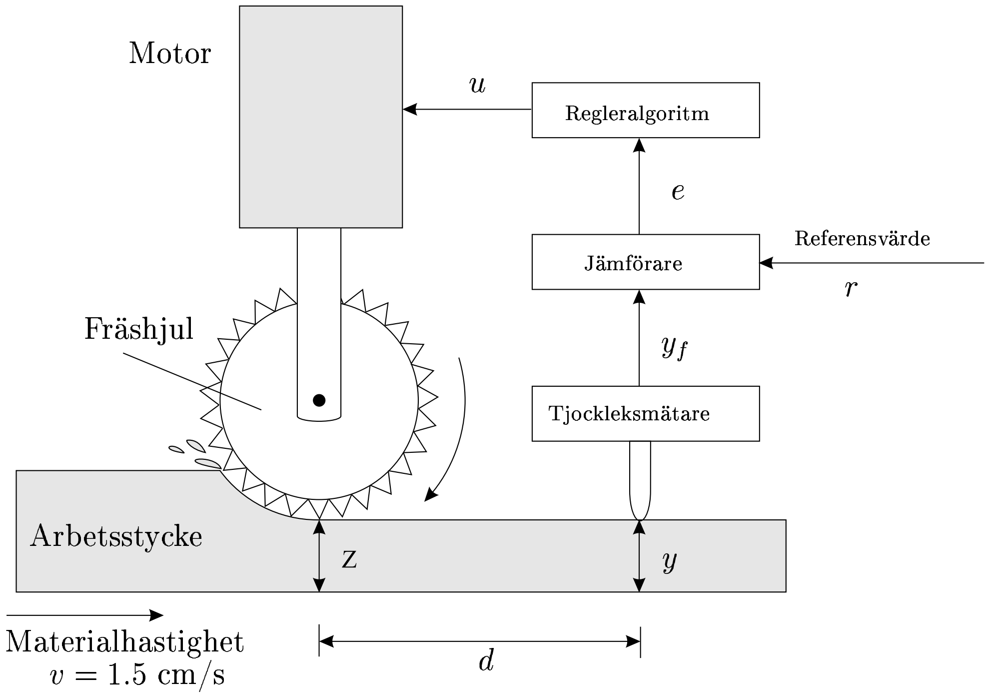
Tillåtna hjälpmedel:

- Formelsamling i reglerteknik (gammal och ny)
- Bode diagram
- Matematiska och fysikaliska tabeller, t ex Beta och Physics handbook
- Valfri kalkylator (dock ej lösa anteckningar)

Lycka till!

Avdelningen för reglerteknik och automation
Institutionen för signaler och system
Chalmers tekniska högskola

1



Figuren ovan visar en fräs med automatisk reglering av fräsdjupet. Arbetsstyckets hastighet i förhållande till fräshjulet är $v = 1.5$ cm/s. Fräshjulet höjs och sänks med motorn enligt figur. Tjockleken y mäts med en givare placerad d meter från hjulet. Givaren antas vara av lågpasskaraktär med följande överföringsfunktion

$$\frac{Y_f(s)}{Y(s)} = \frac{10}{s + 10}$$

Felet e in till regleralgoritmen är differensen mellan den önskade tjockleken r och den mätta filtrerade tjockleken y_f. Regleralgoritmen består av en I-regulator med överföringsfunktion från felet e till inspänningen till motorn u enligt

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{0.25}{s}$$

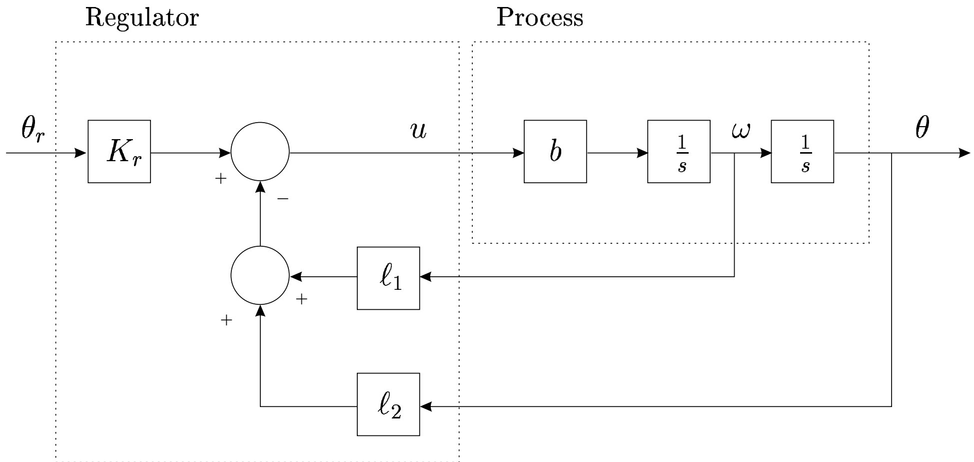
Tjockleken z som resultat av fräshjulets position antages vara proportionell mot inspänningen u enligt $z = 0.4u$.

a) Rita ett blockschema över reglersystemet, där överföringsfunktioner i blocken samt introducerade signaler tydligt framgår.

(3p)

b) Bestäm d för vilket reglersystemet är stabilt.

(2p)



2

Betrakta ovanstående reglersystem bestående av en (satellit) process och regulator.

a) Bestäm ℓ_1 och ℓ_2 så att det återkopplade systemet får ett komplexkonjugerat polpar med dämpning ζ och odämpad svängningsfrekvens ω_n.

(2p)

b) Bestäm K_r så att

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{\theta}{\theta_r} = 1$$

(2p)

3

Betrakta ett system bestående av följande överföringsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{3e^{-s}}{2s + 3e^{-s}}$$

a) Visa att systemet är stabilt.

(2p)

b) Hur ser den stationära utsignalen ut då insignalen är

$$r(t) = 2\sin(\pi t + 34^\circ)$$

(2p)

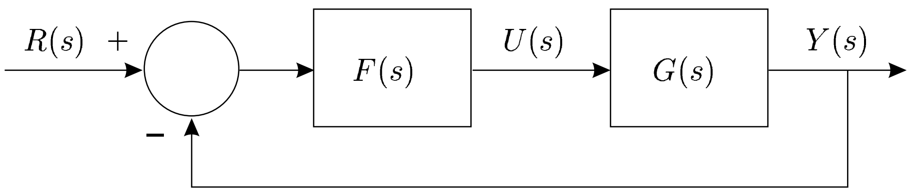
4

Betrakta det öppna systemet

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s+1)}$$

Systemet återkopplas enligt figur nedan, där $F(s)$ är en PI-regulator

$$F(s) = K\left(\frac{1+Ts}{s}\right)$$



a) För vilka värden på K och T är det återkopplade systemet stabilt?

(2p)

b) Visa att

$$\max_{\omega_c} \varphi_m = \arctan \frac{T-1}{2\sqrt{T}}$$

där ω_c är överkorsningsfrekvensen och φ_m önskad fasmarginal.

(3p)

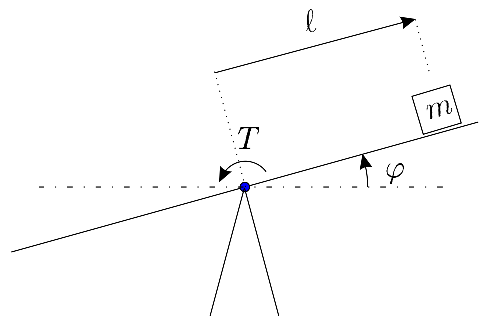
c) Bestäm K och T så att

$$\max_{\omega_c} \varphi_m = 45^\circ$$

(2p)

5

Betrakta figuren på nästa sida, där ett arbetsstycke med massan m förflyttas på ett lutande plan. Låt avståndet från rotationscentrum till massan vara ℓ och vinkeln mellan horisontallinjen och planet φ. Arbetsstycket styrs med hjälp av ett moment T applicerat kring planets rotationscentrum. Antag att friktion och luftmotstånd är försumbart samt att hela massan är koncentrerad i dess centrum.



a) Visa att den olinjära tillståndsmodellen som beskriver arbetsstyckets rörelse ges av

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{T}{mx_3^2} - \frac{g\cos x_1}{x_3} \\ x_4 \\ -g\sin x_1 + x_2^2 x_3 \end{bmatrix}$$

där momentet T är insignal och tillstånden $x_1 = \varphi$, $x_2 = \dot{\varphi}$, $x_3 = \ell$ och $x_4 = \dot{\ell}$.

Ledning: Ställ dels upp momentbalansen kring rotationscentrum och dels kraftbalans på massan. Centrifugalkraften som verkar på massan ges av $m\dot{\varphi}^2\ell$.

(2p)

b) Bestäm en linjär tillståndsmodell som beskriver avvikelser kring jämviktsläget vid godtycklig position ℓ_0.

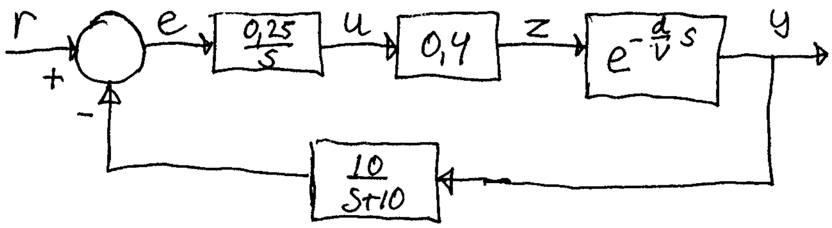
(2p)

c) Var hamnar systemets poler?

(1p)

LÖSNINGAR TENTA REGLERTEKNIK D3 020406

1 a) $\frac{Y}{Z} = e^{-T_d s}$ där $T_d = \frac{d}{v}$ och $v = 1{,}5$



b) $$L(s) = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}4 \cdot e^{-\frac{d}{1{,}5}s} \cdot 10}{s(s+10)} = \frac{e^{-\frac{d}{1{,}5}s}}{s(s+10)}$$

$$|L(j\omega_c)| = \frac{1}{\omega_c\sqrt{\omega_c^2+100}} \equiv 1 \Rightarrow \omega_c^4 + 100\omega_c^2 - 1 = 0$$

$$\omega_c^2 = -50 \underset{(-)}{\pm} \sqrt{2500+1} \Rightarrow \omega_c = \underset{(-)}{+}\sqrt{-50+\sqrt{2500+1}} = 0{,}1$$

Stab. om $\angle L(j\omega_c) > -180° \Rightarrow -\frac{d}{1{,}5}\,\omega_c \cdot \frac{180°}{\pi} - 90° - \arctan\frac{\omega_c}{10} > -180°$

$$\Rightarrow d < \left(90 - \arctan\frac{\omega_c}{10}\right) \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1{,}5}{\omega_c} = \underline{\underline{23{,}4 \text{ cm}}}$$

2 a) $u = K_r\theta_r - l_1\omega - l_2\theta$; $\ddot{\theta} = bu = b(K_r\theta_r - l_1\underset{\dot{\theta}}{\omega} - l_2\theta) \Rightarrow$

$$\ddot{\theta} + bl_1\dot{\theta} + bl_2\theta = bK_r\theta_r \Rightarrow \frac{\theta}{\theta_r} = \frac{bK_r}{s^2 + bl_1 s + bl_2} = \frac{\cdots}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$\therefore$ $2\zeta\omega_n = bl_1 \Rightarrow \underline{\underline{l_1 = \frac{2\zeta\omega_n}{b}}}$; $\omega_n^2 = bl_2 \Rightarrow \underline{\underline{l_2 = \omega_n^2/b}}$

b) $$\lim_{\omega \to 0} \frac{\theta}{\theta_r} = \frac{\cancel{b}K_r}{\cancel{b}l_2} \equiv 1 \Rightarrow \underline{\underline{K_r = l_2}}$$

3 a) $$G(s) = \frac{3e^{-s}}{2s + 3e^{-s}} = \frac{\frac{3e^{-s}}{2s}}{1 + \underbrace{\frac{3e^{-s}}{2s}}_{L(s)}}$$; $\angle L(j\omega_\pi) = -\omega_\pi \cdot \frac{180}{\pi} - 90° = -180° \Rightarrow \omega_\pi = \frac{\pi}{2}$

$|L(j\omega_\pi)| = \frac{3}{2\omega_\pi} = \frac{3}{\pi} < 1$ Stab. enl. förenklade Nyquist

b) $$y(t) = 2\,|G(j\pi)|\,\sin(\pi t + 34° + \angle G(j\pi))$$

$$|G(j\pi)| = \frac{3}{|2j\pi + 3\underbrace{\cos\pi}_{-1} - 3j\underbrace{\sin\pi}_{0}|} = \frac{3}{\sqrt{9+4\pi^2}} = 0{,}43$$

$$\angle G(j\pi) = -\pi \cdot \frac{180}{\pi} - \arctan\frac{2\pi + 3\sin\pi}{3\cos\pi} = -180° + 64{,}5° = -115{,}5°$$

$$y(t) = 0{,}86\sin(\pi t - 81{,}5°)$$

4 a) Kar. ekv. $1+L(s)=0 \Rightarrow 1+\frac{1}{s(s+1)}\frac{K(1+Ts)}{s}=0$

$s^3+s^2+KTs+K=0$

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & KT \\ s^2 & 1 & K \\ s^1 & c & 0 \\ s^0 & K & \end{array}$$

$c = KT-K = K(T-1)$

Stab om $\left.\begin{array}{l} K>0 \\ K(T-1)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{\begin{array}{l} K>0 \\ T>1 \end{array}}}$

b) $\varphi_m = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \omega_c - 90^\circ + \arctan \omega_c T = \arctan \frac{\omega_c T - \omega_c}{1+\omega_c^2 T} = \arctan \overbrace{\frac{\omega_c (T-1)}{1+\omega_c^2 T}}^{\tilde{\varphi}_m}$

$\frac{d\tilde{\varphi}_m}{d\omega_c} = \frac{(T-1)(1+\omega_c^2 T) - \omega_c (T-1) 2\omega_c T}{(\cdots)^2} = 0 \Rightarrow 1+\omega_c^2 T - 2\omega_c^2 T = 0,\ \omega_c^2 T = 1 \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{\sqrt{T}}$

$\max_{\omega_c} \tilde{\varphi}_m = \max_{\omega_c} \varphi_m = \arctan \frac{\frac{1}{\sqrt{T}}(T-1)}{1+1} = \arctan \frac{T-1}{2\sqrt{T}}$

c) $\frac{T-1}{2\sqrt{T}} = \tan 45^\circ = 1 \Rightarrow (T-1)^2 = T^2-2T+1 = 4T \Rightarrow T^2-6T+1=0 \Rightarrow T = 3 \pm \sqrt{9-1} = \underbrace{3+\sqrt{8}}_{5{,}83}$

$|L(j\omega_c)| = 1 \Rightarrow |F(j\omega_c)| = \frac{K\sqrt{1+\omega_c^2 T^2}}{\omega_c} = \frac{1}{|G(j\omega_c)|} = \omega_c \sqrt{1+\omega_c^2} \Rightarrow K = \frac{\omega_c^2 \sqrt{1+\omega_c^2}}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{1+1/T}}{\sqrt{2}\,T} = \underline{\underline{0{,}13}}$

5 a) Momentbalans $\underbrace{J}_{m\ell^2}\ddot{\varphi} = T - mg\ell\cos\varphi \Rightarrow \ddot{\varphi} = \frac{T}{m\ell^2} - \frac{g}{\ell}\cos\varphi$

Kraftbalans $m\ddot{\ell} = -mg\sin\varphi + m\dot{\varphi}^2\ell \Rightarrow \ddot{\ell} = -g\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\ell$

$$\begin{array}{ll} x_1 = \varphi & \dot{x}_1 = \dot{\varphi} = x_2 \\ x_2 = \dot{\varphi} \quad \Rightarrow & \dot{x}_2 = \ddot{\varphi} = \frac{T}{m\ell^2} - \frac{g}{\ell}\cos\varphi = \frac{T}{m x_3^2} - \frac{g}{\ell}\cos x_1 \\ x_3 = \ell & \dot{x}_3 = \dot{\ell} = x_4 \\ x_4 = \dot{\ell} & \dot{x}_4 = \ddot{\ell} = -g\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\ell = -g\sin x_1 + x_2^2 x_3 \end{array}$$

b) Jämvikt $\Rightarrow x_{20}=0,\ T_0 - mgx_{30}\cos x_{10} = 0,\ x_{40}=0,\ -g\sin x_{10} + \underbrace{x_{20}^2}_{0} x_{30} = 0$

$\Rightarrow x_{10} = n\cdot\pi \quad n=0,1,2\ldots$

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{g}{x_{30}}\sin x_{10} & 0 & \frac{g}{x_{30}}\cos x_{10} - \frac{2T_0}{m x_3^0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -g\cos x_{10} & 2x_{20}x_{30} & x_{20}^2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mp\frac{g}{\ell_0^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mp g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \left.\frac{\partial f}{\partial T}\right|_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/mx_{30}^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m\ell_0^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Delta\dot{x} = A\Delta x + B\Delta u$$

c) $\Delta\dot{x}_1 = \Delta x_2,\ \Delta\dot{x}_2 = \mp\frac{g}{\ell_0^2}\Delta x_3 + \frac{1}{m\ell_0^2}\Delta T,\ \Delta\dot{x}_3 = \Delta x_4,\ \Delta\dot{x}_4 = \mp g\Delta x_1$

$\Delta\overset{....}{x}_1 = \Delta\dddot{x}_2 = \mp\frac{g}{\ell_0^2}\Delta\ddot{x}_3 + \frac{1}{m\ell_0^2}\Delta\ddot{T} = \mp\frac{g}{\ell_0^2}\Delta\dot{x}_4 + \frac{1}{m\ell_0^2}\Delta\ddot{T} = \frac{g^2}{\ell_0^2}\Delta x_1 + \frac{1}{m\ell_0^2}\Delta\ddot{T}$

$\therefore$ Kar. ekv $s^4 = \frac{g^2}{\ell_0^2} \Rightarrow s^2 = \pm\frac{g}{\ell_0} \Rightarrow s = \begin{cases} \pm\sqrt{g/\ell_0} \\ \pm j\sqrt{g/\ell_0} \end{cases}$

$$\left(\text{Alt. } \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \mp\frac{g}{\ell_0^2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ \mp g & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda\cdot\begin{vmatrix} \lambda & \mp\frac{g}{\ell_0^2} & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & \mp\frac{g}{\ell_0^2} & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ \mp g & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - \frac{g^2}{\ell_0^2} = 0 \right)$$