Reglerteknik D3

(Kurs nr ERE 100)

Tentamen 010823

Tid: 14:15-18:15, Lokal: V-huset

Lärare: Stefan Pettersson, tel 5146

Tentamen omfattar 25 poäng, där betyg tre fordrar 10 poäng, betyg fyra 15 poäng och betyg fem 20 poäng.

Tentamenresultat anslås senast den *11 september* på avdelningens anslagstavla.

Granskning av rättning sker den *11 och 12 september* kl 12:30-13:00 på avdelningen.

Tillåtna hjälpmedel:

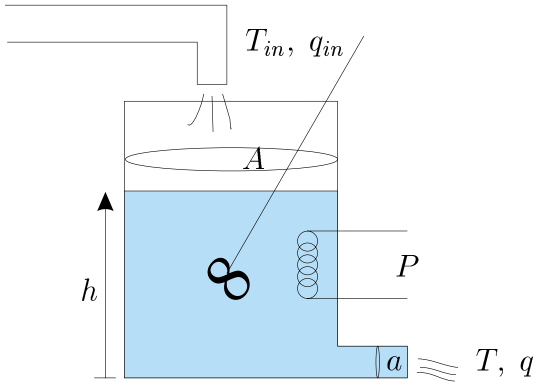
- Formelsamling i reglerteknik
- Bode diagram
- Matematiska och fysikaliska tabeller, t ex Beta och Physics handbook
- Kalkylator (med rensat minne)

Lycka till!

Institutionen för signaler och system
Avdelningen för reglerteknik och automation
Chalmers tekniska högskola

1

Betrakta nedanstående tank med area A, där vätska med temperaturen T_{in} rinner in i tanken med flöde q_{in}.



Vätskan med volymen V värms upp genom att elektrisk effekt P tillförs. Ut rinner vätska med temperaturen T och flöde q.

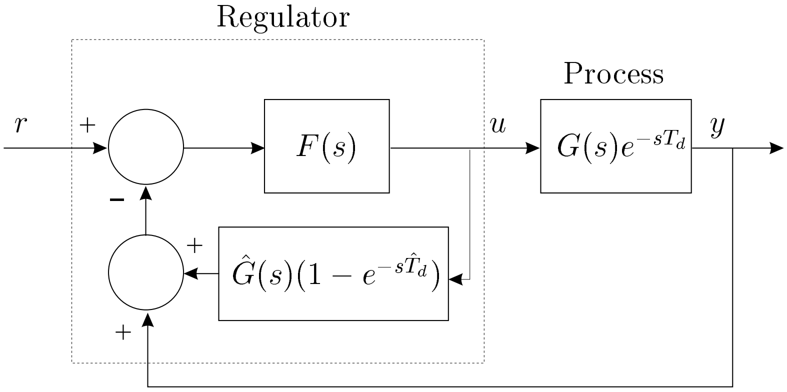
Beteckna utloppsarean med a, vätskans densitet med ρ och dess värmekapacitet med c, och antag perfekt omrörning utan värmeförluster.

(a) Välj lämpliga tillstånd och ställ upp en tillståndsmodell där P, T_{in} och q_{in} är insignaler. Låt utflödet bestämmas genom $q = a\sqrt{2gh}$ (Bernoullis ekvation).
(3p)

(b) Linjärisera modellen kring arbetspunkten P^0, T_{in}^0 och q_{in}^0. Vad blir tillståndens arbetspunkt?
(2p)

2

Figuren nedan visar en s k Otto Smith-regulator, avsedd att reglera processer med dödtidsdominerad dynamik.



Processen *antas* ha överföringsfunktionen $\hat{G}(s)e^{-s\hat{T}_d}$ vilken ingår i regulatorn, där $\hat{G}(s)$ saknar dödtid. Processen skiljer sig från den antagna modellen och beskrivs med överföringsfunktionen $G(s)e^{-sT_d}$.

(a) Bestäm överföringsfunktionen $\frac{Y(s)}{R(s)}$.

(2p)

Antag i följande uppgifter att $\hat{G}(s) \equiv G(s)$ och $\hat{T}_d \equiv T_d$, dvs att processen och modellen av processen är ekvivalenta.

(b) Hur förenklas $\frac{Y(s)}{R(s)}$?

(1p)

(c) Vad är kravet för att reglersystemet skall vara stabilt?

(1p)

(d) Vad är fördelen med Otto Smith-regulatorn?

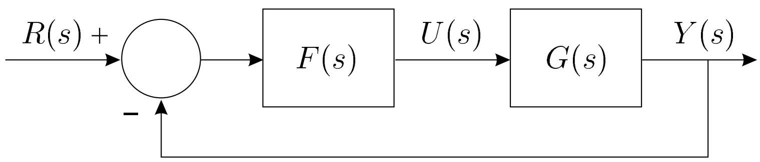
(1p)

3

Betrakta det öppna systemet

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

Systemet återkopplas enligt nedan figur, där $F(s)$ representerar regulatorn.



(a) Bestäm en PI-regulator

$$F(s) = K\left(\frac{1+Ts}{s}\right)$$

så att fasmarginalen $\phi_m = 45°$ och K maximeras.

(3p)

(b) Ange i vilket frekvensintervall ω_c måste ligga för att erhålla önskad fasmarginal vid PI-design.

(2p)

4

Systemet

$$G(s) = \frac{e^{-T_d s}}{(s-1)}$$

skall återkopplas med en P-regulator med förstärkning K_p.

(a) För vilka värden på T_d är systemet möjligt att stabiliseras med en P-regulator?

(3p)

(b) Låt $T_d = 0$. Vilka värden på K ger ett stabilt system?

(1p)

5

Modellreduktion innebär att en modell av hög ordning approximeras med en modell av låg ordning. Betrakta modellen

$$G(s) = \frac{4}{(s+2)^2}$$

som approximeras med överföringsfunktionen

$$\hat{G}(s) = \frac{a}{(1+bs)}$$

(a) Bestäm a och b så att lågfrekvensförstärkningen och vinkelfrekvensen vid $-60°$ överensstämmer för modellerna.

(2p)

(b) Rita Bodediagram för de två modellerna.

(2p)

(c) Skissa stegsvaren för de två modellerna.

(2p)

Formler

Linjärisering

Linjärisering i arbetspunkt (x_0, u_0)

$$f(x,u) \approx f(x_0,u_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,u_0)} \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_0,u_0)} \Delta u$$

där $\Delta x = x - x_0$ och $\Delta u = u - u_0$.

Överföringsfunktion

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \ldots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n}$$

Styrbar kanonisk form

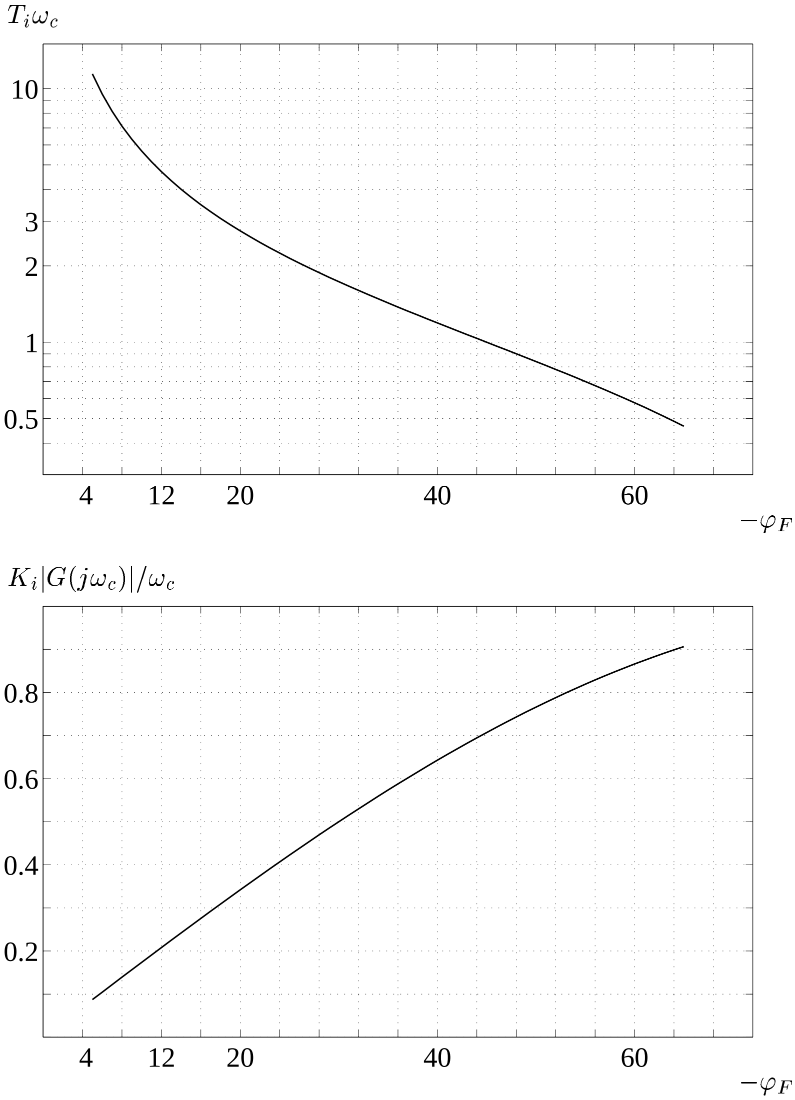
$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{bmatrix} x(t)
\end{aligned}$$

Observerbar kanonisk form

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} x(t)
\end{aligned}$$

PI-regulator

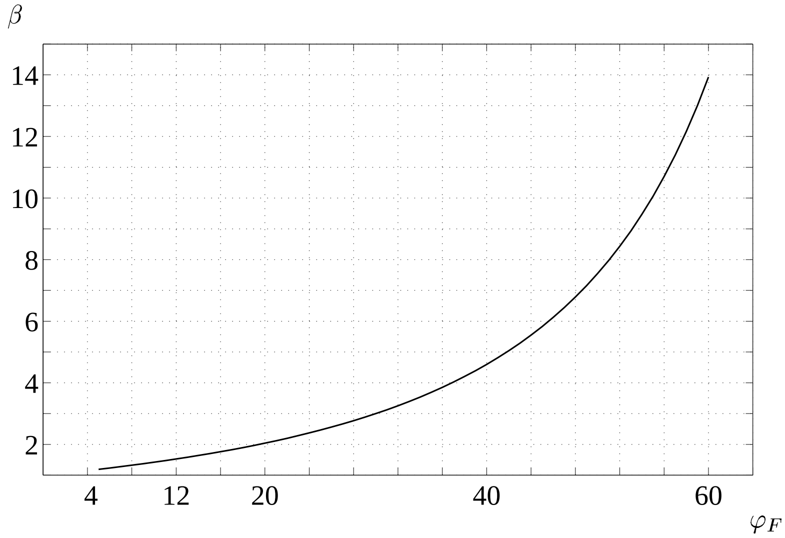
$$F_{PI}(s) = K_i \frac{1 + T_i s}{s}$$



Figur 1: $T_i\omega_c$ och $K_i|G(j\omega_c)|/\omega_c$ som funktion av önskad fasförändring hos regulatorn $\varphi_F(j\omega_c)$ vid överkorsningsfrekvensen ω_c.

PD-regulator

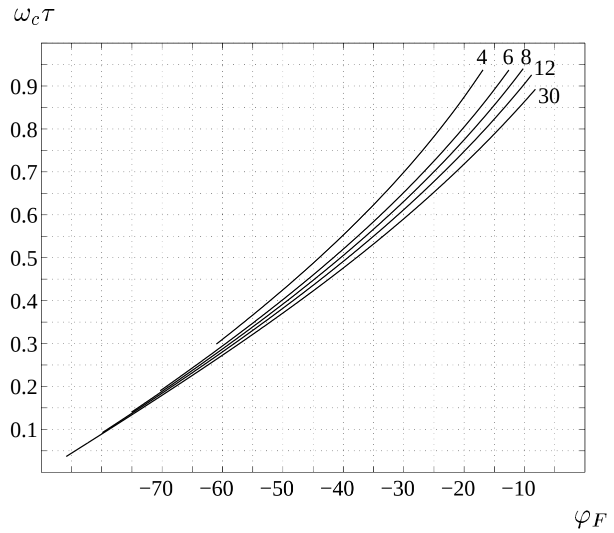
$$F_{PD}(s) = K_p \frac{1 + s\tau}{1 + s\tau/\beta}$$

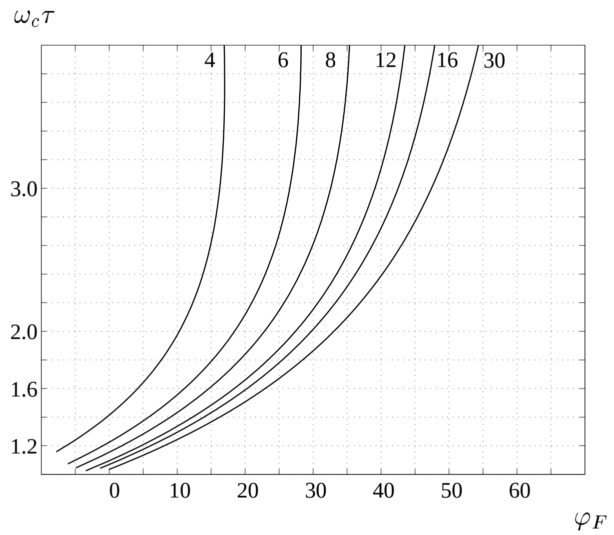


Figur 2: β som funktion av önskad fasförändring hos regulatorn $\varphi_F(j\omega_c)$ vid överkorsningsfrekvensen ω_c, då $\omega_c = \sqrt{\beta}/\tau$

PIPD-regulator

$$F_{PIPD}(s) = K_i \frac{(1 + s\tau)^2}{s(1 + s\tau/\beta)}$$





Figur 3: $\omega_c\tau$ som funktion av önskad fasförändring hos regulatorn $\varphi_F(j\omega_c)$ vid överkorsningsfrekvensen ω_c för olika värden på β.

LÖSNINGAR TENTAMEN REGLERTEKNIK D3 010823

1a) Dynamiken ges av balansekv.

$$\begin{bmatrix}\text{Ändring av}\\ \text{upplagrad energi}\\ \text{per tidsenhet}\end{bmatrix} = [\text{Effekt in}] - [\text{Effekt ut}]$$

$$\begin{bmatrix}\text{Ändring av}\\ \text{upplagrad volym}\\ \text{per tidsenhet}\end{bmatrix} = [\text{Flöde in}] - [\text{Flöde ut}]$$

dvs
$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\{\rho c V T\} = P + \rho c q_{in} T_{in} - \rho c q T\\[2mm] \dfrac{d}{dt}\{V\} = q_{in} - q\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{V} T + V\dot{T} = \dfrac{P}{\rho c} + q_{in} T_{in} - qT\\ \dot{V} = q_{in} - q\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(q_{in} - \cancel{q})T + V\dot{T} = \dfrac{P}{\rho c} + q_{in} T_{in} - \cancel{qT}\\ \dot{V} = q_{in} - q\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dot{T} = \dfrac{P}{\rho c V} + q_{in}(T_{in} - T)\\ \dot{V} = q_{in} - q = q_{in} - a\sqrt{2gh}\end{cases}$$

Välj ex. tillstånden T och h

$$\boxed{\begin{cases}\dot{T} = \dfrac{P}{\rho c A h} + \dfrac{q_{in}}{Ah}(T_{in} - T) & = f_1(T, h, P, T_{in}, q_{in})\\[2mm] \dot{h} = \dfrac{1}{A}\left(q_{in} - a\sqrt{2gh}\right) & = f_2(h, q_{in})\end{cases}}$$

b) Låt $x = \begin{bmatrix}T\\ h\end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix}P\\ T_{in}\\ q_{in}\end{bmatrix}$

Linjärisering medför att $\Delta\dot{x} = f(x_0, u_0) + \left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x_0,u_0}\Delta x + \left.\dfrac{df}{du}\right|_{x_0,u_0}\Delta u$

Arbetspunkt $f(x_0, u_0) = 0 \Rightarrow q_{in}^0 - a\sqrt{2gh^0} = 0 \Rightarrow \boxed{h_0 = \dfrac{1}{2g}\left(\dfrac{q_{in}^0}{a}\right)^2}$

$$\frac{P^0}{\rho c} + q_{in}^0(T_{in}^0 - T^0) \Rightarrow \boxed{T^0 = \frac{P^0}{\rho c q_{in}^0} + T_{in}^0}$$

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0,u_0} = \begin{bmatrix}\frac{df_1}{dT} & \frac{df_1}{dh}\\ \frac{df_2}{dT} & \frac{df_2}{dh}\end{bmatrix}_{x_0,u_0} = \begin{bmatrix}-\frac{q_{in}^0}{Ah^0} & -\frac{P^0}{\rho c A (h^0)^2} - \frac{q_{in}^0}{A(h^0)^2}(T_{in}^0 - T^0)\\ 0 & -\frac{1}{2}\frac{a\sqrt{2g}}{A\sqrt{h^0}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{q_{in}^0}{Ah^0} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\frac{q_{in}^0}{Ah^0}\end{bmatrix}$$

$$\left.\frac{df}{du}\right|_{x_0,u_0} = \begin{bmatrix}\frac{df_1}{dP} & \frac{df_1}{dT_{in}} & \frac{df_1}{dq_{in}}\\ \frac{df_2}{dP} & \frac{df_2}{dT_{in}} & \frac{df_2}{dq_{in}}\end{bmatrix}_{x_0,u_0} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\rho c A h^0} & \frac{q_{in}^0}{Ah^0} & \frac{T_{in}^0}{Ah^0}\\ 0 & 0 & 1/A\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\Delta\dot{T}\\ \Delta\dot{h}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{q_{in}^0}{Ah^0} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\frac{q_{in}^0}{Ah^0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta T\\ \Delta h\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{1}{\rho c A h^0} & \frac{q_{in}^0}{Ah^0} & \frac{T_{in}^0}{Ah^0}\\ 0 & 0 & 1/A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta P\\ \Delta T_{in}\\ \Delta q_{in}\end{bmatrix}$$

där $\Delta T = T - T^0$, $\Delta h = h - h^0$, $\Delta P = P - P^0$, $\Delta T_{in} = T_{in} - T_{in}^0$, $\Delta q_{in} = q_{in} - q_{in}^0$

2a) $\begin{cases} U(s) = \{R(s) - Y(s) - \hat{G}(s)(1-e^{-sT_d})U(s)\} F(s) \\ Y(s) = G(s) e^{-sT_d} U(s) \end{cases}$

$$Y(s) = G(s) e^{-sT_d} \frac{\{R(s) - Y(s)\} F(s)}{1 + \hat{G}(s)(1-e^{-sT_d})F(s)}$$

$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s) e^{-sT_d} F(s)}{1 + \hat{G}(s)(1-e^{-sT_d})F(s) + G(s) e^{-sT_d} F(s)}$$

b) $\hat{G}(s) = G(s)$ och $\hat{T}_d = T_d \Rightarrow \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s) e^{-sT_d} F(s)}{1 + G(s) F(s)}$

c) Stabil om samtliga nollställen hos $1 + G(s)F(s)$ ligger i VHP.

d) Kretsöverföringen innehåller ingen dödtid, vilket innebär att $F(s)$ dimensioneras för processen $G(s)$ utan dödtid.

3 a) $\varphi_m = 180° + \angle G(j\omega_c) + \angle F(j\omega_c)$, $|G(j\omega_c)| \, |F(j\omega_c)| = 1$

$\angle F(j\omega_c) = -90° + \arctan \omega_c T \Rightarrow \omega_c T = \tan(\varphi_m - 90° - \angle G(j\omega_c))$

$|F(j\omega_c)| = \frac{K}{\omega_c} \sqrt{1+(\omega_c T)^2} = \frac{1}{|G(j\omega_c)|} \Rightarrow K = \frac{\omega_c}{|G(j\omega_c)|} \frac{1}{\sqrt{1+(\omega_c T)^2}}$

$$K = \frac{\omega_c}{|G(j\omega_c)|} \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\underbrace{\varphi_m}_{45°} - 90° - \angle G(j\omega_c))}}$$

där $\begin{cases} |G(j\omega_c)| = \frac{1}{1+\omega_c^2} \\ \angle G(j\omega_c) = -2\arctan \omega_c \end{cases}$

ω_c	K
0,1	0,084
1	1,41
1,5	1,856
1,54	1,8603
1,55	1,8605
1,56	1,8602

$\Rightarrow$ max $K = 1,86$ inträffande för $\omega_c = 1,55$

$\Rightarrow T = 1,71$

b) $-180° + 0° + \varphi_m \leq \angle G(j\omega_c) \leq -180° + 90° + \varphi_m$

Ren P-reglering

Ren I-reglering

$$-135° \leq -2\arctan \omega_c \leq -45°$$

$$0,414 \leq \omega_c \leq 2,42$$

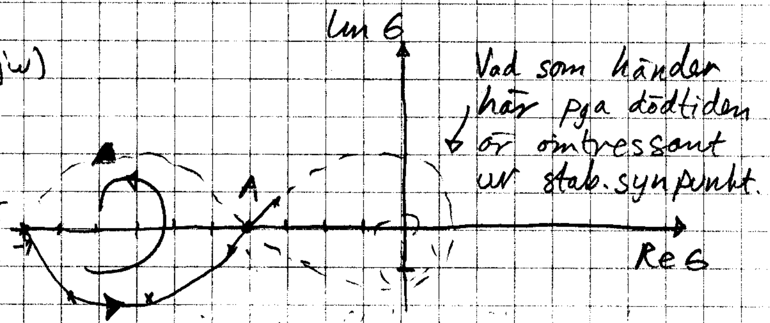
4 a)

$G(s) = \frac{e^{-T_d s}}{s-1}$, 1 pol i HHP $\Rightarrow$ $P=1$
Stabilt om $N=-1$ (moturs) ty då är $Z=0$

$$G(j\omega) = -\frac{(\cos T_d\omega - j\sin T_d\omega)(1+j\omega)}{(1-j\omega)(1+j\omega)} = \underbrace{\frac{-\cos T_d\omega - \omega\sin T_d\omega}{1+\omega^2}}_{\text{Re } G(j\omega)} + j\underbrace{\frac{\sin T_d\omega - \omega\cos T_d\omega}{1+\omega^2}}_{\text{Im } G(j\omega)}$$

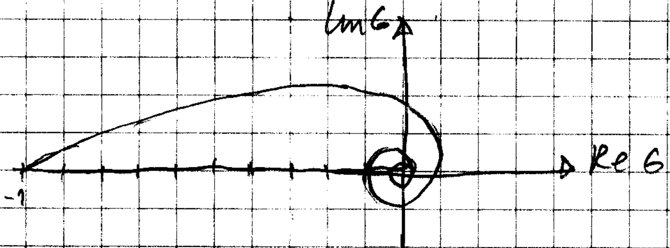
Rita $G(j\omega)$ för ex. $T_d = 0{,}5$

ω	Re $G(j\omega)$	Im $G(j\omega)$
0	−1	0
0,5	−0,87	−0,19
1	−0,68	−0,19
2	−0,44	−0,05
3	−0,31	0,08



Systemet är möjligt att stabilisera för $T_d = 0{,}5$ med P-regulator ty kurvan "innehåller" en moturs omslingning. När dödtiden ökar flyttas punkten A åt vänster och ett snävare intervall för K stabiliserar systemet.

Om $\sin T_d\omega - \omega\cos T_d\omega > 0$ för små ω kommer kurvan att se ut som



och det är inte längre möjligt att stabilisera systemet med en P-regulator!

Ovan krav innebär att $T_d\omega - \omega < 0$ dvs $\boxed{T_d < 1}$ för att kunna stabilisera systemet, eftersom $\sin T_d\omega \approx T_d\omega$ och $\cos T_d\omega \approx 1$ för små ω

b) $1 + \frac{K}{s-1} = 0 \Rightarrow s - 1 + K = 0 \Rightarrow \boxed{K > 1}$

5 a) $G(0) = \frac{4}{4} = 1$, $\hat{G}(0) = \frac{a}{1} \equiv 1 \Rightarrow \boxed{a = 1}$

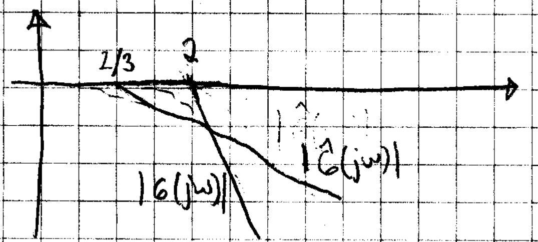
$\angle G(j\omega) = \angle \hat{G}(j\omega) = -60^\circ \Rightarrow$

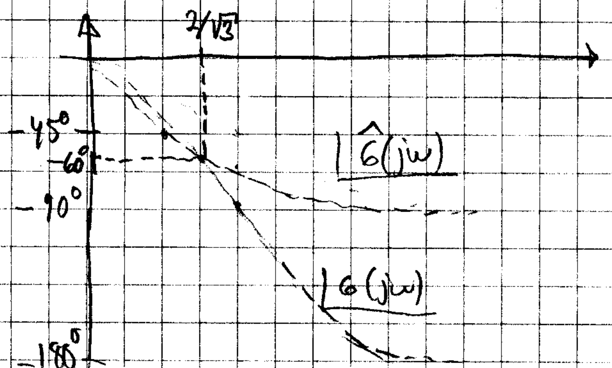
$-2 \arctan \frac{\omega}{2} = -60^\circ \Rightarrow \omega = 2/\sqrt{3}$

$-\arctan b \frac{2}{\sqrt{3}} = -60^\circ \Rightarrow \boxed{b = \frac{3}{2}}$

b) $G(s) = \frac{4}{4(1+s/2)^2} = \frac{1}{(1+s/2)^2}$

$\hat{G}(s) = \frac{1}{1+\frac{3}{2}s}$





c) $Y(s) = \frac{4}{(s+2)^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2} = \frac{A(s+2)^2 + Bs(s+2) + Cs}{(s+2)^2 s}$

$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ 4A + 2B + C = 0 \\ 4A = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = -2 \end{cases}$

$y(t) = (1 - e^{-2t} - 2t e^{-2t}) \quad t > 0$

$\hat{Y}(s) = \frac{2/3}{s+2/3} \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2/3} \Rightarrow \hat{y}(t) = (1 - e^{-\frac{2t}{3}}) \quad t > 0$

t	$y(t)$	$\hat{y}(t)$
0	0	0
0,5	0,50	0,28
1	0,59	0,49
1,5	0,80	0,63
2	0,997	0,74