Reglerteknik D3

(Kurs nr ERE 100)

Tentamen 010421

Tid: 8:45-12:45, Lokal: V-huset

Lärare: Stefan Pettersson, tel 5146

Tentamen omfattar 25 poäng, där betyg tre fordrar 10 poäng, betyg fyra 15 poäng och betyg fem 20 poäng.

Tentamenresultat anslås senast den *10 maj* på avdelningens anslagstavla.

Granskning av rättning sker den *8 och 9 maj* kl 12:30-13:00 på avdelningen.

Tillåtna hjälpmedel:

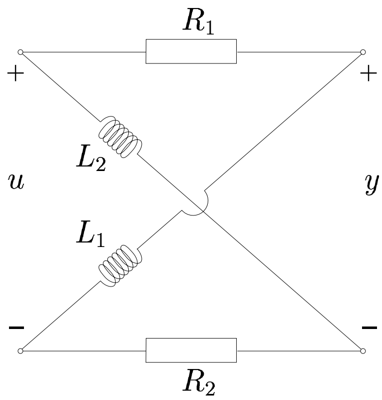
- Formelsamling i reglerteknik
- Bode diagram
- Matematiska och fysikaliska tabeller, t ex Beta och Physics handbook
- Typgodkänd kalkylator

Lycka till!

Institutionen för signaler och system
Avdelningen för reglerteknik och automation
Chalmers tekniska högskola

1

Betrakta nedanstående elektriska filter.



(a) Välj lämpliga tillstånd och ställ upp en tillståndsmodell där u är insignal och y är utsignal.

(2p)

(b) Bestäm överföringsfunktionen $\frac{Y(s)}{U(s)}$.

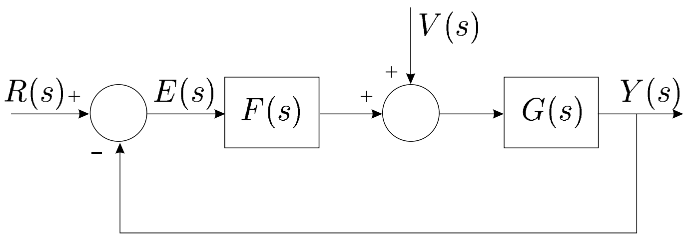
(1p)

(c) Var hamnar filtrets poler och nollställen?

(2p)

2

Betrakta nedanstående *stabila* återkopplade reglersystem.

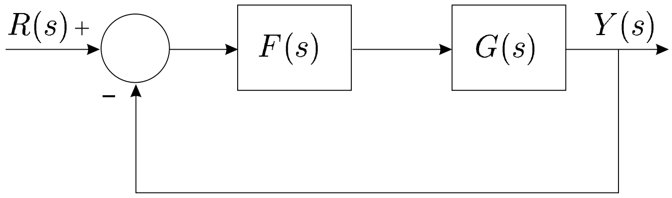


(a) Visa att kvarstående felet blir 0 då $R(s) = \frac{1}{s}$ i fallet när $L(s) = F(s)G(s)$ har en pol (men inga nollställen) i origo.

(2p)

(b) Visa att kvarstående felet blir 0 då $V(s) = \frac{1}{s}$ i fallet när $F(s)$ har en pol (men inga nollställen) i origo.

(2p)



3

Betrakta ovanstående reglersystem där

$$F(s) = K, \quad \text{och} \quad G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

(a) För vilka värden på K är reglersystemet stabilt?

(1p)

(b) Bestäm K så att

$$\max_{\omega} |T(j\omega)| = 1.3$$

där T är komplementära känslighetsfunktionen.

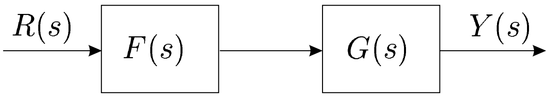
(3p)

(c) Vad blir fasmarginalen för detta K.

(2p)

4

En (okunnig) student vill styra en instabil process $G(s) = \frac{1}{s-a}$ (där $a > 0$) genom framkoppling enligt nedanstående figur.



Eftersom parametern a är väldigt nära ett gör studenten detta antagande och kancellerar den instabila polen med filtret

$$F(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

med förhoppning om ett styrt system med pol i -1.

(a) Bestäm $y(t)$ för godtyckligt a då $r(t)$ är ett enhetssteg. Vad blir svaret när $a = 1$?

(2p)

(b) Återkoppla systemet med en PI-regulator $F(s) = F_{PI}(s) = K(1 + \frac{1}{sT})$, enligt figur i uppgift 3. Vilka värden på a, K och T ger ett stabilt system?

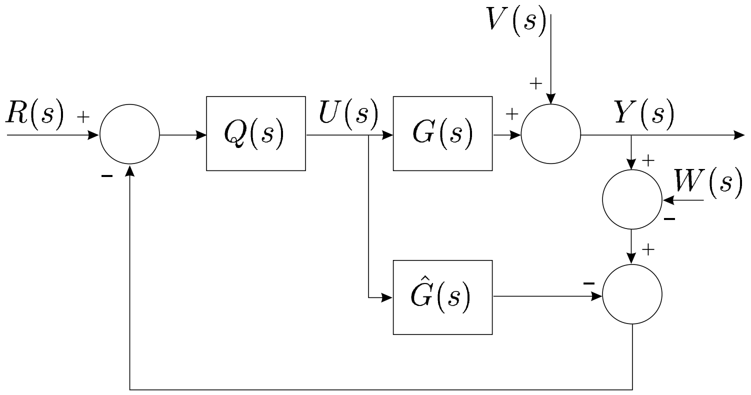
(2p)

(c) För $a = 1$, bestäm K och T så att det slutna systemet får en dubbelpol i -1.

(1p)

5

I fallet då en modell existerar av en process som skall regleras så kan nedanstående regulatorstruktur visa sig fungera bra (reglerkonceptet kallas populärt (IMC) Internal Model Control eftersom processen explicit ingår internt i reglerkonceptet).



I figuren är $G(s)$ processen, $\hat{G}(s)$ är en modell av processen och $Q(s)$ ett polynom som skall designas i reglersystemet.

(a) Bestäm överföringsfunktionerna $\frac{Y(s)}{R(s)}$ och $\frac{Y(s)}{V(s)}$.

(2p)

Antag i följande uppgifter att $G(s) \equiv \hat{G}(s)$, dvs att processen och modellen av processen är ekvivalenta.

(b) Vad är kravet för att reglersystemet skall vara stabilt?

(1p)

(c) Antag att systemet är stabilt och att $G(s)$ inte har några nollställen i origo. Hur skall den statiska förstärkningen hos $Q(s)$ väljas för att det kvarstående felet efter referenssteg skall bli noll? Vad blir i så fall det kvarstående felet efter (enhets-) stegstörningar?

(2p)

Formler

Linjärisering

Linjärisering i arbetspunkt (x_0, u_0)

$$f(x,u) \approx f(x_0,u_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,u_0)} \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_0,u_0)} \Delta u$$

där $\Delta x = x - x_0$ och $\Delta u = u - u_0$.

Överföringsfunktion

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \ldots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n}$$

Styrbar kanonisk form

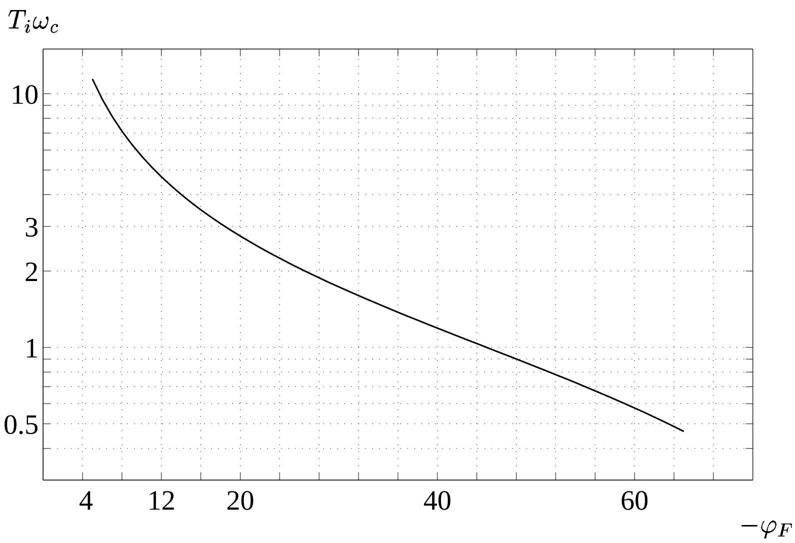
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

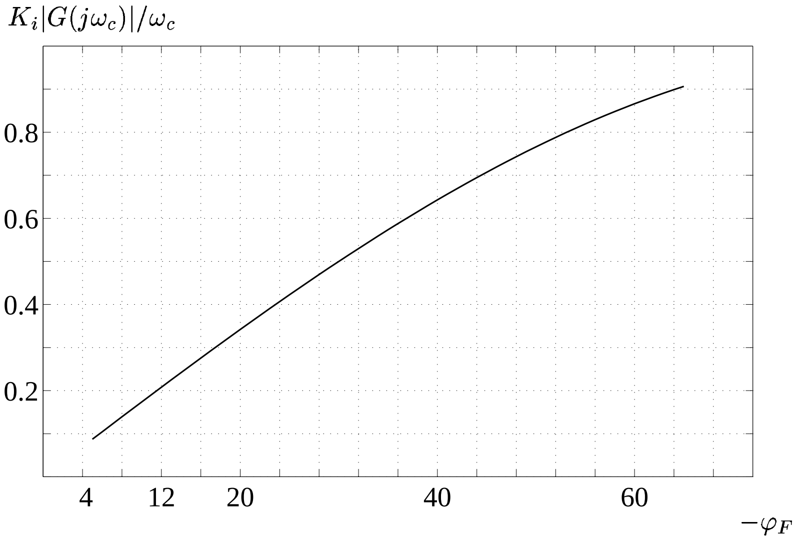
Observerbar kanonisk form

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

PI-regulator

$$F_{PI}(s) = K_i \frac{1 + T_i s}{s}$$

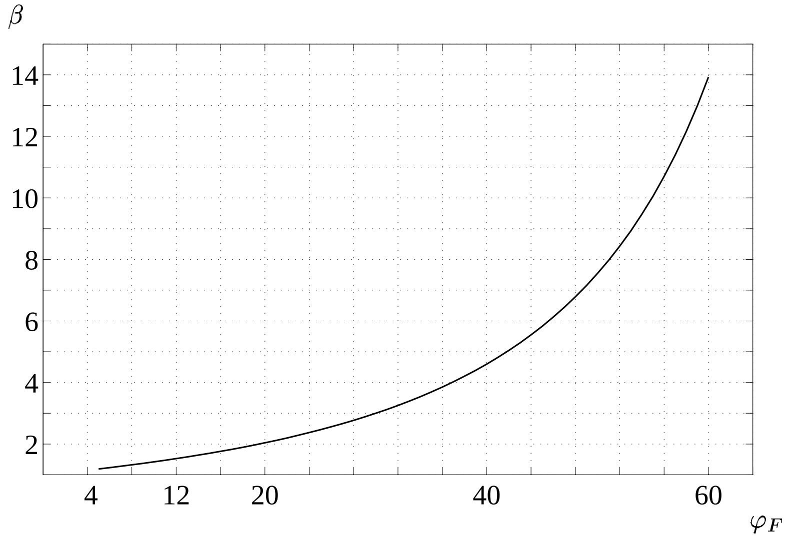




Figur 1: $T_i\omega_c$ och $K_i|G(j\omega_c)|/\omega_c$ som funktion av önskad fasförändring hos regulatorn $\varphi_F(j\omega_c)$ vid överkorsningsfrekvensen ω_c.

PD-regulator

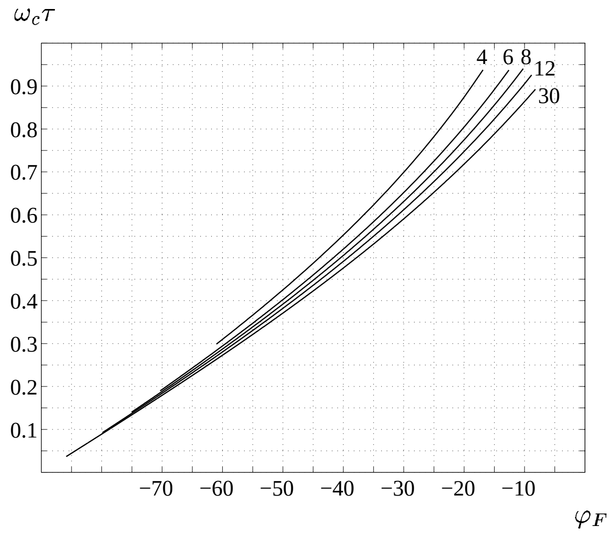
$$F_{PD}(s) = K_p \frac{1 + s\tau}{1 + s\tau/\beta}$$

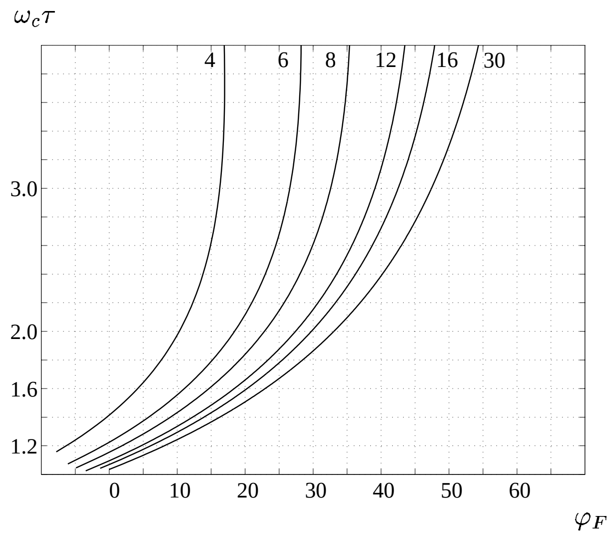


Figur 2: β som funktion av önskad fasförändring hos regulatorn $\varphi_F(j\omega_c)$ vid överkorsningsfrekvensen ω_c, då $\omega_c = \sqrt{\beta}/\tau$

PIPD-regulator

$$F_{PIPD}(s) = K_i \frac{(1+s\tau)^2}{s(1+s\tau/\beta)}$$

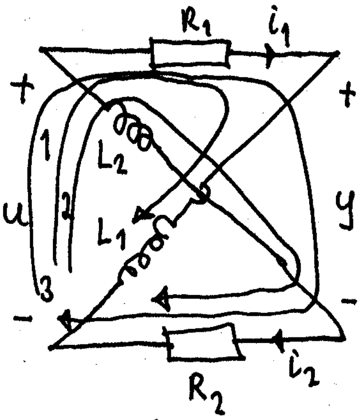




Figur 3: $\omega_c\tau$ som funktion av önskad fasförändring hos regulatorn $\varphi_F(j\omega_c)$ vid överkorsningsfrekvensen ω_c för olika värden på β.

LÖSNINGAR REGLERTEKNIK D3, TENTAMEN 010421

1/ a) Kirchoff i tre slingor ger:



$$-u + R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{di_1}{dt} = -\frac{R_1}{L_1} i_1 + \frac{1}{L_1} u$$

$$-u + R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{di_2}{dt} = -\frac{R_2}{L_2} i_2 + \frac{1}{L_2} u$$

$$-u + R_1 i_1 + y + R_2 i_2 = 0 \Rightarrow y = -R_1 i_1 - R_2 i_2 + u$$

b) $$I_1 = \frac{\frac{1}{L_1}}{s + \frac{R_1}{L_1}} \cdot U \quad , \quad I_2 = \frac{\frac{1}{L_2}}{s + \frac{R_2}{L_2}} \cdot U$$

$$\frac{Y}{U} = \frac{-\frac{R_1}{L_1}}{s + \frac{R_1}{L_1}} - \frac{\frac{R_2}{L_2}}{s + \frac{R_2}{L_2}} + 1 = \frac{-\frac{R_1}{L_1}\left(s + \frac{R_2}{L_2}\right) - \frac{R_2}{L_2}\left(s + \frac{R_1}{L_1}\right) + \left(s + \frac{R_1}{L_1}\right)\left(s + \frac{R_2}{L_2}\right)}{\left(s + \frac{R_1}{L_1}\right)\left(s + \frac{R_2}{L_2}\right)}$$

$$= \frac{s^2 - \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2}}{\left(s + \frac{R_1}{L_1}\right)\left(s + \frac{R_2}{L_2}\right)}$$

c) Poler: $s = -\frac{R_1}{L_1}$, $s = -\frac{R_2}{L_2}$; Nollställen $s = \pm\sqrt{\frac{R_1 R_2}{L_1 L_2}}$

2/ a) $$E(s) = \frac{1}{1 + F(s)G(s)} \cdot R(s) = \frac{1}{1 + L(s)} R(s)$$

$L(s) = \frac{1}{s} \bar{L}(s)$ där $\bar{L}(0)$ är ändlig (existerar)

$$e_s = \lim_{t \to \infty} e(t) \stackrel{\text{stab.}}{=} \lim_{s \to 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{s}\bar{L}(s)} \frac{1}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{s}{s + \bar{L}(s)} = 0$$

b) $$E(s) = -\frac{G(s)}{1 + F(s)G(s)} \cdot V(s)$$

$F(s) = \frac{1}{s} \bar{F}(s)$ där $\bar{F}(0)$ är ändlig (existerar)

$$e_s = \lim_{t \to \infty} e(t) \stackrel{\text{stab}}{=} \lim_{s \to 0} s\, E(s) = -\lim_{s \to 0} s \cdot \frac{G(s)}{1 + F(s)G(s)} \cdot \frac{1}{s} = -\lim_{s \to 0} \frac{G(s)}{1 + \frac{\bar{F}(s)}{s} G(s)} =$$

$$= -\lim \frac{s\, G(s)}{s + \bar{F}(s) G(s)} = 0$$

3/ a) Kar. ekv $\quad 1+F(s)G(s)=0 \quad \Rightarrow \quad 1+K\frac{1}{s(s+1)}=0$

$$s^2+s+K=0$$

Stab. för $K>0$

b) $$T(s)=\frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)}=\frac{\frac{K}{s(s+1)}}{1+\frac{K}{s(s+1)}}=\frac{K}{s^2+s+K}\equiv\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$ där $\omega_n=\sqrt{K}$, $\zeta=\frac{1}{2\omega_n}=\frac{1}{2\sqrt{K}}$

$$|T(j\omega)|=\frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)+4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}} \qquad \frac{d}{d\omega}|T(j\omega)|=\frac{\omega_n^2\cdot(-\frac{1}{2})\left[2(\omega_n^2-\omega)(-2\omega)+8\zeta^2\omega_n^2\omega\right]}{(\omega_n^2-\omega^2)+4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}=0$$

$\Rightarrow \quad \omega=0$

$\omega=\sqrt{1-2\zeta^2}\,\omega_n$, resonanstopp om $1-2\zeta^2>0$, dvs $\zeta<\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\max_\omega|T(j\omega)|=\frac{\omega_n^2}{\sqrt{(2\zeta^2\omega_n^2)^2+4\zeta^2\omega_n^2(1-2\zeta^2)\omega_n^2}}=\frac{\omega_n^2}{2\omega_n^2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$ (Kan fås direkt från formelsaml)

$$=\frac{1}{\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{K}}\sqrt{1-\frac{1}{4K}}}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{K}}\frac{\sqrt{4K-1}}{2\sqrt{K}}}=\frac{2K}{\sqrt{4K-1}}\equiv 1{,}3$$

$$\Rightarrow \quad K^2=\left(\frac{1{,}3}{2}\right)^2(4K-1) \Leftrightarrow K^2-1{,}3^2K+\left(\frac{1{,}3}{2}\right)^2=0$$

$$\Rightarrow \quad K=\frac{1{,}3^2}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1{,}3^2}{2}\right)^2-\left(\frac{1{,}3}{2}\right)^2}=\begin{cases}1{,}38 \Rightarrow \zeta=0{,}42\\ (0{,}37 \Rightarrow \zeta=0{,}91)\end{cases}$$

$$K=1{,}38$$

c) $|L(j\omega_c)|=1$ $\quad$ där $\quad L(s)=F(s)G(s)$

$\varphi_m=180°+\angle L(j\omega_c)$

$$\Rightarrow \quad \frac{K}{\omega_c}\cdot\frac{1}{\sqrt{\omega_c^2+1}}=1 \Leftrightarrow \frac{K^2}{\omega_c^2}=\omega_c^2+1 \Leftrightarrow \omega_c^4+\omega_c^2-K^2=0$$

$$\omega_c^2=-\frac{1}{2}\underset{(-)}{+}\sqrt{\frac{1}{4}+K^2} \quad \Rightarrow \quad \omega_c=\underset{(-)}{+}\sqrt{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+K^2}}\overset{K=1{,}38}{=}0{,}99$$

$$\varphi_m=180°-90°-\arctan\omega_c=45{,}4°$$

4) a) $Y(s) = F(s)G(s)R(s) = \frac{s-1}{s+1}\cdot\frac{1}{s-a}\cdot\frac{1}{s} = \left(\frac{\frac{2}{1+a}}{s+1} + \frac{\frac{a-1}{a+1}}{s-a}\right)\cdot\frac{1}{s}$

$= \frac{2}{1+a}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right) + \frac{1-a}{1+a}\left(\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{s}} - \frac{\frac{1}{a}}{s-a}\right) = \frac{2}{1+a}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}\right) + \frac{1-a}{a(1+a)}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s-a}\right)$

$y(t) = \frac{2}{1+a}\left(1-e^{-t}\right) + \frac{1-a}{a(1+a)}\left(1-e^{at}\right) \quad t \geq 0$

Då $a=1 \Rightarrow y(t) = 1-e^{-t} \quad t \geq 0$

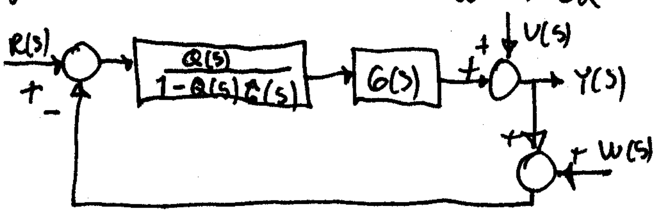
b) Kar. ekv $1 + F_{PI}(s)G(s) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{K}{sT}(1+sT)\frac{1}{s-a} = 0$

$s^2T - aTs + KTs + K = 0$

Stab. om $\begin{cases} T > 0 \\ K > 0 \\ T(K-a) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T > 0 \\ K > 0 \\ K > a \end{cases}$

c) $s^2 + (K-1)s + \frac{K}{T} \equiv (s+1)^2 = s^2 + 2s + 1 \Rightarrow \begin{cases} K-1 \equiv 2 \\ K/T \equiv 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = 3 \\ T = K = 3 \end{cases}$

5) a) Systemet är ekvivalent med



$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{Q(s)}{1-Q(s)\hat{G}(s)}\cdot G(s)}{1+\frac{Q(s)}{1-Q(s)\hat{G}(s)}\cdot G(s)} = \frac{Q(s)G(s)}{1+Q(s)\left[G(s)-\hat{G}(s)\right]}$

$\frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{1}{1+\frac{Q(s)}{1-Q(s)\hat{G}(s)}G(s)} = \frac{1-Q(s)\hat{G}(s)}{1+Q(s)\left[G(s)-\hat{G}(s)\right]}$

b) Om $G(s) \equiv \hat{G}(s)$ blir samtliga överföringsfunktioner antingen $Q(s)G(s)$ eller $1-Q(s)G(s)$. Kravet för ett stabilt reglersystem är således att både $Q(s)$ och $G(s)$ skall ha samtliga poler i VHP.

c) $E(s) = R(s) - Y(s) = \frac{1-Q(s)\hat{G}(s)}{1+Q(s)\left[G(s)-\hat{G}(s)\right]}R(s) \overset{G(s)\equiv\hat{G}(s)}{=\!=} 1 - Q(s)G(s)$

$e_s = \lim_{t\to\infty} e(t) \overset{\text{stab}}{=} \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\cdot\left[1-Q(s)G(s)\right]\cdot\frac{r_0}{\cancel{s}} = 0 \Rightarrow Q(0) = \frac{1}{G(0)}$

Eftersom $\frac{E}{R}$ och $\frac{E}{V}$ är ekvivalenta så när som på tecknet
blir även kvarstående felet efter stegstörning 0