

Reglerteknik D3

(Kurs nr ERE 100)

Tentamen 001213

Tid: 14:15-18:15,

Lokal: M-huset

Lärare: Stefan Pettersson, tel 5146

Tentamen omfattar 25 poäng, där betyg tre fordrar 10 poäng, betyg fyra 15 poäng och betyg fem 20 poäng.

Tentamenresultat anslås senast den *10 januari* på avdelningens anslagstavla.

Granskning av rättning sker den *10 och 11 januari* kl 12:30-13:00 på avdelningen.

Tillåtna hjälpmedel:

- Formelsamling i reglerteknik
- Bode diagram
- Matematiska och fysikaliska tabeller, t ex Beta och Physics handbook
- Typgodkänd kalkylator

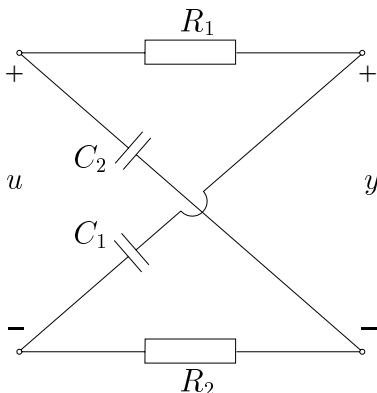
Lycka till!

Institutionen för signaler och system
Avdelningen för reglerteknik och automation
Chalmers tekniska högskola



1

Betrakta nedanstående elektriska filter.



- (a) Välj lämpliga tillstånd och ställ upp en tillståndsmodell där u är insignal och y är utsignal.

(2p)

- (b) Bestäm överföringsfunktionen $\frac{Y(s)}{U(s)}$.

(1p)

- (c) Skissa enhetsstegsvaret för filteret där begynnelse- och slutvärdet tydligt anges, i fallet då $R = R_1 = R_2$ och $C = C_1 = C_2$.

(2p)

2

Systemet

$$G(s) = \frac{e^{-T_d s}}{(s-1)}$$

där $T_d = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ skall återkopplas med en P -regulator med förstärkning K_p .

- (a) Vilka värden på K_p ger ett stabilt system?

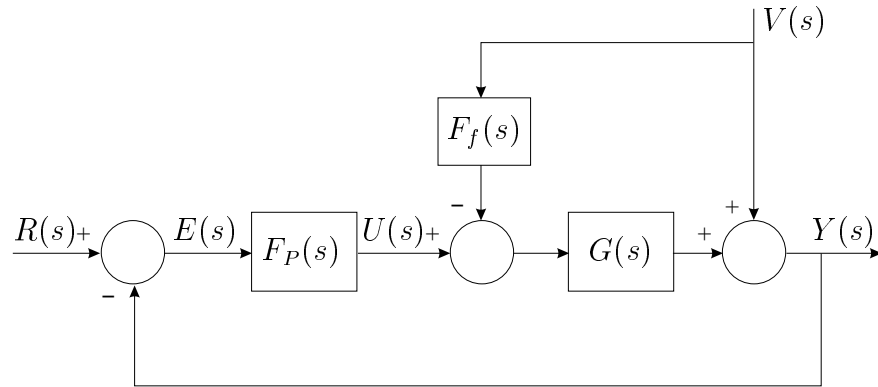
(3p)

- (b) Dödtiden i $G(s)$ ersätts med en Padé approximation

$$e^{-T_d s} \approx \frac{1 - \frac{T_d}{2}s}{1 + \frac{T_d}{2}s}$$

Vilka värden på K_p ger i detta fall ett stabilt system?

(2p)



3

Betrakta ovanstående reglersystem där störningen $v(t)$ är mätbar och

$$G(s) = \frac{2 - s}{(s + 1)(s + 3)}$$

Det återkopplade systemet regleras med en P-regulator

$$F_P(s) = K_p$$

(a) Bestäm K_p så det återkopplade systemet får en pol i -2 . Var hamnar den andra polen?

(2p)

(b) Vad är lågfrekvensförstärkningen hos $G(s)$?

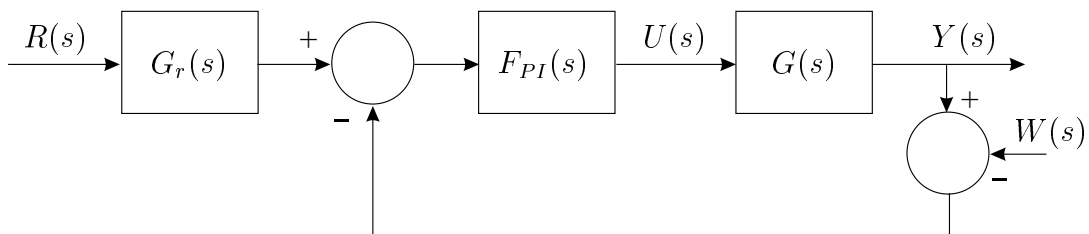
(1p)

(c) Bestäm det kvarstående felet efter stegstörning då $F_f(s) = 3/2$.

(2p)

4

Betrakta nedanstående reglersystem.



Låt

$$G(s) = \frac{1}{s + 3} \quad \text{och} \quad F_{PI}(s) = 1 + \frac{3}{s}$$

(a) Designa ett (realiserbart) förfilter $G_r(s)$ så att det återkopplade systemets bandbredd blir 10 ggr högre än utan förfilter.

(2p)

(b) Rita amplitudkurvorna för överföringsfunktionerna

$$(i) \frac{Y(s)}{R(s)} \quad (ii) \frac{Y(s)}{W(s)} \quad (iii) \frac{U(s)}{R(s)} \quad (iv) \frac{U(s)}{W(s)}$$

(2p)

(c) Med utgångspunkt från amplitudkurvorna i (b), vad är fördelen respektive nackdelen med filtrering?

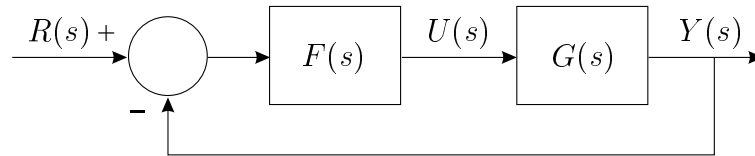
(1p)

5

Betrakta det öppna systemet

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{(s+1)^3}$$

Systemet återkopplas enligt nedan figur, där $F(s)$ representerar regulatören.



(a) Bestäm en PI-regulator så att amplitudmarginalen $A_m = 3$ vid $\omega_\pi = 1 \text{ rad/s}$.

(3p)

(b) Ange i vilket frekvensintervall ω_π måste ligga för att erhålla önskad amplitudmarginal vid PI-design.

(2p)

Formler

Linjärisering

Linjärisering i arbetspunkt (x_0, u_0)

$$f(x, u) \approx \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, u_0)} \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x_0, u_0)} \Delta u$$

där $\Delta x = x - x_0$ och $\Delta u = u - u_0$.

Överföringsfunktion

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

Styrbar kanonisk form

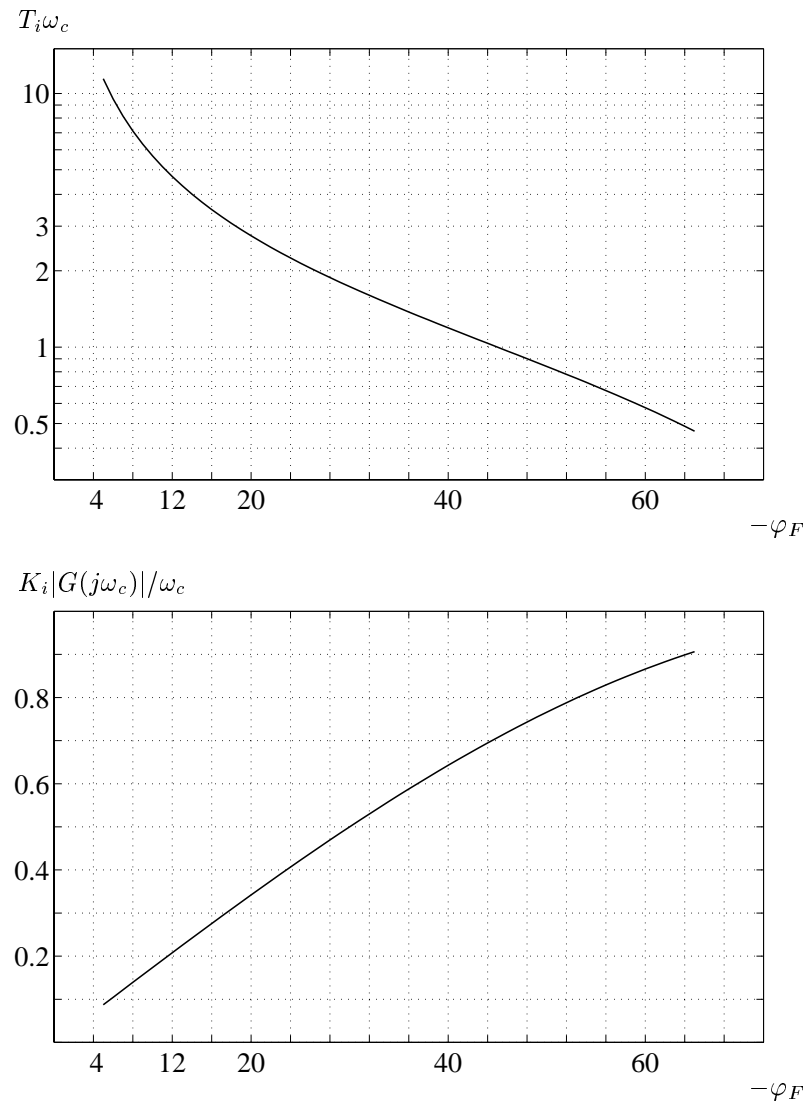
$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n] x(t)$$

Observerbar kanonisk form

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = [1 \ 0 \ \dots \ 0] x(t)$$

PI-regulator

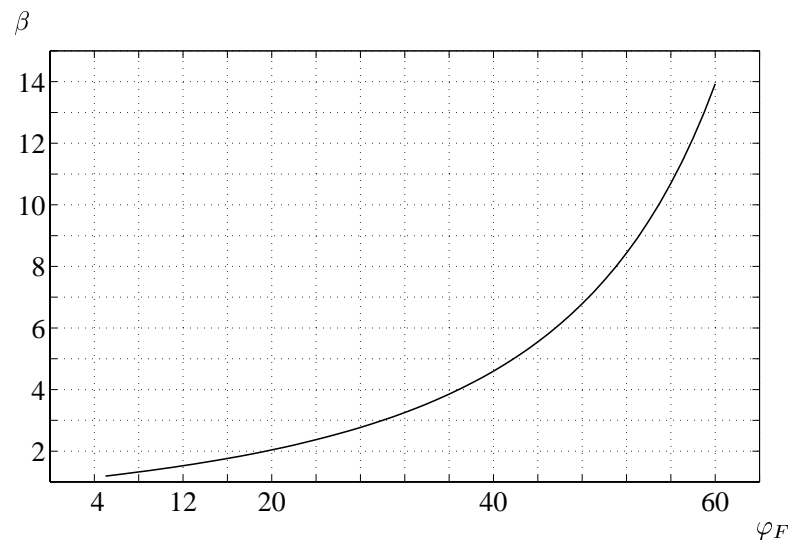
$$F_{PI}(s) = K_i \frac{1 + T_i s}{s}$$



Figur 1: $T_i \omega_c$ och $K_i |G(j\omega_c)| / \omega_c$ som funktion av önskad fasförändring hos regulatorn $\varphi_F(j\omega_c)$ vid överkorsningsfrekvensen ω_c .

PD-regulator

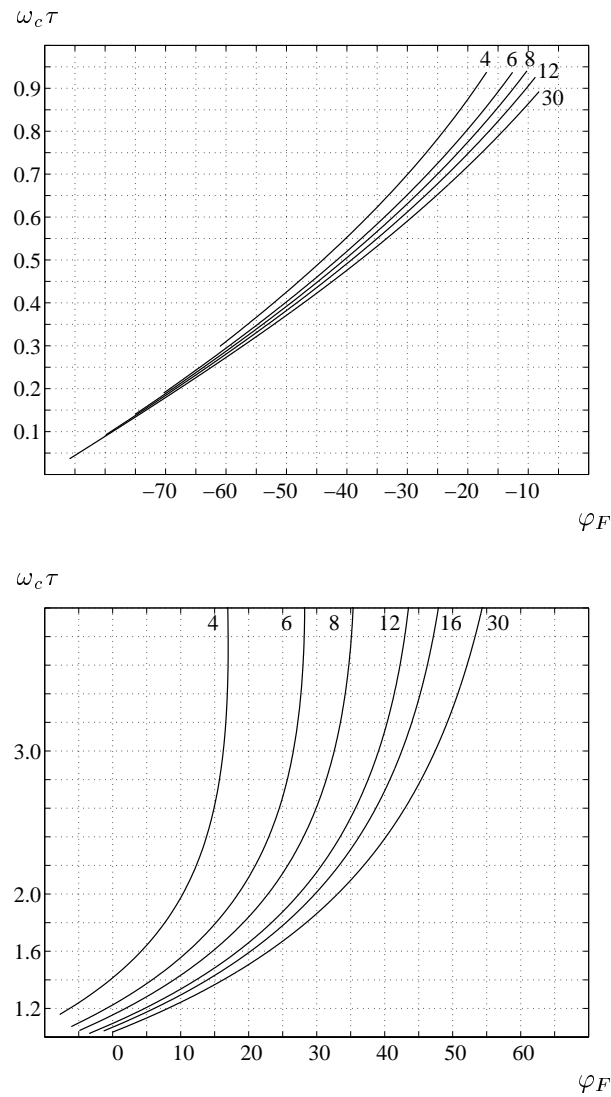
$$F_{PD}(s) = K_p \frac{1 + s\tau}{1 + s\tau/\beta}$$



Figur 2: β som funktion av önskad fasförändring hos regulatorn $\varphi_F(j\omega_c)$ vid överkorsningsfrekvensen ω_c , då $\omega_c = \sqrt{\beta}/\tau$

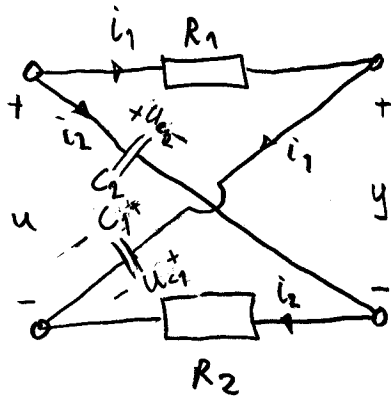
PIPD-regulator

$$F_{PIPD}(s) = K_i \frac{(1 + s\tau)^2}{s(1 + s\tau/\beta)}$$



Figur 3: $\omega_c \tau$ som funktion av önskad fasförändring hos regulatorn $\varphi_F(j\omega_c)$ vid överkorsningsfrekvensen ω_c för olika värden på β .

1)



Kirchoff ger:

$$\begin{cases} -u + R_1 i_1 + u_{c1} = 0 \Rightarrow i_1 = \frac{u - u_{c1}}{R_1} \\ -u + u_{c2} + R_2 i_2 = 0 \Rightarrow i_2 = \frac{u - u_{c2}}{R_2} \\ -u + u_{c2} - y + u_{c1} = 0 \Rightarrow y = u_{c1} + u_{c2} - u \end{cases}$$

$$\dot{u}_{c1} = \frac{1}{C_1} i_1 = \frac{1}{R_1 C_1} (u - u_{c1}) = -\frac{1}{R_1 C_1} u_{c1} + \frac{1}{R_1 C_1} u$$

$$\dot{u}_{c2} = \frac{1}{C_2} i_2 = \frac{1}{R_2 C_2} (u - u_{c2}) = -\frac{1}{R_2 C_2} u_{c2} + \frac{1}{R_2 C_2} u$$

$$y = u_{c1} + u_{c2} - u$$

a)

Let $\begin{cases} x_1 = u_{c1} \\ x_2 = u_{c2} \end{cases} \Rightarrow$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ \frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 1] X - u$$

b)

laplace

$$(R_1 C_1 s + 1) u_{c1} = U \Rightarrow u_{c1} = \frac{U}{1 + R_1 C_1 s}$$

$$(R_2 C_2 s + 1) u_{c2} = U \Rightarrow u_{c2} = \frac{U}{1 + R_2 C_2 s}$$

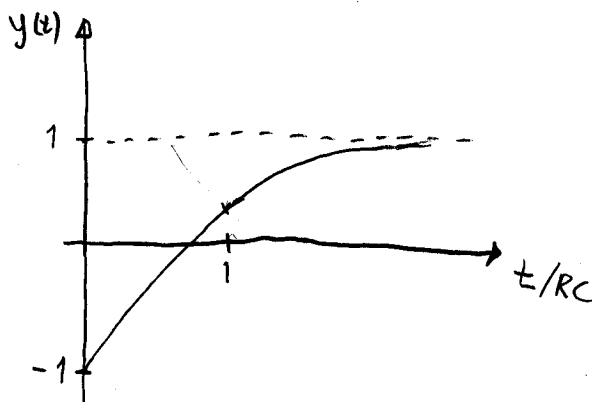
$$Y = \frac{U}{1 + R_1 C_1 s} + \frac{U}{1 + R_2 C_2 s} - U = \frac{U(1 + R_2 C_2 s + 1 + R_1 C_1 s - (1 + R_1 C_1 s + R_2 C_2 s + R_1 R_2 C_1 C_2 s^2))}{(1 + R_1 C_1 s)(1 + R_2 C_2 s)}$$

$$\frac{Y}{U} = \frac{1 - R_1 R_2 C_1 C_2 s^2}{(1 + R_1 C_1 s)(1 + R_2 C_2 s)}$$

c)

$$U(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow Y = \frac{1}{1 + R_1 C_1 s} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{1 + R_2 C_2 s} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{R_2 C_2}{1 + R_1 C_1 s} + \frac{1}{s} - \frac{R_1 C_1}{1 + R_2 C_2 s}$$

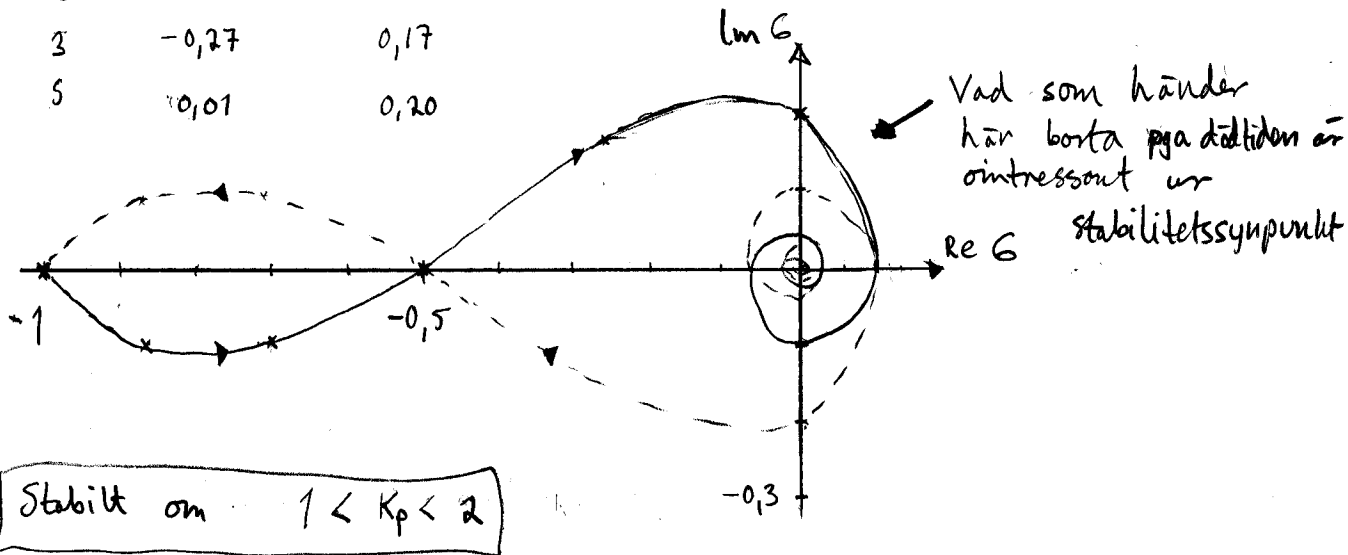
$$y(t) = (1 - e^{-\frac{t}{R_1 C_1}} - e^{-\frac{t}{R_2 C_2}}) \mathcal{U}(t) \stackrel{\left\{ \begin{matrix} R=R_1=R_2 \\ C=C_1=C_2 \end{matrix} \right\}}{=} (1 - 2e^{-\frac{t}{RC}}) \mathcal{U}(t)$$



2/ a) $G(s) = \frac{e^{-T_d s}}{s-1}$, $T_d = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ 1 pol i HHP $\Rightarrow p=1$
 Stabilit om $N=-1$ (motens) ty då är $Z=0$.

$$G(j\omega) = \frac{-(\cos T_d \omega - j \sin T_d \omega)(1+j\omega)}{(1-j\omega)(1+j\omega)} = \underbrace{\frac{-\cos T_d \omega - \omega \sin T_d \omega}{1+\omega^2}}_{\text{Re } G(j\omega)} + j \underbrace{\frac{\sin T_d \omega - \omega \cos T_d \omega}{1+\omega^2}}_{\text{Im } G(j\omega)}$$

ω	Re $G(j\omega)$	Im $G(j\omega)$
0	-1	0
0,5	-0,38	-0,14
1	-0,70	-0,13
$\sqrt{3}$	-0,5	0
3	-0,27	0,17
5	0,01	0,20



b) Kor. ekv. $1 + \frac{K_p}{s-1} \frac{1 - \frac{T_d}{2}s}{1 + \frac{T_d}{2}s} = 0 \Rightarrow \frac{T_d}{2}s^2 + (1 - \frac{T_d}{2})s - 1 + K_p - K_p \frac{T_d}{2}s = 0$

Stab. om $1 - \frac{T_d}{2} - K_p \frac{T_d}{2} > 0$ och $-1 + K_p > 0$

dis $K_p > 1$

och $K_p < \frac{2(1 - \frac{T_d}{2})}{T_d} = \frac{1}{T_d} (2 - T_d) = \frac{6\sqrt{3}}{\pi} - 1 \approx 2,31$

Stabilit om $1 < K_p < \frac{6\sqrt{3}}{\pi} - 1$

3/

a) Korr. ekr $1 + K_p \cdot \frac{2-s}{(s+1)(s+3)} = \frac{(s^2+4s+3 - K_p s + 2K_p)}{(s+1)(s+3)} = 0$

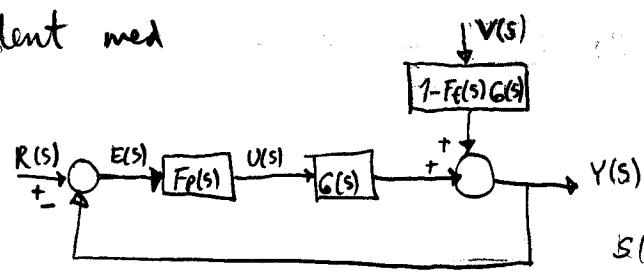
Önskad korr. ekr. $(s+2)(s+a) = s^2 + (a+2)s + 2a = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} a+2 = 4-K_p \\ 2a = 3+2K_p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2-K_p \\ 4-2K_p = 3+2K_p \end{cases} \Rightarrow 4K_p = 1 \Rightarrow \boxed{K_p = 1/4}$
 $a = 2 - \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$

den andra polen i $s = -1\frac{3}{4}$

b) $\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{2}{1 \cdot 3} = \frac{2}{3}$

c) Kretsen är ekvivalent med



$S(s) = \frac{1}{1 + Fp(s)G(s)}$

$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot S(s) \cdot (1 - Fc(s)G(s)) \cdot \frac{V_0}{s} = S(0) \cdot (1 - Fc(0)G(0))$
 $= S(0) \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}\right)}_0 = 0$ (ovsett $S(s)$)

4/

a) $T(s) = \frac{Fp(s)G(s)}{1 + Fp(s)G(s)} = \frac{\frac{s+3}{s} \cdot \frac{1}{s+3}}{1 + \frac{s+3}{s} \cdot \frac{1}{s+3}} = \frac{1/s}{1 + 1/s} = \frac{1}{s+1}$

Bandbredden $\omega_b = 1$ rad/s

Om exempelvis $G_r(s) = \frac{1+s}{1+s/10}$ blir $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+s/10}$, dvs $\omega_b = 10$ rad/s

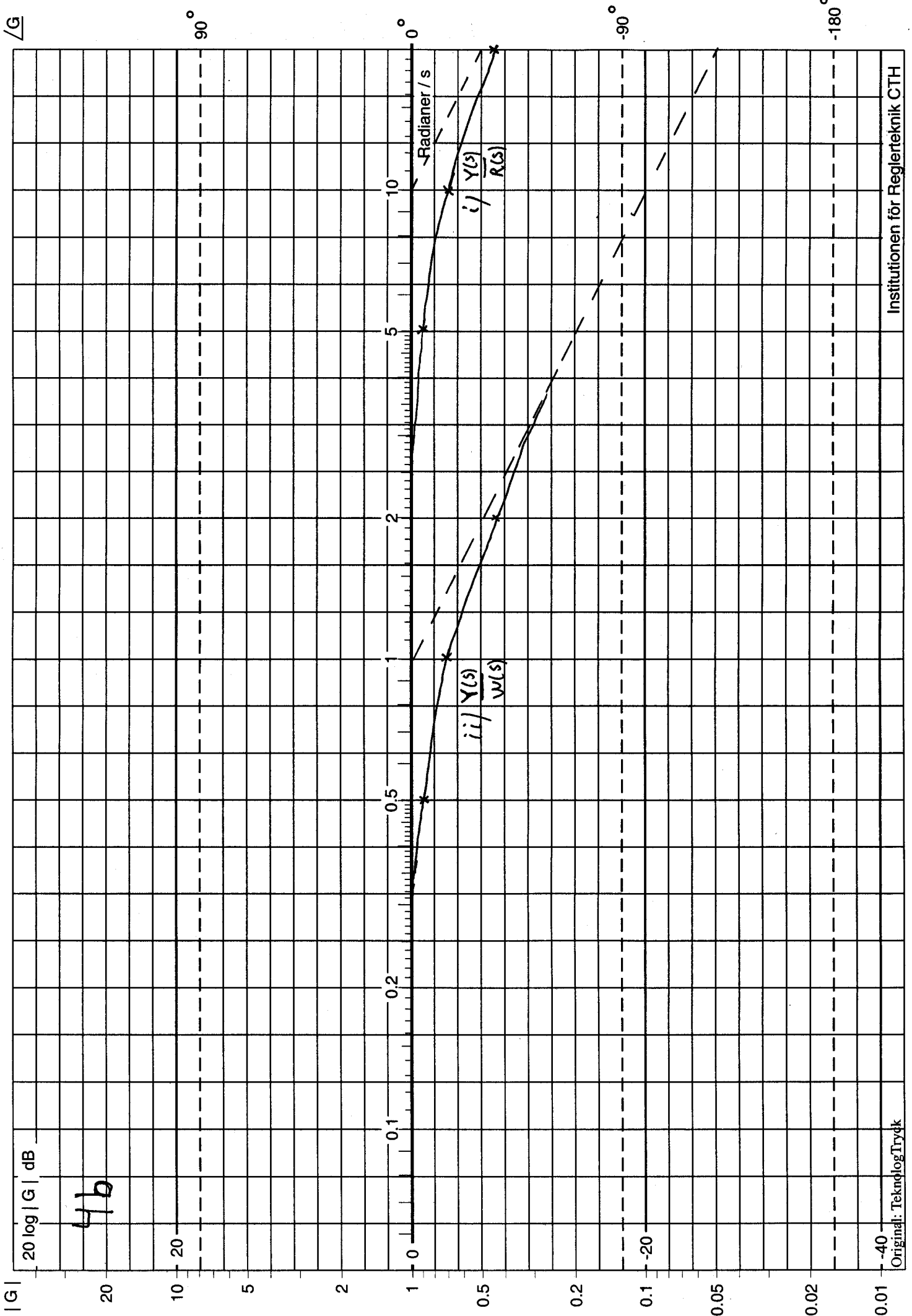
b) $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+s/10}$

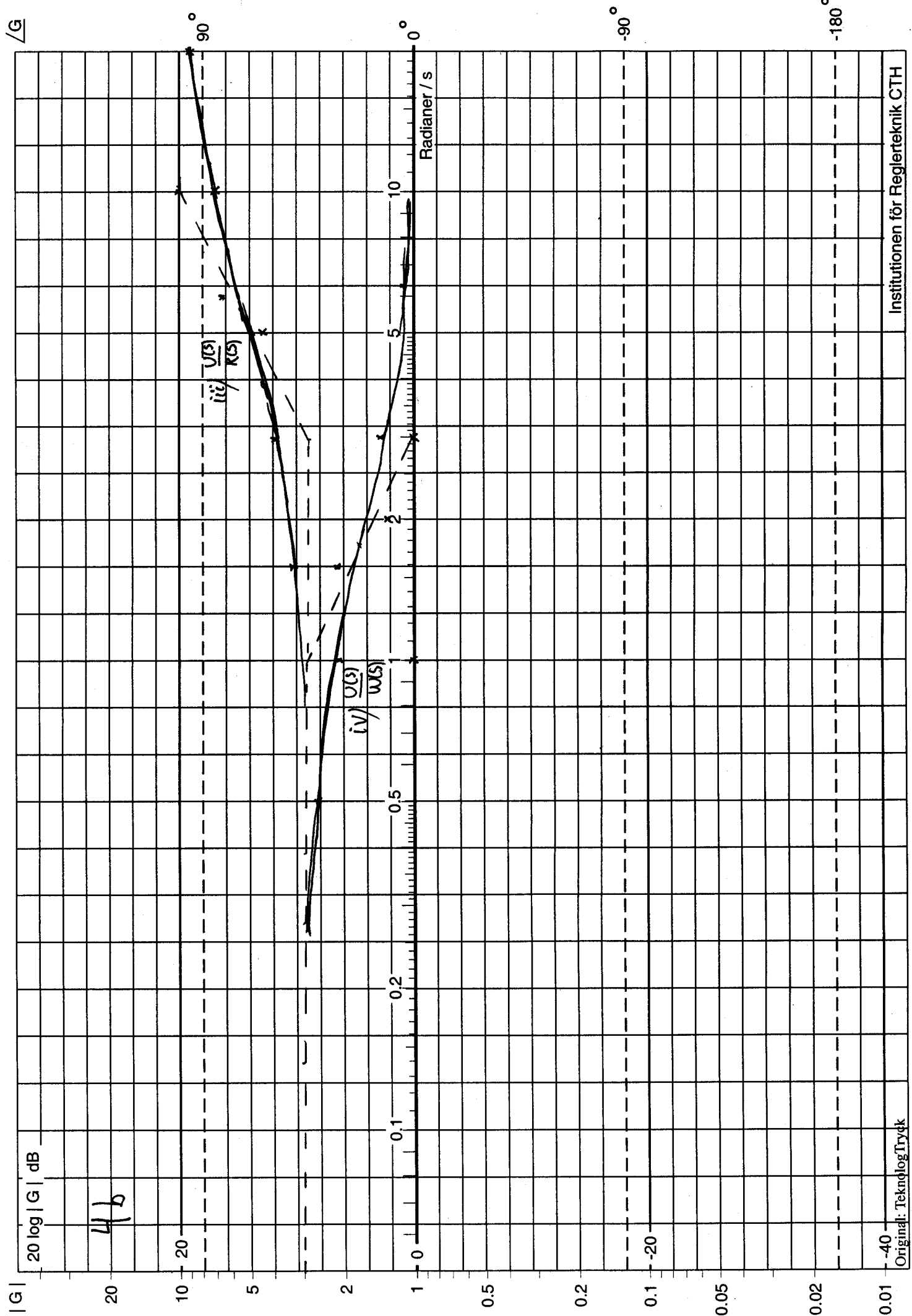
$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{1}{s+1}$

$\frac{U(s)}{R(s)} = G_r(s) \cdot \frac{Fp(s)}{1 + Fp(s)G(s)} = G_r(s) \cdot \frac{\frac{s+3}{s}}{1 + \frac{s+3}{s} \cdot \frac{1}{s+3}} = \frac{1+s}{1+s/10} \cdot \frac{s+3}{s+1} = \frac{3(1+s/3)}{(1+s)}$

$\frac{U(s)}{W(s)} = \frac{3(1+s/3)}{(1+s)}$

c) Fördelen är att snabbheten ökar utan att känsligheten för mätstörningar ökar. Nackdelen är dock att styrsignalsaktiviteten ökar.





$$5) \quad \left. \begin{aligned} F_{PI}(s) &= \frac{K_i + K_p s}{s} \\ G(s) &= \frac{2}{(s+1)^3} \end{aligned} \right\} L(s) = F_{PI}(s) G(s)$$

$$a) \quad |G(j\omega_\pi)| = \frac{2}{(1+\omega_\pi^2)^{3/2}} \stackrel{\omega_\pi=1}{=} \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\angle G(j\omega_\pi) = -3 \arctan \omega_\pi \stackrel{\omega_\pi=1}{=} -135^\circ$$

$$\angle L(j\omega_\pi) = \angle F_{PI}(j\omega_\pi) + \angle G(j\omega_\pi) = -180^\circ \Rightarrow$$

$$\angle F_{PI}(j\omega_\pi) = -90^\circ + \arctan \frac{K_p \omega_\pi}{K_i} \stackrel{\omega_\pi=1}{=} -180^\circ - \angle G(j\omega_\pi) = -45^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{K_p}{K_i} = \tan 45^\circ = 1 \quad K_p = K_i$$

$$A_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|} = \frac{1}{|G(j\omega_\pi)| |F_{PI}(j\omega_\pi)|} = 3$$

$$|F_{PI}(j\omega_\pi)| = \frac{\sqrt{K_i^2 + (K_p \omega_\pi)^2}}{\omega_\pi} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\stackrel{\omega_\pi=1}{\Rightarrow} |K_i^2 + K_p^2| = \frac{2}{9}$$

$$2K_p^2 = \frac{2}{9} \Rightarrow K_p^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow$$

$$\boxed{K_p = K_i = \frac{1}{3}}$$

$$b) \quad -180^\circ \leq \angle G(j\omega_\pi) \leq -90^\circ$$

$$-180^\circ \leq -3 \arctan \omega_\pi \leq -90^\circ$$

$$60^\circ \geq \arctan \omega_\pi \geq 30^\circ$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \omega_\pi \leq \sqrt{3} \quad (\text{see Bode})$$

