Reglerteknik M3

Tentamen 2021-01-15

Tid: 08:30 – 13:30

Kurskod: ERE033

Lärare: Knut Åkesson, knut@chalmers.se, 0701-749525

Läraren kan nås via tentamensvakten i Zoom för att besvara eventuella frågor.

Tentamen omfattar totalt 30 poäng, där betyg tre fordrar 15 poäng, betyg fyra 20 poäng och betyg fem 26 poäng. Lösningar och svar till alla uppgifter ska vara tydligt motiverade och alla delsteg kunna följas.

Lösningsförslag till tentamen anslås på kurshemsidan senast första arbetsdagen efter tentamenstillfället. *Granskning* av rättning sker den *5:e* februari kl. 12.15 – 13.15 på Zoom (länk anslås på kurshemsidan). Kommer du senare mottages endast skriftliga klagomål mot rättningen. Sådana klagomål måste lämnas in **senast två veckor** efter ordinare granskning.

Tillåtna hjälpmedel:

- Lösningarna ska utföras på egen hand utan att få hjälp från någon annan person och lösningarna ska vara egenhändigt formulerade.
- I övrigt gäller att alla hjälpmedel är tillåtna.

1

Betrakta nedanstående uppgifter som inte är beroende av varandra.

a) Sambandet mellan en insignal u och utsignal y beskrivs av följande differentialekvation.

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + y(t) = \dot{u}(t) + 2u(t)$$

Bestäm systemets överföringsfunktion.

(1p)

b) Sambandet mellan en insignal u och utsignal y beskrivs av följande differentialekvation.

$$a\dot{y}(t) - y(t) = au(t)$$

För vilka värden på a är differentialekvationen insignal-utsignal stabil?

(1p)

c) Förklara vilken förstärkning vi önskar att kretsöverföringen ska ha för låga frekvenser samt förklara varför vi vill ha förstärkningen på detta vis.

(2p)

2

Betrakta en process med överföringsfunktionen

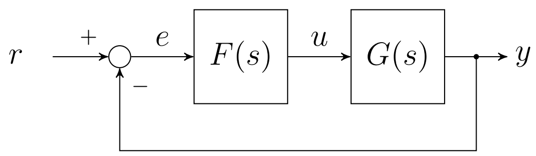
$$G(s) = \frac{5s}{(s^2+1)(s+2)}.$$

a) Betrakta enbart processen $G(s)$. Bestäm den stationära utsignalen då insignalen till processen är ett enhetssteg $u(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$.

(3p)

b) Processen $G(s)$ återkopplas enligt nedan figur med en PI-regulator

$$F(s) = K(1 + \frac{1}{Ts}), \qquad \text{där } K > 0 \text{ och } T > 0.$$



För vilka värden på K och T är det återkopplade systemet stabilt? Visa det stabila området i ett $K - T$ plan.

(3p)

3

Temperaturen i en elbil styrs genom att en sensor läser av aktuell temperatur i bilen och sedan reglerar spänningen till ett värmelement. Överföringsfunktionen för processen mellan spänningen till värmeelementet och temperatursensorn ges av

$$G(s) = \frac{2}{1 + 0.25s} e^{-0.2s}.$$

a) Bestäm låg- och högfrekvensasymptot för processen.

(2p)

b) Vi vill styra värmeelementet med en P-regulator. Börvärdet är den önskade temperaturen och ärvärdet den uppmätta temperaturen. Bestäm den högsta överkorsningsfrekvens, ω_c, som vi kan ha om vi kräver minst 55 graders fasmarginal. Ange även det kvarstående felet vid stegformade börvärdesändringar.

(4p)

c) Bestäm en regulatorstruktur (exempelvis P/PI/PD/PID) och regulatorparametrar som eliminerar kvarstående fel vid stegformade börvärdesändringar samt ger minst 55 graders fasmarginal och överkorsningsfrekvens $\omega_c = 3$ rad/s.

(2p)

4

Sambandet mellan drivande moment, u, och vinkeln θ för en roterande arm kan beskrivas av följande differentialekvation

$$\ddot{\theta}(t) = u(t).$$

a) Inför tillstånden $x_1 = \dot{\theta}(t)$ och $x_2 = \theta(t)$ och ställ upp systemet på tillståndsform där insignalen är $u(t)$ och utsignalen är $\theta(t)$.

(2p)

b) Bestäm en styrlag

$$u(t) = -l_1 x_1(t) - l_2 x_2(t) + k_r \theta_r(t)$$

så att det återkopplade systemets alla poler hamnar i -4 och ärvärdet, $\theta(t)$, följer börvärdet, $\theta_r(t)$, utan kvarstående fel vid stegformade börvärdesändringar.

(4p)

5

Betrakta följande olinjära modell av en eldriven båt. x_1 är båtens hastighet, x_2 är propellerns rotationshastighet och u är spänningen till motorn.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 + (x_1 + x_2)(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + u \end{cases}$$

a) Linjärisera systemet kring spänningen $u = u^0 = 1$. Antag att positiv spänning ger upphov till positiv hastighet för båten.

(4p)

b) Antag att båtens hastighet är mätbar men inte propellerns rotationshastighet. Bestäm en observatör med poler i -2 och -1 kring jämviktspunkten från a).

(2p)

Lycka till!

2c) $\omega_c = 0,3$ rad/s, $\varphi_m = 50°$

$$L = F \cdot G \Rightarrow |F| = \frac{|L|}{|G|}, \quad \arg F = \arg L - \arg G$$

$$\begin{cases} |L(j\omega_c)| = 1 \\ \arg L(j\omega_c) = -180° + 50° = -130° \end{cases}$$

$$\begin{cases} |G(j\omega_c)| = \dfrac{2}{\sqrt{1+0,3^2}} \approx 1,92 \\ \arg G(j\omega_c) = -\arctan(\omega_c) - 3\omega_c \cdot \dfrac{180}{\pi} \approx -68,2° \end{cases}$$

$$\Rightarrow |F(j\omega_c)| = \frac{1}{|G(j\omega_c)|} \approx 0,52$$

$$\arg F(j\omega_c) = \arg L(j\omega_c) - \arg G(j\omega_c) = -130 - (-68,2) = -61,8°$$

$$F_{PI} = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s} \Rightarrow \begin{cases} \arg F_{PI}(j\omega) = -90° + \arctan(T_i \cdot \omega) \\ |F_{PI}(j\omega)| = K_p \dfrac{\sqrt{1 + (T_i \cdot \omega)^2}}{T_i \cdot \omega} \end{cases}$$

$$\arg F_{PI}(j\omega_c) = -61,8° \Rightarrow T_i \approx 1,8$$

$$|F(j\omega_c)| = K_p \frac{\sqrt{1 + (T_i \omega_c)^2}}{T_i \omega_c} = 0,52 \Rightarrow K_p = \frac{0,52 \cdot T_i \omega_c}{\sqrt{1 + (T_i \omega_c)^2}}$$

$$\approx 0,24$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{F_{PI} = 0,24\left(1 + \frac{1}{1,8s}\right)}}$$

1/

a/ Laplace ger

$$(s^2+5s+1)Y(s) = (s+2)U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+2}{s^2+5s+1}$$

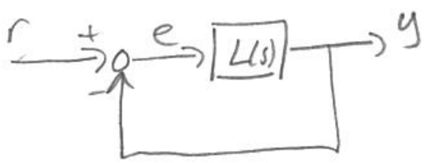
b/ $a\dot{y} - y = au(t)$

$$G(s) = \frac{a}{as-1}$$

Polen ges av $as-1=0 \Rightarrow s=\frac{1}{a}$

Stabilt då polen i VHP $\Rightarrow a<0$

c/



$$E(s) = \frac{1}{1+L(s)} \cdot R(s)$$

För att bli av med kvarstående fel vill vi att

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$$

Slutvärdessatsen ger att

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot \frac{1}{1+L(s)} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} = \frac{1}{1+L(0)}$$

Dvs vi vill att $L(0)$ ska vara stort (gå mot ∞) för att kvarstående felet ska gå mot 0.

2
a/

$$Y(s) = G(s)\cdot U(s) = \frac{5\cancel{s}}{(s^2+1)(s+2)}\cdot\frac{1}{\cancel{s}} =$$

$$= \frac{as+b}{s^2+1} + \frac{c}{s+2} = \frac{2-s}{s^2+1} + \frac{1}{s+2} =$$

↑ partialbråksuppdelning

$$\begin{cases} a+c=0 \\ 2a+b=0 \\ 2b+c=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}$$

$$= \frac{-s}{s^2+1} + \frac{2}{s^2+1} + \frac{1}{s+2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \underbrace{-\cos(t) + 2\sin(t)}_{\text{stationär}} + \underbrace{e^{-2t}}_{\substack{\text{transient} \\ \to 0 \text{ då } t\to\infty}}$$

b/ Avgör stabilitet för det återkopplade systemet

Karakteristisk ekvation $1 + F_{PI}\cdot G = 0$

$$1 + \frac{K}{T}\frac{(1+Ts)}{s}\cdot\frac{5s}{(s^2+1)(s+2)} = 0$$

$$s^3 + 2s^2 + (1+5K)s + 2 + \frac{5K}{T} = 0$$

Routh-Hurwitz

s^3	1	$1+5K$
s^2	2	$2+5K/T$
s^1	C_0	0
s^0	$2+5K/T$	

$$\left(C_0 = \frac{2(1+5K)-(2+5K/T)}{2}\right)$$

2 forts

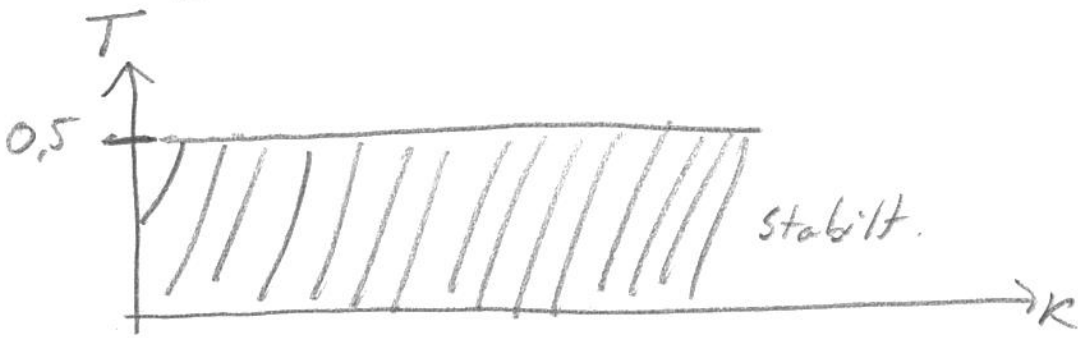
Då $K, T > 0$ så gäller att stabilt då

$c_0 > 0$ och $2 + 5K/T > 0$

$$c_0 > 0 \Rightarrow \frac{2(1+5K) - (2 + 5K/T)}{2} > 0 \Rightarrow \frac{5K}{T} < 10K$$

$$\Rightarrow T > \frac{1}{2}$$

$T > \frac{1}{2}$ leder till att $2 + 5K/T > 0$.



3 a) $G(s) = \dfrac{2}{1+0{,}25s} e^{-0{,}2s}$

Bestäm låg och högfrekvensasymptot för G.

$$|G(j\omega)| = \frac{2}{\sqrt{1+(0{,}25\omega)^2}} \cdot 1$$

$$|G(j\omega)|_{LF} \underset{\omega \to 0}{=} 2$$

$$|G(j\omega)|_{HF} \underset{\omega \to \infty}{=} \frac{2}{0{,}25 \cdot \omega} = \frac{8}{\omega}$$ dvs $\to 0$ då $\omega \to \infty$

Faller med 20 dB/dekad.

b) Vilken är den största överkorsningsfrekvensen vi kan ha då φ_m ska vara minst 55°?

$$L = K \cdot G = \frac{2K}{1+0{,}25s} e^{-0{,}2s}, \qquad K > 0$$

$$|L| = \frac{2K}{\sqrt{1+(0{,}25\omega)^2}}, \qquad \arg L = -\arctan(0{,}25\omega) - 0{,}2\omega \cdot \frac{180}{\pi}$$

Notera att argumentet inte påverkas av värdet på K

Bestäm ω_c, dvs den frekvens där $\arg L(j\omega_c) = -180^\circ + 55^\circ = -125^\circ$

Numerisk lösning ger att $\omega_c \approx 6$ rad/s.

$|G(j\omega_c)| = \dfrac{2}{\sqrt{\quad}} = 1{,}1 \Rightarrow K = \dfrac{1}{1{,}1} \approx 0{,}9$ (detta ger

3 forts/

Kvarstående felet ges av

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\cdot\frac{1}{1+K\cdot G(s)}\cdot\frac{1}{\cancel{s}} = \frac{1}{1+K\cdot G(0)} =$$

$$= \frac{1}{1+0{,}9\cdot 2} \approx \underline{\underline{0{,}36}}$$

c/ Vi behöver integralverkan i regulatorn $\Rightarrow F(s) = K\left(1+\frac{1}{Ts}\right)$

$$\begin{cases} |F(j\omega)| = K\dfrac{\sqrt{1+(T\omega)^2}}{T\omega} \\ \arg F(j\omega) = -90^\circ + \arctan(T\omega) \end{cases}$$

Bestäm K, T så att $\omega_c = 3$ rad/s

Bestäm T så att $\varphi_m = 55^\circ$ då $\omega_c = 3$ rad/s.

$$\arg G(j\cdot 3) = -\arctan(0{,}25\cdot 3) - 3\cdot 0{,}2\cdot\frac{180}{\pi} \approx -71^\circ$$

Regulatorn ska då ha fasvridningen -54° eftersom kretsöverföringen då får fasvridningen -125° ($\varphi_m = 55^\circ$).

$$\arg F(j\cdot 3) = -90^\circ + \arctan(T\cdot 3) = -54^\circ \Rightarrow T = 0{,}24$$

Bestäm K så att $|L(j\omega_c)| = 1 \Rightarrow K = \dfrac{T\cdot\omega_c}{\sqrt{1+(T\omega_c)^2}}\cdot\dfrac{1}{|G(j\omega_c)|}$

$$\Rightarrow K = 0{,}37$$

$$\Rightarrow F(s) = 0{,}37\left(1+\frac{1}{\quad}\right)$$

a/ $\ddot{\theta}(t) = u(t)$

Inför $\begin{cases} x_1(t) = \dot{\theta}(t) \\ x_2(t) = \theta(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \ddot{\theta}(t) = u(t) \\ \dot{x}_2(t) = \dot{\theta}(t) = x_1(t) \end{cases}$

Skriv på matrisform $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

b/ $u = -[l_1 \quad l_2]x + k_r \cdot \theta_r(t)$

Bestäm l_1, l_2 och k_r så

Vi har

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \\ u = -Lx + k_r \cdot \theta_r \end{cases} \Rightarrow \dot{x} = Ax + B(-Lx + k_r \cdot \theta_r) =$$

$$= (A - BL)x + k_r B \theta_r$$

Det återkopplade systemets poler ges av egenvärden till matrisen $A-BL$.

$$A - BL = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [l_1 \quad l_2] =$$

$$= \begin{bmatrix} -l_1 & -l_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a/ $\ddot{\theta}(t) = u(t)$

Inför $\begin{cases} x_1(t) = \dot{\theta}(t) \\ x_2(t) = \theta(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \ddot{\theta}(t) = u(t) \\ \dot{x}_2(t) = \dot{\theta}(t) = x_1(t) \end{cases}$

Skriv på matrisform $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

b/ $u = -\begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} x + k_r \cdot \theta_r(t)$

Bestäm l_1, l_2 och k_r så

Vi har

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \\ u = -Lx + k_r \cdot \theta_r \end{cases} \Rightarrow \dot{x} = Ax + B(-Lx + k_r \cdot \theta_r) =$$

$$= (A - BL)x + k_r B \theta_r$$

Det återkopplade systemets poler ges av egenvärden till matrisen $A - BL$.

$$A - BL = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -l_1 & -l_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4 forts

Egenvärdena ges av

$$\det(\lambda I - (A - BL)) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + l_1 & l_2 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + l_1) + l_2 = 0$$

Dvs polerna ges av rötterna till $s^2 + l_1 s + l_2 = 0$

Vi önskade det återkopplade systemets poler i -4,
dvs vi önskar $(s+4)^2 = 0 \Rightarrow s^2 + 8s + 16$

Identifiera koefficienter $\Rightarrow l_1 = 8$ och $l_2 = 16$.

Bestäm k_r så att θ följer θ_r vid stegformade börvärdesändringar.

Vi önskar därför att $|G_{\theta_r \theta}(j \cdot 0)| = 1$

Bestäm $G_{\theta \theta_r}(s) = C(sI - (A - BL))^{-1} k_r B =$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + l_1 & l_2 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \cdot K_r \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{K_r}{s(s+l_1) + l_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -l_2 \\ 1 & s + l_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = k_r \frac{1}{s(s+l_1) + l_2}$$

$|G_{\ldots}(j \cdot 0)| = \frac{K_r}{\ldots} \Rightarrow K_r = l_2$ för att bli av

5

a) Bestäm jämviktspunkten ($\dot{x}=0$) då $u=u^0=1$

$$\begin{cases} 0 = -x_1^0 + (x_1^0 + x_2^0)(x_2^0 - x_1^0) \\ 0 = -x_2^0 + u^0 \end{cases} \Rightarrow x_2^0 = 1$$

$$\Rightarrow 0 = -x_1^0 + (x_1^0 + 1)(1 - x_1^0) \Rightarrow 0 = \cancel{-x_1^0} \cancel{+x_1^0} - (x_1^0)^2 + 1 - x_1^0$$

$$\Rightarrow (x_1^0)^2 + x_1^0 - 1 = 0 \Rightarrow x_1^0 = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Antag att positiv spänning leder till positiv hastighet för ubåten

$$\Rightarrow x_1^0 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Jämviktspunkten } (x_1^0, x_2^0, u^0) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1, 1\right)$$

Bestäm approximation runt jämviktspunkten

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + (x_1 + x_2)(x_2 - x_1) & \equiv f_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u & \equiv f_2 \end{cases}$$

Bestäm $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} = -1 - 2x_1 \Rightarrow \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{(x^0,u^0)} = -\sqrt{5}$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 2x_2 \Rightarrow \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{(x^0,u^0)} = 2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial u} = 1$$

$$\Rightarrow \Delta\dot{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} -\sqrt{5} & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}^{A} \Delta x + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{B} \Delta u \quad \text{där} \begin{cases} \Delta x = x - x^0 \\ \Delta u = u - u^0 \end{cases}$$

b) forts.

Att ubåtens hastighet är mätbar motsvarar att $C = [1 \quad 0]$.

Verklig process $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$

Simulerad process $\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$

För en observatör så korrigerar vi skattat tillstånd enligt följande

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}) = (A - KC)\hat{x} + Bu + Ky$$

$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$, Bestäm K så att observatören får en pol i $\begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$

Observatörens poler ges av egenvärdena till matrisen $A - KC$

$$A - KC = \begin{bmatrix} -\sqrt{5} - k_1 & 2 \\ -k_2 & -1 \end{bmatrix}$$

Genom att välja k_2 till 0 så ges egenvärdena av diagonalelementen, dvs då $k_1 = 2 - \sqrt{5}$ så blir observatörens poler -1 och -2.