Reglerteknik M3

Tentamen 2020-08-21

Tid: 08:30 – 13:30
Lokal: https://chalmers.zoom.us/j/62714734068

Kurskod: ERE033

Lärare: Knut Åkesson, knut@chalmers.se, 0701-749525

Läraren kan nås via tentamensvakten i Zoom för att besvara eventuella frågor.

Tentamen omfattar totalt 30 poäng, där betyg tre fordrar 15 poäng, betyg fyra 20 poäng och betyg fem 26 poäng. Lösningar och svar till alla uppgifter ska vara tydligt motiverade. För att erhålla betyg fyra eller fem krävs förutom motsvarande resultat på skriftlig tentamen även ett godkänt resultat på ett kompletterande muntligt förhör. Den muntliga förhöret kommer att genomföras via Zoom och injudan till detta kommer att skickas ut, via epost, till de som erhållit betyg fyra eller högre på den skriftliga tentamen. Detta kommer att genomföras efter att den skriftliga tentamen är rättad.

Lösningsförslag till tentamen anslås på kurshemsidan senast första arbetsdagen efter tentamenstillfället. *Granskning* av rättning sker den *10:e* setember kl. 12.15 – 13.15 på Zoom (länk anslås på kurshemsidan). Kommer du senare mottages endast skriftliga klagomål mot rättningen. Sådana klagomål måste lämnas in **senast två veckor** efter ordinare granskning.

Tillåtna hjälpmedel:

- Lösningarna ska utföras på egen hand utan att få hjälp från någon annan person och lösningarna ska vara egenhändigt formulerade.
- I övrigt gäller att alla hjälpmedel är tillåtna.

1

Betrakta nedanstående uppgifter som inte är beroende av varandra.

a) Sambandet mellan en insignal u och utsignal y beskrivs av följande differentialekvation.

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = 2\dot{u}(t)$$

Bestäm utsignalen $y(t)$ då $u(t) = \sigma(t)$, där $\sigma(t)$ är enhetssteget. (1p)

b) Sambandet mellan en insignal u och utsignal y beskrivs av följande differentialekvation.

$$-\ddot{y}(t) - 7\dot{y}(t) - 12y(t) = \dot{u}(t) + 2u(t)$$

Avgör om systemet är insignal-utsignal stabilt. (2p)

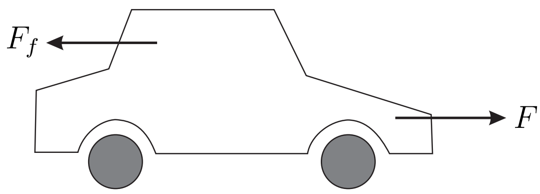
c) Sambandet mellan en insignal u och utsignal y beskrivs av följande differentialekvation.

$$\ddot{y}(t) + 2y(t) = \frac{1}{2}\cos(\omega t) + \sin(2\omega t)$$

Bestäm hur utsignalen $y(t)$ ser ut stationärt (dvs för stora t), gör detta för alla $\omega > 0$. (2p)

2

Betrakta bilen nedan.

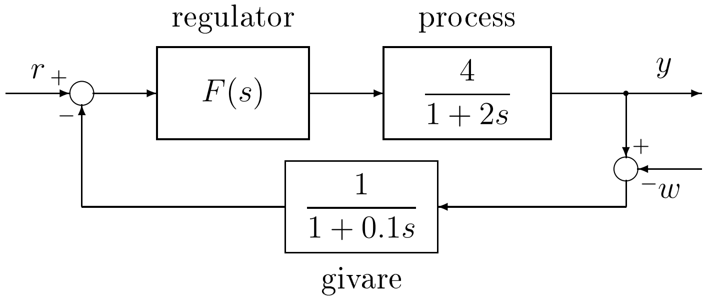


a) Bestäm överföringsfunktion från den drivande kraften F till bilens <u>hastighet</u> då F_f är proportionell mot bilens hastighet. (1p)

b) Bestäm en tillståndsmodell, låt bilens position och hastighet vara tillstånd, från den drivande kraften F till bilens <u>hastighet</u> då F_f är proportionell mot bilens hastighet. (1p)

3

Betrakta det återkopplade systemet nedan.



a) Dimensionera en PI-regulator

$$F(s) = K_p(1 + \frac{1}{sT_i})$$

så att överkorsningsfrekvensen och fasmarginalen blir

$$\omega_c = 0.4\omega_{G150}$$

$$\varphi_m = 45^o$$

där ω_{G150} är den frekvens där $G(s) = G_{process}(s)G_{givare}(s)$ har en fasvridning på ca -150^o.

(2p)

b) Antag att givaren även innehåller en tidsfördröjning (dödtid). Vilken är den största tidsfördröjningen hos givaren som det återkopplade systemet kan ha innan det blir instabilt?

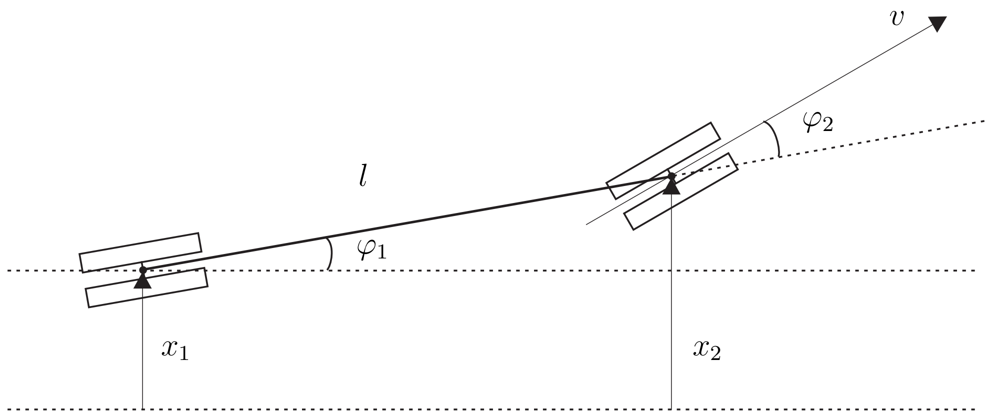
(2p)

c) Givaren påverkas av ett sinusformat mätbrus, $w(t)$, med frekvensen 0.1 Hz och amplituden 0.1. Hur mycket kommer $y(t)$ att variera beroende på mätbruset? Om du inte löste a) uppgiften kan du här anta att $K_p = 3, T_i = 1$.

(2p)

4

Betrakta modellen över en bil nedan.



Bilen har längden l m, enbart framhjulen är styrbara. Spårvidden antas vara mycket liten. Framhjulen drivs med konstant varvtal, vilket ger hastigheten v m/s i en riktning φ_2 radianer från bilens längsaxel. Insignalen till systemet är vinkeln på framhjulen, dvs φ_2. Då vi väljer tillstånd, x_1 och x_2, som i figuren så fås följande olinjära tillståndsmodell.

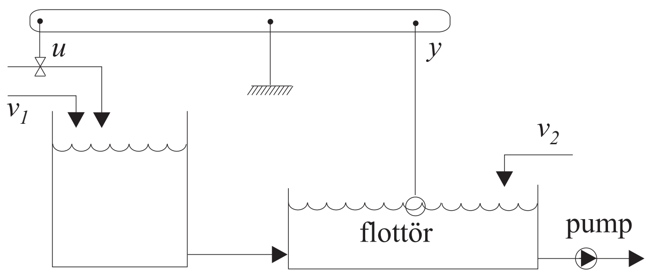
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= v\cos(\varphi_2(t))\,\frac{x_2(t)-x_1(t)}{l} \\ \dot{x}_2(t) &= v\sin(\arcsin(\frac{x_2(t)-x_1(t)}{l}) + \varphi_2(t)) \end{cases}$$

Inför antagandet att vinklarna φ_1 och φ_2 är små och ställ upp den linjära tillståndsmodellen för systemet ovan samt beräkna överföringsfunktionen från φ_2 till x_2.

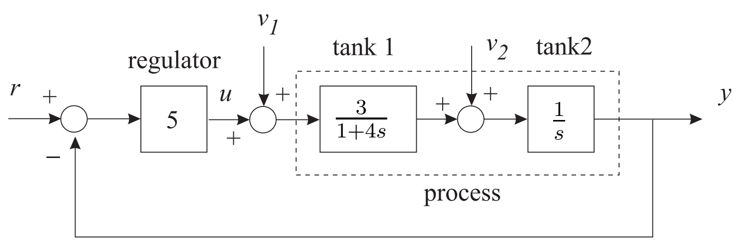
(3p)

5

Två tankar i serie i en anläggning nivåregleras. Den första tanken är hög med utlopp vid botten och har en dynamik som beskrivs väl av en första ordningens överföringsfunktion. Den andra tanken har ett konstant (pumpat) utflöde och beskrivs därför av en ren integration. Nivåregleringen sker mekaniskt med hjälp av en flottör i den andra tanken kopplad till en ventil vid inloppet till den första tanken. Systemet illustreras i figuren nedan.

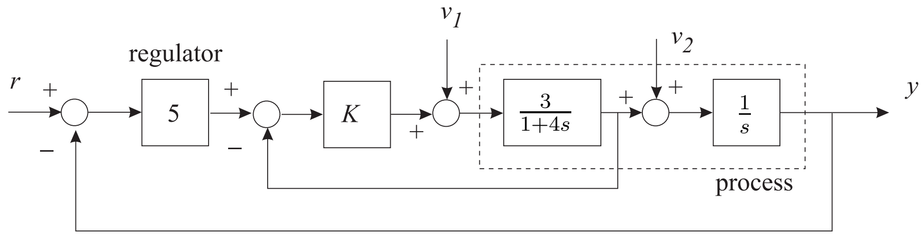


Den resulterande nivåregleringen är en P-regulator med förstärkningen 5, se blockschemat nedan.



Uppgiften fortsätter på nästa sida!

På grund av att störningen v_1 ibland är för kraftig för att hanteras av regleringen inför man en mekanisk kaskadreglering, vilket ger ett återkopplat system som beskrivs av blockschemat nedan.

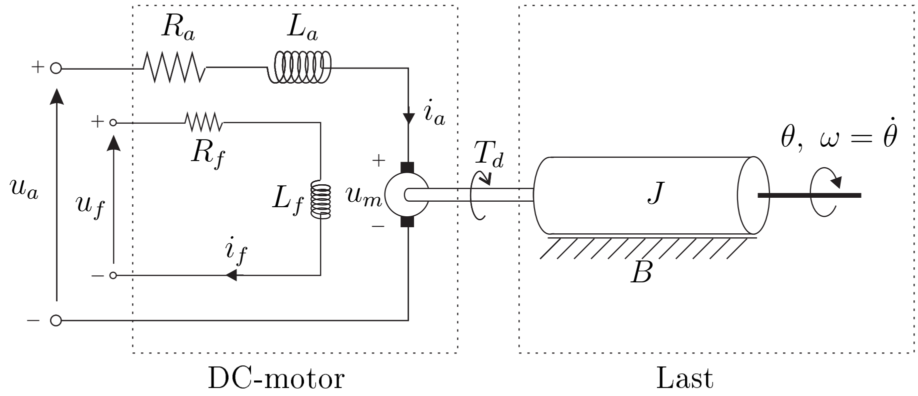


För vilka värden på K ger kaskadregleringen ett lägre kvarstående fel, jämfört med det ursprungliga återkopplade systemet, efter en stegstörning i v_1?

(4p)

6

DC-motorer används ofta för att styra mekaniska system. Betrakta figuren nedan som föreställer en DC-motor med roterande last.



Momentet T_d från DC-motorn genereras via elektromagnetisk induktion i motorns lindningar. Den roterande lindningen kallas ankarlindning (rotor) och den fasta lindningen kallas fältlindning (stator). Det magnetiska fältet Φ som genererar momentet T_d antages vara proportionell mot den ström i_f som går genom fältlindningen, d.v.s.

$$\Phi = K_f i_f$$

Det drivande momentet T_d antas i sin tur vara proportionell mot detta fält och strömmen genom ankarlindningen i_a, vilket innebär att

$$T_d = K_a \Phi i_a = K_a K_f i_f i_a$$

Det finns minst två möjligheter att styra momentet T_d, antingen genom att variera fältströmmen i_f eller ankarströmmen i_a. Den första varianten kallas fältstyrd DC-motor och den andra varianten ankarstyrd DC-motor. I denna uppgift ska vi ägna oss åt den fältstyrda DC-motorn, vilket innebär att momentet kan skrivas som

$$T_d = K_m i_f \quad \text{där} \;\; K_m = K_a K_f i_a$$

eftersom u_a och i_a är konstanta. Den roterande lasten har ett tröghetsmoment J och utsätts för viskös friktion som innebär ett dämpande moment proportionellt mot vinkelhastigheten enligt $-B\omega$.

Uppgiften fortsätter på nästa sida!

a) Välj lämpliga tillstånd och formulera en tillståndsmodell för den fältstyrda DC-motorn med den roterande lasten. Antag att u_f är insignal och θ är utsignal.

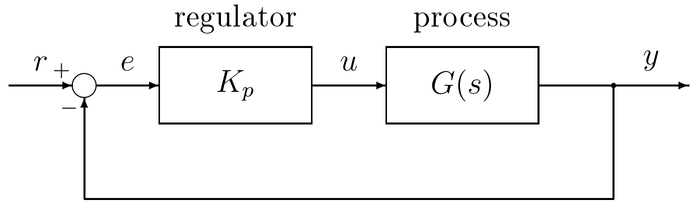
(3p)

b) Vilken relation råder mellan u_f och T_d då $L_f \ll R_f$?

(1p)

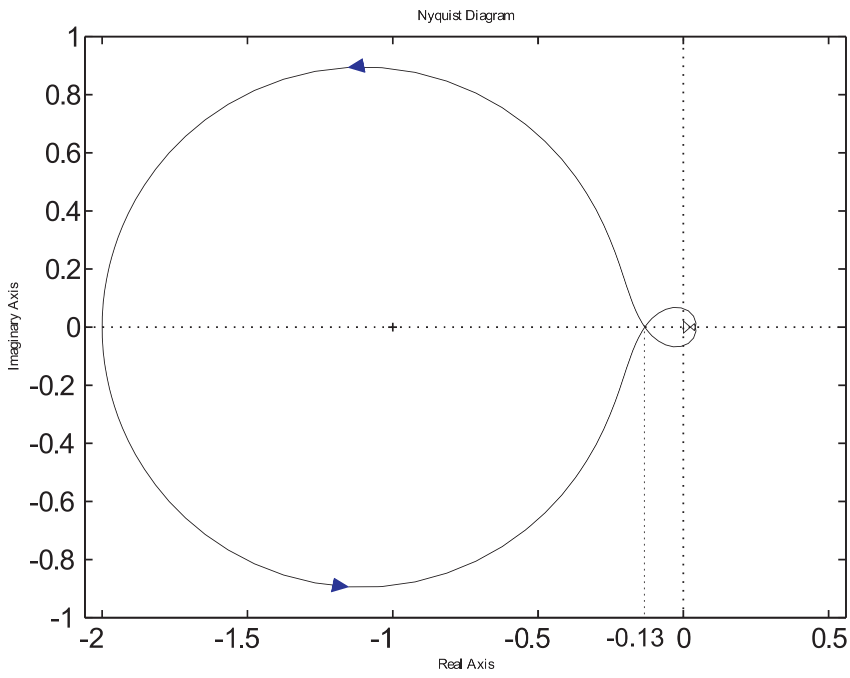
7

Betrakta det återkopplade systemet nedan.



I figuren visas Nyquistkurvan för processen

$$G(s) = \frac{2e^{-0.1s}}{s-1}$$



Uppgiften fortsätter på nästa sida!

Avgör i följande fall om det återkopplade systemet är stabilt. Motivering för varje enskilt fall krävs!

i) $K_p = 1$

ii) $K_p = -1$

iii) $K_p = 10$

(3p)

8

En tillståndmodell över en process beskrivs med insignal u och utsignal y beskrivs nedan.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 u(t) + B_2 \dot{u}(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

a) Visa att överföringsfunktionen från insignalen u till utsignalen y beskrivs av överföringsfunktionen nedan

$$G(s) = C[sI - A]^{-1}(B_1 + B_2 s) + D.$$

(2p)

b) Processen ovan ska styras med en linjär tillståndsåterkoppling

$$u(t) = -Lx(t) + K_r r(t),$$

där L är en radvektor med lika många element som i tillståndsvektorn x, K_r en skalär och $r(t)$ är börvärdet. Bestäm en tillståndmodell för det återkopplade systemet.

(1p)

Lycka till!

1/

a/ $\ddot{y} + \dot{y} = 2\dot{u}$

Bestäm $y(t)$ då $u(t) = \sigma(t)$

Laplace ger

$$s^2 Y(s) + sY(s) = 2sU(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2\cancel{s}}{\cancel{s}(s+1)} = \frac{2}{s+1}$$

Laplace av $u(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s}$ $\Rightarrow Y(s) = \frac{2}{s+1} \cdot \frac{1}{s} = 2 \cdot \frac{1}{s+1} \frac{1}{s}$

Invers laplace ger

$$y(t) = 2\left(1 - e^{-t}\right)\sigma(t)$$

b/

$-\ddot{y} - 7\dot{y} - 12y = \dot{u} + 2u$

Avgör insignal-utsignal stabilitet

Bestäm polerna. Laplace ger $-s^2Y(s) - 7sY(s) - 12Y(s) = sU(s) + 2U(s)$

$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = -\frac{s+2}{(s^2+7s+12)} = -\frac{(s+2)}{(s+3)(s+4)}$$

Alla poler i strikt VHP $\Rightarrow$ Insignal-utsignal stabilt.

1c/ $\ddot{y} + 2y = \frac{1}{2}\cos(\omega t) + \sin(2\omega t)$

Bestäm y(t) stationärt.

$G(s) = \frac{1}{s^2+2} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{-\omega^2+2} \Rightarrow |G(j\omega)| = \frac{1}{2-\omega^2}$

Polerna ges av $s^2+2=0 \Rightarrow s = \pm\sqrt{2}\,j$.

I detta fall är systemet marginellt stabilt.

Sinus in ger sinus ut gäller enbart för insignal-utsignal stabila system (även poler i origo är ok, men ej poler på imaginäraxeln.

2/

a/ Newtons 2:a lag för translaterande system ger

$$m \cdot \ddot{x} = F - F_f , \quad F_f = b \cdot \dot{x}$$

Laplace ger $\quad m s^2 X(s) = F - b s X(s)$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{1}{ms^2 + bs} \cdot F$$

Bilens hastighet är $\dot{x}$, dvs $s \cdot X(s)$

$$\Rightarrow V(s) = s\,X(s) = \underline{\underline{\frac{1}{ms+b}}} \cdot F$$

b/ Inför $\begin{cases} x_1(t) = x(t) \\ x_2(t) = v(t) = \dot{x}(t) \end{cases}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{x}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \ddot{x}(t) = \frac{1}{m} F(t) - \frac{b}{m}\dot{x}(t) = \frac{1}{m} F(t) - \frac{b}{m} x_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} F(x)$$

$$v(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

3/ $G(s) = \frac{4}{1+2s} \cdot \frac{1}{1+0.1s}$

$$\begin{cases} |G(j\omega)| = \frac{4}{\sqrt{1+(2\omega)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(0.1\omega)^2}} \\ \arg G(j\omega) = -\arctan(2\omega) - \arctan(0.1\omega) \end{cases}$$

Bestäm ω_{G150°, dvs den vinkelfrekvens då G har fasvridningen -150°.

Detta fås ur Bodediagram eller genom att pröva med olika frekvenser i miniräknaren.

$\Rightarrow \omega_{G150^\circ} \approx 18,5$ rad/s.

Välj $\omega_c = 0.4\omega_{G150} \approx 7,4$ rad/s

$\arg G(j\omega_c) \approx -123^\circ$

$\arg F(j\omega) = -90^\circ + \arctan(T_i\omega)$

$\arg L(j\omega) = \arg F(j\omega) + \arg G(j\omega)$

$\Rightarrow$

$\arg L(j\omega_c) = \arg F(j\omega_c) + \arg G(j\omega_c) = -180^\circ + 45^\circ = -135^\circ$

$\Rightarrow$

$\arg F(j\omega_c) = -135^\circ - \arg G(j\omega_c) = -12,4$

$\Rightarrow$

$\arg F(j\omega_c) = -90^\circ + \arctan(T_i\omega_c) = -12,4^\circ$

$\Rightarrow T_i \cdot \omega_c = 4.56 \Rightarrow \underline{\underline{T_i \approx 0.62}}$

3 forts)

Välj nu K_p så att kretsöverföringen har förstärkningen 1 vid w_c.

$$|L(jw_c)| = 1 \Rightarrow |F(jw_c)||G(jw_c)| = 1$$

$$\Rightarrow |F(jw_c)| = \frac{1}{|G(jw_c)|} = 0{,}22$$

$$|F(jw_c)| = K_p \frac{\sqrt{1+(T_i w_c)^2}}{T_i w_c} = \frac{1}{0{,}22} \Rightarrow \underline{\underline{K_p \approx 4{,}5}}$$

b) $\arg e^{-sL} = -wL \text{ rad} = -w \cdot L \cdot \frac{180}{\pi}$ grader.

Eftersom vi har en fasmarginal på $45°$ så kan vi öka fasvridningen $45°$ innan det återkopplade systemet blir instabilt. Fasmarginal läses av vid överkorsningsfrekvensen.

$$-w_c \cdot L \cdot \frac{180}{\pi} = -45° \Rightarrow \underline{\underline{L \approx 0{,}1\text{s}}}$$

3c)

$f = 0.1$ Hz. Vi behöver omvandla från frekvens till vinkelfrekvens. $\omega = 2\pi f$

Detta ger att mätbruset $w(t) = 0.1 \sin(0.2\pi t)$.

Stationärt påverkar mätbruset utsignalen med $y(t) = |G_{wy}(j\omega)| \sin(\omega t + \arg G(j\omega))$.

Vi är enbart intresserad av $|G_{wy}(j\omega)|$

$$G_{wy}(s) = \frac{G_{givare} \cdot F \cdot G_{process}}{1 + G_{givare} \cdot F \cdot G_{process}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{1+0.1s}\right)\left(K_p\left(1 + \frac{1}{sT_i}\right)\right)\left(\frac{4}{1+2s}\right)}{1 + \left(\frac{1}{1+0.1s}\right) \cdot \left(K_p\left(1 + \frac{1}{sT_i}\right)\right)\left(\frac{4}{1+2s}\right)} =$$

$$= \frac{4K_p(sT_i + 1)}{0.2T_i s^3 + 2.1 T_i s^2 + T_i(4K_p + 1)s + 4K_p}$$

$$\Rightarrow |G_{wy}(j\omega)|^2 = \frac{(4K_p)^2((\omega T_i)^2 + 1)}{(4K_p - 2.1T_i\omega^2)^2 + (T_i\omega)^2((4K_p+1) - 0{,}2\omega^2)^2}$$

$$\Rightarrow |G_{wy}(j \cdot 0.2\pi)|^2 \approx 1{,}04 \Rightarrow |G_{wy}(j \cdot 0.2\pi)| \approx 1.02$$

Stationärt blir utsignalen $y(t) = 1.02 \cdot 0.1 \cdot \sin(0.2\pi t + \arg G_{wy}(j0.2\pi))$

4) Tillståndsmodellen ges av

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = v\cos(\varphi_2(t))\,\dfrac{x_2(t)-x_1(t)}{\ell} \equiv f_1(x_1, x_2, \varphi_2) \\ \dot{x}_2(t) = v\sin\left(\arcsin\left(\dfrac{x_2(t)-x_1(t)}{\ell}\right) + \varphi_2(t)\right) \equiv f_2(x_1, x_2, \varphi_2) \end{cases}$$

För små vinklar $|\varphi| < \varepsilon$ gäller att $\sin(\varphi) \approx \varphi$ och att $\cos(\varphi) \approx 1$.

Vi kan även beräkna Jacobianen på standardsätt

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} = -\dfrac{v}{\ell}\cos(\varphi_2(t)) \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} = \dfrac{v}{\ell}\cos(\varphi_2(t)) \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial \varphi_2} = -v\sin(\varphi_2(t))\,\dfrac{x_2(t)-x_1(t)}{\ell} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\dfrac{v}{\ell}\cos\left(\arcsin\left(\dfrac{x_2(t)-x_1(t)}{\ell}\right) + \varphi_2(t)\right) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x_2(t)-x_1(t)}{\ell}\right)^2}} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} = \dfrac{v}{\ell}\cos\left(\arcsin\left(\dfrac{x_2(t)-x_1(t)}{\ell}\right) + \varphi_2(t)\right)\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x_2(t)-x_1(t)}{\ell}\right)^2}} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial \varphi_2} = v\cos\left(\arcsin\left(\dfrac{x_2(t)-x_1(t)}{\ell}\right.\right. + \varphi_2(t)\left.\left.\right)\right) \end{cases}$$

4 forts,

Genom att sätta in arbetspunkten $(x_1^0=0,\ x_2^0=0,\ \varphi_2^0=0)$ får vi tillståndsmodellen

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = v\,\dfrac{x_2(t)-x_1(t)}{l} \\ \dot{x}_2(t) = v\left(\dfrac{x_2(t)-x_1(t)}{l} + \varphi_2(t)\right) \end{cases}$$

Detta kunde vi även fått direkt genom att $\sin(\varphi) \approx \varphi$ och $\cos(\varphi) \approx 1$ för små φ.

På matrisform

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{v}{l} & \frac{v}{l} \\ -\frac{v}{l} & \frac{v}{l} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}}_{B} \varphi_2 \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Överföringsfunktionen från φ_2 till x_2 ges av

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B = \frac{v}{(s-\frac{v}{l}) + (\frac{v}{l})^2 (s-\frac{v}{l})^{-1}}$$

5/ Inför följande beteckningar

$$F(s) = 5, \quad G_1(s) = \frac{3}{1+4s}, \quad G_2(s) = \frac{1}{s}$$

Det kvarstående felet ges av $\lim_{t \to \infty} (r(t) - y(t))$

Systemet är linjärt, därför kan vi sätta $r = v_2 = 0$ då vi undersöker hur y påverkas av v_1.

$$Y = G_2 G_1 (V_1 + F(-Y)) \Rightarrow Y = \frac{G_2 G_1}{1 + F G_2 G_1} \cdot V_1$$

$$K_f = \lim_{s \to 0} s(R(s) - Y(s)) = \lim_{s \to 0} - \frac{G_2 G_1}{1 + F G_2 G_1} = - \frac{G_1(0)}{G_2^{-1}(0) + F(0) G_1(0)} = \underline{\underline{-\frac{1}{5}}}$$

om det existerar

$R(s) = 0$
$V_1(s) = \frac{1}{s}$

För kaskadregleringen, inför hjälpvariabel u som är signalen efter G_1 blocket.

$$u = G_1(V_1 + K_p(-FY - u)) \Rightarrow U = \frac{G_1}{1 + G_1 K_p} V_1 - \frac{G_1 K_p F}{1 + G_1 K_p} Y$$

Vi har att $Y = G_2 \cdot u$

Sätt in och lös ut $Y \Rightarrow Y = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 K_p + G_1 G_2 K_p F} V_1$

Kvarståendefelet ges av $\lim_{s \to 0} - \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 F + G_1 G_2 K_p F} = - \frac{1}{5 K_p}$

Dvs, kvarstående felet minskar då $K_p > 1$.

Notera att slutvärdet existerar eftersom alla poler ligger i

6/

a/ Kirchhoffs lag ger: $-u_f + R_f \cdot i_f + L_f \cdot \dot{i}_f = 0$

Newtons lag ger: $J\ddot{\theta} = T_d - B\dot{\theta}$

Väli tillståndsvektorn $[i_f, \theta, \dot{\theta}]^T$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{i}_f \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_f}{L_f} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_m}{J} & 0 & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_f} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_f \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \end{cases}$$

b/ Vi har att T_d prop. mot u_f. Från tillståndsmodellen har vi att

$$\dot{i}_f = -\frac{R_f}{L_f} i_f + \frac{1}{L_f} u_f$$

Dvs överföringsfunktionen från u_f till i_f ges av

$$\frac{\frac{1}{L_f}}{s + \frac{R_f}{L_f}} = \frac{\frac{1}{R_f}}{\frac{L_f}{R_f} \cdot s + 1},$$

Tidskonstanten ges av $\frac{L_f}{R_f}$, och kommer att vara nära 0

7/ $Z = N + P$

Z sökt, P givet, N löses av i figuren

$P = 1$ eftersom $G(s)$ har en pol i HHP.

a/ $K_p = 1$. $L = K_p \cdot G$. N löses av direkt i figuren $\Rightarrow N = -1 \Rightarrow Z = -1 + 1 = 0$, dvs det återkopplade systemet saknar poler i HHP $\Rightarrow$ insignal-utsignal stabilt.

b/ $K_p = -1$. Nyquistkurvan ska speglas i Y-axeln.
$\Rightarrow N = 0 \Rightarrow Z = 0 + 1 = 1$, dvs det återkopplade systemet har <u>en</u> pol i HHP $\Rightarrow$ instabilt.

c/ $K_p = 10$. Nyquistkurvan blir en 10 ggr förstorad version av den givna kurvan. Punkten -1 hamnar nu inom den omslutningen.
$\Rightarrow N = 1 \Rightarrow Z = 1 + 1 = 2$, dvs 2 poler i HHP
$\Rightarrow$ Instabilt.

8/ a) Laplacetransformera (vi beräknar en överföringsfunktion så sätt alla initialvärden till 0)

$$sX = aX + B_1 U + s B_2 U$$

$$\Rightarrow (sI - A)X = (B_1 + B_2 s)U$$

$$\Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}(B_1 + B_2 s)U(s)$$

$$Y(s) = C X(s) + D \cdot U(s) =$$

$$= \underline{\underline{\left(C(sI-A)^{-1}(B_1 + B_2 s) + D\right)}} \cdot U(s)$$

b/ $u(t) = -Lx + k_r \cdot r$

$\Rightarrow \dot{u}(t) = -L\dot{x} + k_r \cdot \dot{r}$

Sätt u och $\dot{u}$ i tillståndsmodellen.

$$\dot{x} = Ax + B_1(-Lx + K_r \cdot r) + B_2(-L\dot{x} + k_r \cdot \dot{r})$$

Lös ut $\dot{x}$

$$\begin{cases} \dot{x} = (I + B_2 L)^{-1}(A - B_1 L)x + (I + B_2 L)^{-1} B_1 K_r \cdot r + \\ \qquad + (I + B_2 L)^{-1} B_2 K_r \cdot \dot{r} \\ y = Cx + Du \end{cases}$$