Reglerteknik M3

Tentamen 2014-04-23

Tid: 14:00 – 19:00 Lokal: Väg och vatten

Kurskod: ERE033

Lärare: Knut Åkesson, 0701-749525

Läraren besöker tentamenssalen vid två tillfällen för att svara på eventuella frågor. Detta sker normalt sett en timme efter tentamensstart samt en timme före tentamens slut.

Tentamen omfattar totalt 30 poäng, där betyg tre fordrar 12 poäng, betyg fyra 18 poäng och betyg fem 24 poäng. Lösningar och svar till alla uppgifter ska vara tydligt motiverade.

Lösningsförslag till tentamen anslås på kurshemsidan senast första arbetsdagen efter tentamenstillfället. *Granskning* av rättning sker den *7* maj kl. 12.15 – 13.15 i laborationssalen (vattentankslabbet, rum 5220).

Tillåtna hjälpmedel:

- Reglerteknik M3 - Formelsamling
- Bodediagram
- Beta och Physics handbook, Standard Mathematical Tables, TEFYMA
- Chalmersgodkänd räknare alternativt valfri kalkylator med rensat minne, ej handdator/smartphone.
- För Erasmusstudenter är lexikon, till och från svenska, tillåtet.

Inga anteckningar är tillåtna!

1

a) Sambandet mellan en insignal $u(t)$) och utsignal $y(t)$ beskrivs av följande differentialekvation.

$$\ddot{y}(t) + (1+a)\dot{y}(t) + ay(t) = u(t)$$

Avgör för vilka värden på parametern a som systemet är insignal-utsignal stabilt.

(2p)

b) Sambandet mellan en insignal $u(t)$ och utsignal $y(t)$ beskrivs av följande differentialekvation.

$$\ddot{y}(t) + (1+a)\dot{y}(t) + ay(t) = u(t-1)$$

Bestäm överföringsfunktionen från u till y och avgör för vilka värden på parametern a som systemet är insignal-utsignal stabilt.

(1p)

c) Sambandet mellan en insignal $u(t)$ och utsignal $y(t)$ beskrivs av differentialekvation från a) uppgiften, dvs

$$\ddot{y}(t) + (1+a)\dot{y}(t) + ay(t) = u(t).$$

Bestäm en tillståndsbeskrivning av systemet.

(1p)

d) Betrakta differentialekvationen från föregående deluppgift. Låt insignalen $u(t)$ vara sinusformad med periodtiden $T = 1/2$ sekund. Bestäm det stationära utseendet på utsignalen som funktion av parametern a. Förutsätt att systemet är insignal-utsignal stabilt.

(3p)

e) Betrakta ett elektriskt tåg som rör sig på plan räls. Vi modellerar tåget och för följande samband mellan drivande kraft $f(t)$ och positionen $x(t)$.

$$\ddot{x}(t) = -\dot{x}(t) + f(t).$$

För en elektrisk DC-motor med låg induktans kan sambandet mellan den drivande spänningen $u(t)$ och genererad kraft beskrivas av

$$\dot{f}(t) + f(t) = u(t).$$

En P-regulator, $F_P(s) = K_p$, har som uppgift att positionera tåget genom att styra spänningen u. Bestäm för vilka värden på K_p som det återkopplade systemet får en amplitudmarginal på 2.

(3p)

2

En process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{e^{-s}}{s(s+1)}$$

ska regleras.

a) Låt processen regleras med en P-regulator, dvs $F(s) = K_p$. Under förutsättning att fasmarginalen måste vara $\varphi_m = 60°$, vad medför det för överkorsningsfrekvens ω_c?

(2p)

b) Bestäm ett lead-filter

$$F_{lead}(s) = K_p \frac{1 + s\tau_d}{1 + s\tau_d/b},$$

så att fasmarginalen blir $\varphi_m = 60°$ och $\omega_c = 0.4$ rad/s.

(3p)

c) Antag att en regulator har bestäms, exempelvis genom att lösa föregående uppgift, som ger att $\varphi_m = 60°$ och $\omega_c = 0.4$ rad/s. Det finns dock osäkerhet kring hur stor dödtiden är i processen och den verkliga processen ges istället av

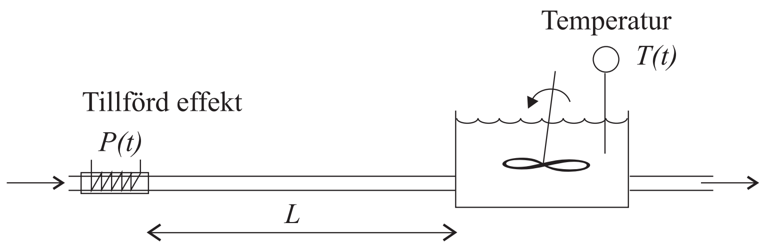
$$G(s) = \frac{e^{-(1+\Delta)s}}{s(s+1)}.$$

Bestäm det största värdet på Δ som gör att det återkopplade systemet blir stabilt.

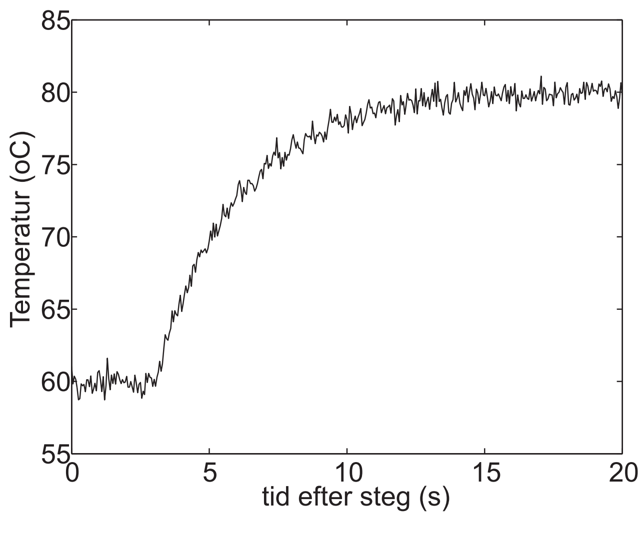
(2p)

3

Temperaturen i en tank skall PI-regleras. Uppvärmingen sker en bit uppströms genom upphettning av manteln, se figuren nedan.



För att få en modell att utgå ifrån vid regleringen har ett stegsvarsförsök genomförts. Följande kurva erhölls då den tillförda effekten ökades från 20 till 25 kW.



a) Ange en lämplig överföringsfunktion som beskriver processen från tillförd effekt till uppmätt temperatur!

(2p)

b) Ange en lämplig differentialekvation som beskriver processen från tillförd effekt till uppmätt temperatur!

(1p)

c) Bestäm en PI-regulator med parameterval enligt Ziegler-Nichols svängningsmetod!

(2p)

4

Betrakta följande olinjära differentialekvationer

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u^3$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + \sqrt{x_2}$$

a) Vi har en insignal och vill beräkna en linjär approximation av systemet kring denna insignal. Låt insignalen vara $u^0 = 2$ och bestäm systemets jämviktspunkter.

(1p)

b) Linjärisera systemet kring den jämviktspunkt du fick fram i a)-uppgiften.

(2p)

c) Avgör om den beräknade tillståndsmodellen är stabil. Om du inte löst b) kan du använda följande tillståndsmodell.

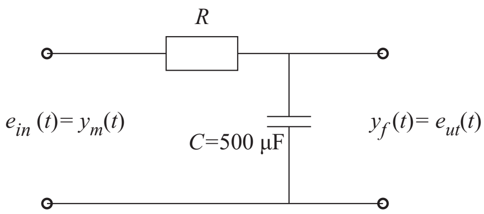
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

(2p)

5

En regulator skall implementeras i ett styrsystem med en samplingstid på $h = 0.2$ sekunder. Tyvärr är det högfrekventa nätstörningar på den analoga mätsignalen (spänningen e_{in}). Därför skall man filtrera den analoga signalen genom ett s.k. antialiasfilter. På grund av sin enkelhet väljer man att göra ett RC-filter med en kondensator som har kapacitansen $500 \cdot 10^{-6}$F.



Sätt bandbredden för filtret till Nyquistfrekvensen och beräkna vad resistansen bör vara.

(3p)

Lycka till!

1a/ $\ddot{y}+(1+a)\dot{y}+ay=u$

För vilka värden på a är systemet insignal-utsignal stabilt?

Laplace ger

$$Y(s)=\frac{1}{s^2+(1+a)s+a}\cdot U(s)=\frac{1}{(s+a)(s+1)}U(s)$$

Alla poler ligger i vänster halvplan då $a>0$.

b/ $\ddot{y}+(1+a)\dot{y}+ay=u(t-1)$

Laplace ger

$$Y(s)=\frac{e^{-s}}{s^2+(1+a)s+a}\cdot U(s)$$

Samma stabilitetsvillkor som i uppgift a), dvs parametern $a>0$.

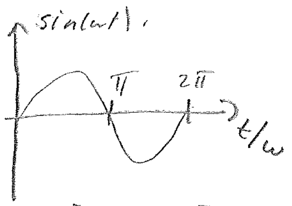
c/ $\ddot{y}+(1+a)\dot{y}+ay=u$

Beskriv på tillståndsform

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=\dot{y}(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=\ddot{y}(t)=-(1+a)\dot{y}(t)-ay(t)+u(t)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{X}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -a & -(1+a)\end{bmatrix}X(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}X(t)+0\cdot u(t)\end{cases}$$

d/ $u(t)=\sin(\omega t)$. Periodtiden $T=1/2$ sekund



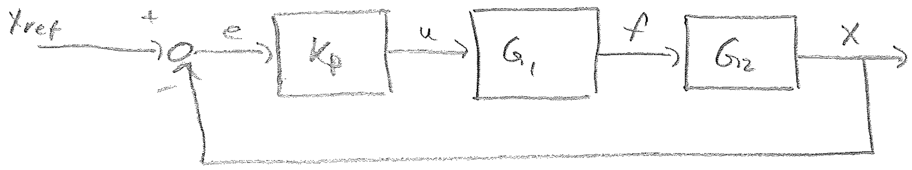
$\Rightarrow \omega=4\pi \Rightarrow T=1/2$

$$\sin(\omega t)\longrightarrow\boxed{G}\longrightarrow |G(j\omega)|\sin(\omega t+\arg G(j\omega))$$

$$\begin{cases}|G(j\omega)|=\dfrac{1}{|j\omega+a|\,|j\omega+1|}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}\sqrt{1+\omega^2}}\\ \arg G(j\omega)=-\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)-\arctan(\omega)\end{cases}$$

$$y(t)=\frac{1}{\sqrt{a^2+(4\pi)^2}\sqrt{1+(4\pi)^2}}\sin\left(4\pi t-\arctan\left(\frac{4\pi}{a}\right)-\arctan(4\pi)\right)$$

1e)



Bestäm G_1: $\dot{f}+f=u$, Laplace ger $(s+1)F(s)=U(s) \Rightarrow F(s)=\underbrace{\frac{1}{s+1}}_{G_1(s)} \cdot U(s)$

Bestäm G_2: $\ddot{x}=-\dot{x}+f$. Laplace ger $(s^2+s)X(s)=F(s) \Rightarrow X(s)=\underbrace{\frac{1}{s(s+1)}}_{G_2(s)} \cdot F(s)$

$\Rightarrow L(s)=\frac{K_p}{s(s+1)^2}$

Amplitudmarginalen löses av då fasvridningen är $-180°$, dvs $\arg L(j\omega_\pi)=-180°$

$\arg L(j\omega)=-90°-2\arctan(\omega)$

ω_π: $-90°-2\arctan(\omega_\pi)=-180° \Rightarrow \arctan(\omega_\pi)=45° \Rightarrow \omega_\pi=1$

$|L(j\omega_\pi)|=\frac{K_p}{1(1+1)}=\frac{K_p}{2}$, dvs då $K_p=1 \Rightarrow |L(j\omega_\pi)|=\frac{1}{2}$

vilket innebär att amplitudmarginalen $A_m=2$.

2/ $G(s) = \frac{e^{-s}}{s(s+1)}$

a/ Processen regleras med en regulator $F(s) = K_p$.
Då K_p bestäms så $\varphi_m = 60°$, vad medför det för överkorsningsfrekvensen ω_c?

$$\arg G(j\omega) = -90° - \arctan(\omega) - \omega \cdot \frac{180°}{\pi}$$

$\varphi_m = 60° \Rightarrow$ Bestäm ω_c så att

$$\arg G(j\omega_c) = -90° - \arctan(\omega_c) - \omega_c \frac{180°}{\pi} = -120°$$

$\Rightarrow \arctan(\omega_c) + \omega_c \cdot \frac{180°}{\pi} = 30° \Rightarrow \omega_c \approx 0{,}265$ rad/s (löses numeriskt)

b/ Bestäm ett lead-filter så att fasmarginalen $\varphi_m = 60°$ och $\omega_c = 0{,}4$ rad/s

$$F_{lead}(s) = K_p \frac{1 + s\tau_d}{1 + s\tau_d/b}$$

$$\arg G(j\omega) = -90° - \arctan(\omega) - \omega \cdot \frac{180}{\pi} \Rightarrow \arg G(j\omega_c) = -134.7°$$

$\varphi_m = 60° \Rightarrow \arg L(j\omega_c) = -120°$ $(-180° + 60°)$ $\Rightarrow$ Regulatorn måste öka fasen med $134.7° - 120° = 14.7° \Rightarrow \varphi_{max} = 14.7°$

$$\Rightarrow b = \frac{1 + \sin \varphi_{max}}{1 - \sin \varphi_{max}} = 1.68$$

$$\tau_d = \frac{\sqrt{b}}{\omega_c} = \frac{\sqrt{1{,}68}}{0.4} = 3.24$$

$$K_p = \frac{1}{|G(j\omega_c)|\sqrt{b}}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\omega\sqrt{1+\omega^2}} \Rightarrow |G(j\omega_c)| \approx 2{,}32 \Rightarrow K_p = \frac{1}{2{,}32 \cdot \sqrt{1{,}68}} \approx 0{,}33$$

$$\Rightarrow F(s) = 0{,}33 \frac{1 + 3.24s}{1 + 1.93s}$$

2c) Extra dödtid i kretsöverföringen.

$$G(s) = \frac{e^{-(1+\Delta)s}}{s(s+1)} = \frac{e^{-s}}{s(s+1)} \; e^{-\Delta s}$$

Bestäm det största Δ så att det återkopplade systemet förblir stabilt.

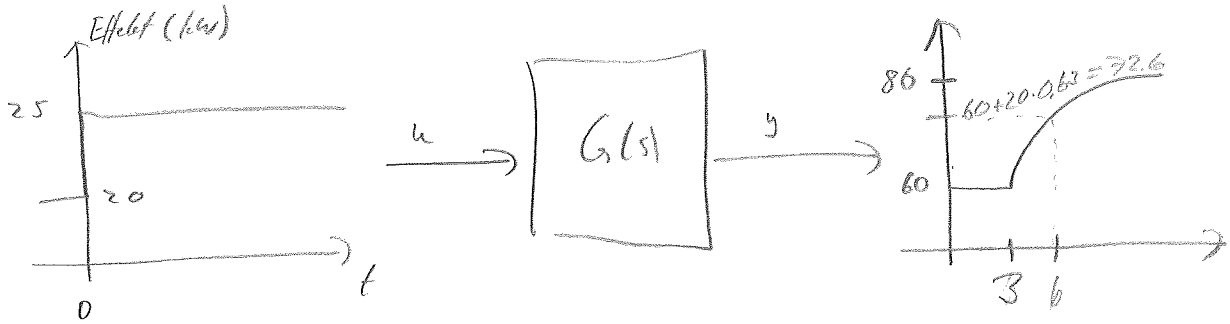
$\varphi_m = 60°$ vid $\omega_c = 0{,}4$ rad/s.

$$\arg\left(e^{-\Delta j\omega}\right) = -\Delta \cdot \omega \cdot \frac{180°}{\pi}$$

Bestäm Δ så att $-\Delta \cdot \omega_c \cdot \frac{180°}{\pi} = -60° \Rightarrow \Delta = \frac{\pi \cdot 60}{180 \cdot \omega_c} = \frac{\pi \cdot 60}{180 \cdot 0{,}4} \approx 2{,}62$

Dvs den största tiden Δ är på 2,62 sekunder.

3/ a/



$\Delta u = 25-20 = 5$

$\Delta y = 80-60 = 20$ $\Big\}$ Statisk förstärkning $\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{20}{5} = 4$

Tidsfördröjningen är ca 3 sekunder

Stigtiden är ca 3 sekunder

$\Rightarrow$ $G(s)$ är approximativt $\underline{\underline{\frac{4}{1+3s} e^{-3s}}}$

b/

$Y(s) = G(s) \cdot U(s) \quad \Rightarrow \quad (1+3s)\,Y(s) = 4e^{-3s}U(s)$

Invers laplace ger

$\underline{\underline{y(t) + 3\dot{y}(t) = 4u(t-3)}}$

c/ Bestäm PI-regulator med Ziegler-Nichols

1. Styr med ren PI, hitta stabilitetsgränsen

Bestäm ω_π; dvs $\arg G(j\omega_\pi) = -180°$

$\arg G(j\omega) = -\arctan(3\omega) - 3\omega \frac{180°}{\pi}$

ω_π: $-\arctan(3\omega) - 3\omega \cdot \frac{180°}{\pi} = -180° \Rightarrow \omega_\pi \approx 0,635$ rad/s (löses numeriskt)

$\Rightarrow |G(j\omega_\pi)| = \frac{4}{\sqrt{1+(3\omega_\pi)^2}} \approx 1,77 \quad \Rightarrow \quad K_0 = \frac{1}{|G(j\omega_\pi)|} \approx 0,57$

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_\pi} \approx 4,1$

Tabell formelsamling ger $\left.\begin{array}{l} K_p = 0.45K_0 = 0,25 \\ T_I = 0,85T_0 = 3.49 \end{array}\right\} \Rightarrow F(s) = K_p\left(1+\frac{1}{T_i \cdot s}\right) = 0,25\left(1+\frac{1}{3.49 \cdot s}\right)$

4/

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u^3 & \equiv f_1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \sqrt{x_2} & \equiv f_2 \end{cases}$$

Linjärisera då insignalen $u^\circ = 2$ (skrivs ibland $u_0 = 2$)

a/ Bestäm jämviktspunkter

$$\begin{cases} 0 = -x_1^\circ + (u^\circ)^2 \\ 0 = -x_1^\circ + \sqrt{x_2^\circ} \end{cases} \Rightarrow \quad 0 = -x_1^\circ + 8 \Rightarrow x_1^\circ = 8 \Rightarrow 0 = -8 + \sqrt{x_2^\circ} \Rightarrow x_2^\circ = 64$$

Jämviktspunkten $(x_1^\circ, x_2^\circ, u^\circ) = (8, 64, 2)$

b/

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -1 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial u} = 3u^2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -1 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{1}{2\sqrt{x_2}} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial u} = 0$$

Sätt in jämviktspunkt

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{(x^\circ, u^\circ)} = -1 \qquad \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{(x^\circ, u^\circ)} = 0 \qquad \left.\frac{\partial f_1}{\partial u}\right|_{(x^\circ, u^\circ)} = 12$$

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{(x^\circ, u^\circ)} = -1 \qquad \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{(x^\circ, u^\circ)} = \frac{1}{16} \qquad \left.\frac{\partial f_2}{\partial u}\right|_{(x^\circ, u^\circ)} = 0$$

Inför $\begin{cases} \Delta x = x - x^\circ \\ \Delta u = u - u^\circ \end{cases}$

$$\begin{cases} \Delta \dot{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1/16 \end{bmatrix}}^{A} \Delta x + \overbrace{\begin{bmatrix} 12 \\ 0 \end{bmatrix}}^{B} \Delta u \\ \left(\Delta y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \Delta x \right) \end{cases}$$

4c) Avgör stabilitet.

Stabiliteten ges av egenvärdena till matrisen A

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1/16 \end{bmatrix}$$

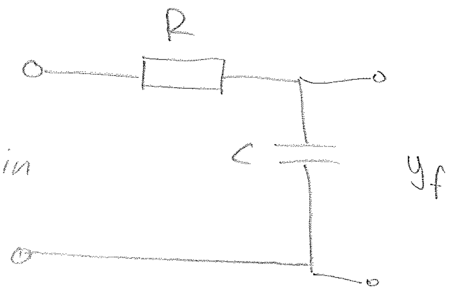
Bestäm egenvärdena

$$Ax = \lambda x \Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ -1 & 1/16 - \lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(1/16 - \lambda) = 0 \Rightarrow$$ De två egenvärdena ges av $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1/16$.

Vi har ett egenvärde > 0, dvs ej stabilt.

5/ $h = 0{,}2$ sekunder

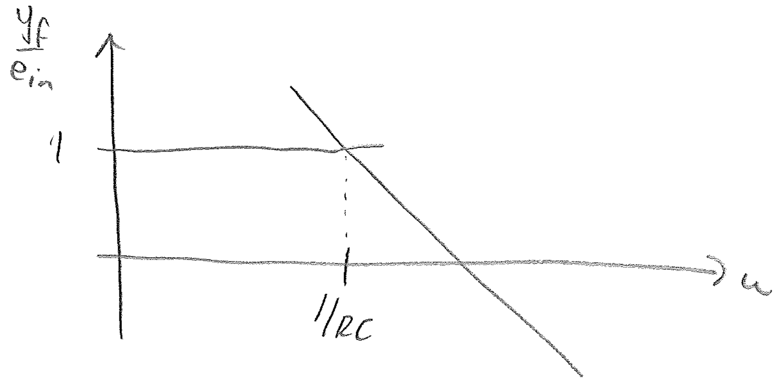


$C = 500\,nF$

Bestäm G från e_{in} till y_f.

Utnyttja spänningsdelning $\Rightarrow Y_f(s) = \dfrac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} \cdot E_{in}(s) \Rightarrow$

$\Rightarrow Y_f(s) = \dfrac{1}{1 + sRC} \cdot E_{in}(s)$



Samplingstiden $h = 0{,}2$ sekunder $\Rightarrow w = \dfrac{2\pi}{h} \Rightarrow \omega = \dfrac{2\pi}{0.2} = 31.4$ rad/s

Från Nyquistssamplingsteorem vet vi att högsta frekvensen som samplas för vara halva samplingsfrekvensen $\Rightarrow W_{max} = \dfrac{31{,}4}{2} = 15{,}7$ rad/s

Vi måste nu välja brytfrekvensen på lågpassfiltret så att signalen med frekvenser över 15,7 rad/s är mycket små.

Om vi väljer $1/RC$ som 15,7 så kommer signalerna med $w > 15{,}7$ rad/s att dämpas minst 3dB. För att få större dämpning väljer vi exempelvis brytpunkten till $\dfrac{15{,}7}{2} = 7{,}8$ rad/s. $\Rightarrow \dfrac{1}{RC} = 7{,}8 \Rightarrow R = \dfrac{1}{7{,}8C} = \underline{\underline{256\,\Omega}}$