Reglerteknik M3

Tentamen 2013-12-21

Tid: 14:00 – 19:00 Lokal: Väg och vatten

Kurskod: ERE033

Lärare: Knut Åkesson, 0701-749525

Läraren besöker tentamenssalen vid två tillfällen för att svara på eventuella frågor. Detta sker normalt sett en timme efter tentamensstart samt en timme före tentamens slut.

Tentamen omfattar totalt 30 poäng, där betyg tre fordrar 12 poäng, betyg fyra 18 poäng och betyg fem 24 poäng. Lösningar och svar till alla uppgifter ska vara tydligt motiverade.

Lösningsförslag till tentamen anslås på kurshemsidan senast första arbetsdagen efter tentamenstillfället. *Granskning* av rättning sker den *15* och *22* januari kl. 12.30 – 13.30 i laborationssalen (vattentankslabbet, rum 5220).

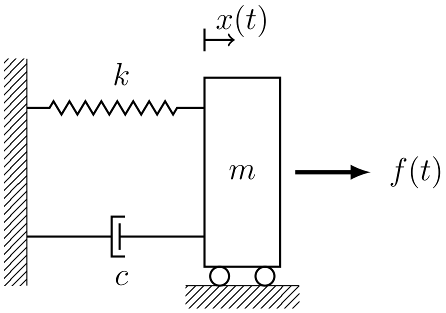
Tillåtna hjälpmedel:

- Reglerteknik M3 - Formelsamling
- Bodediagram
- Beta och Physics handbook, Standard Mathematical Tables, TEFYMA
- Chalmersgodkänd räknare alternativt valfri kalkylator med rensat minne, ej handdator/smartphone.
- För Erasmusstudenter är lexikon, till och från svenska, tillåtet.

Inga anteckningar är tillåtna!

1

Betrakta massa-fjäder-dämpare systemet nedan.



a) Visa att differentialekvationen som beskriver sambandet mellan den drivande kraften $f(t)$ och positionen $x(t)$ ges av

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t).$$

(1p)

b) Bestäm överföringsfunktionen från kraften f till positionen x.

(1p)

c) Låt massan, m, vara positiv, bestäm villkor på k och c för att överföringsfunktionen från f till x ska vara insignal-utsignal stabilt.

(1p)

d) Antag att systemet är insignal-utsignal stabilt. Låt $f(t) = \sin(\omega t)$, bestäm ett uttryck for $x(t)$ som gäller stationärt. Detta ska anges som en funktion av m, k och c.

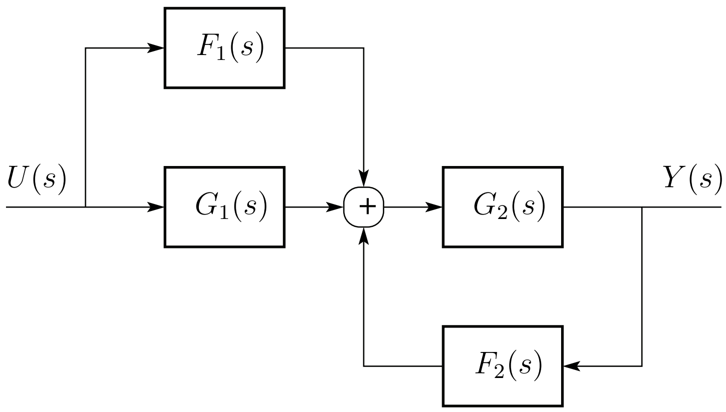
(2p)

e) Systemet ska regleras med en P-regulator, $f(t) = K_p(x_{ref(t)} - x(t))$, där $x_{ref}(t)$ är börvärdet. För vilka K_p är det återkopplade systemet stabilt? Du kan anta att massan m är positiv.

(1p)

2

Betrakta blockschemat nedan, bestäm överföringsfunktionen från $U(s)$ till $Y(s)$.



(2p)

3

Betrakta ett elektriskt tåg som rör sig på plan räls. Vi modellerar tåget och för följande samband mellan drivande kraft $f(t)$ och positionen $x(t)$.

$$m\ddot{x}(t) = -\xi\dot{x}(t) + f(t).$$

För en elektrisk DC-motor med låg induktans kan sambandet mellan den drivande spänningen $u(t)$ och genererad kraft beskrivas av

$$T\dot{f}(t) + f(t) = Ku(t).$$

a) Bestäm den enklast regulatorn som kan användas för reglera positionen på tåget utan kvarstående fel (P $<$ PI $<$ PD $<$ PID). Du måste motivera ditt svar med tydliga beräkningar.

(3p)

b) Bestäm K_p och K_d för PD-regulatorn nedan (notera att detta är en ideal PD-regulator som saknar lågpassfilter på D-delen). Antag att $m = \xi = K = 1,\ T = 0.1$.

$$F_{PD}(s) = K_p + K_d s$$

så att det återkopplade systemet får en fasmarginal på 60° och en överkorsningsfrekvens på 5 rad/s.

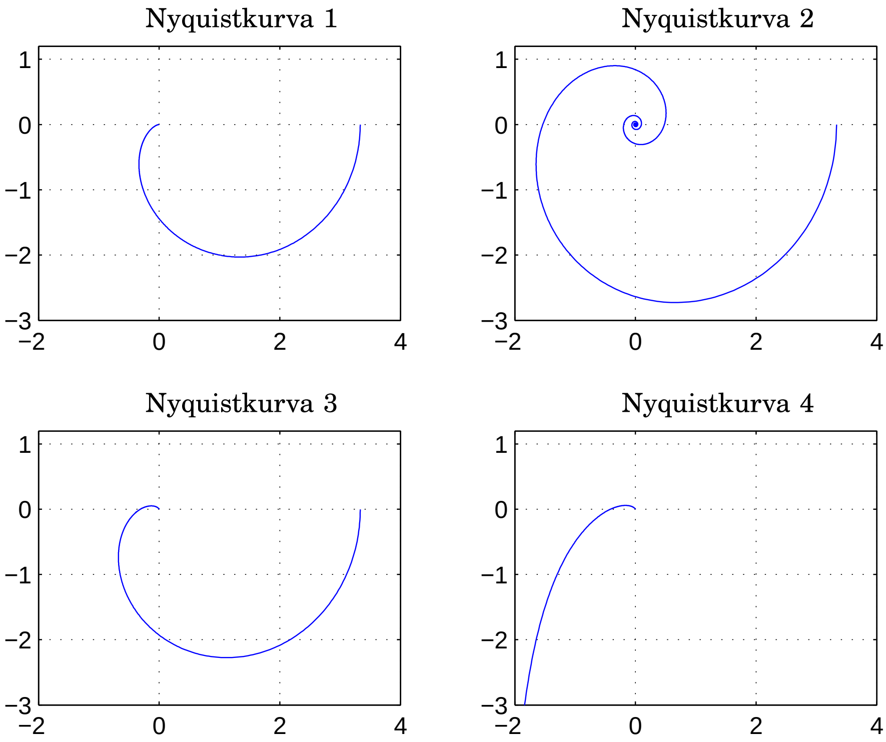
(3p)

4

Nyquistdiagrammen för fyra av överföringsfunktionerna $G_1 - G_6$ visas i figuren nedan. Para ihop rätt överföringsfunktion med rätt Nyquistkurva och motivera dina svar.

$$G_1 = \frac{10}{s^2 + 4s + 3} \quad G_2 = \frac{30}{(s+1)(s+3)^2} \quad G_3 = \frac{10}{s+3}$$

$$G_4 = \frac{1}{s^2 - 4s + 3} \quad G_5 = \frac{5}{s(s^2 + 4s + 3)} \quad G_6 = \frac{10}{s^2 + 4s + 3} e^{-s}$$



(2p)

5

Skriv den olinjära modellen

$$\ddot{x}(t) + 5\dot{x}(t) + \cos x(t) = u(t)$$

på tillståndsform och linjärisera den kring de stationärpunkter som ges av insignalen $u_0(t) = 0$. Avgör för varje stationärpunkt om det linjäriserade systemet är insignal-utsignal stabilt eller ej.

(4p)

6

Bestäm Fourierserieutvecklingen av

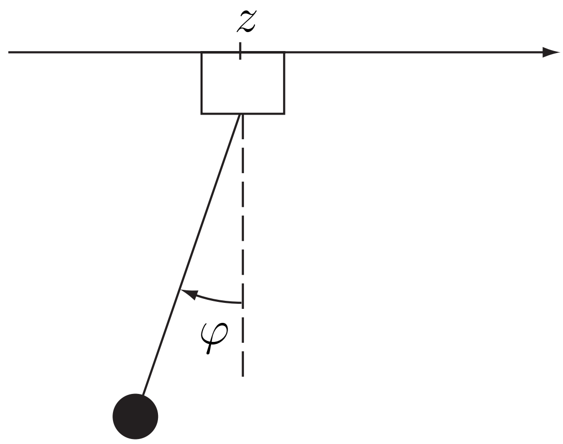
$$f(t) = \begin{cases} t + \pi & \text{för } -\pi \le t < 0; \\ 0 & \text{för } 0 \le t < \pi. \end{cases}$$

där $f(t) = f(t + 2\pi)$ för alla t.

(4p)

7

Betrakta traversen i figuren nedan.



Vagnen rör sig längs en balk och från vagnen hänger en vajer med last. Vi kan låta systemets tillstånd vara $x_1(t) = \varphi(t)$, $x_2(t) = \dot{\varphi}(t)$ Vagnens position längs balken är $z(t)$ och som styrsignal använder vi vagnens acceleration, $u(t) = \ddot{z}(t)$. Systemet kan skrivas på matrisform enligt nedan.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

a) Beräkna en tillståndsåterkoppling $u(t) = -Lx(t) + r(t)$ så att det slutna systemet får en dubbelpol i -5.

(2p)

b) Om lasten svänger så bromsas den svagt av luftmotstånd och friktion i vajern, vilket ingår i modellen. Hur skulle man ändra i matrisformen ovan för att modellera fallet utan friktion och luftmotstånd?

(1p)

8

Vi ska styra processen

$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)}$$

med en PD-regulator. Efter regulatordesign kom vi fram till att följande val av parametrar fungerar bra.

$$F(s) = 7 + \frac{4s}{1 + 0.05s}$$

Vi beräknar bandbredden för det återkopplade systemet till ca 10 rad/s, vilket ger oss att en lämpligt samplingsintervall kan vara ca 0.05 sekunder.

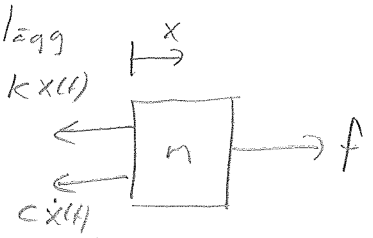
Bestäm en differensekvation för samplingsintervallet $h = 0.05$ sekunder som approximerar den kontinuerliga PD-regulatorn ovan. Visa med pseudokod hur man skulle kunna implementera regulatorn på en mikroprocessor (antag ett enkelt programmeringsspråk C eller Matlab liknande, korrekt syntax är ej nödvändigt).

(3p)

God Jul!

1/

a/ Frilägg



Newtons andra lag:

$$m\cdot\ddot{x} = f(t) - kx(t) - c\dot{x}(t) \iff \underline{\underline{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f}}$$

b/ Laplacetransformera

$$(ms^2 + cs + k)X(s) = F(s) \iff \underline{\underline{\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2+cs+k}}}$$

c/ $m > 0$

Routh-Hurwitz

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & m & k \\ s^1 & c & 0 \\ s^0 & k & \end{array}$$

Då $m > 0 \Rightarrow c, k > 0$

Både c och k måste vara positiva då $m > 0$ för att överföringsfunktionen ska vara insignal-utsignal stabil

d/ $f(t) = \sin(\omega t)$

$$G(s) = \frac{1}{ms^2+cs+k}, \quad m, c, k > 0$$

$$\sin(\omega t) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow |G(j\omega)| \sin(\omega t + \arg G(j\omega))$$

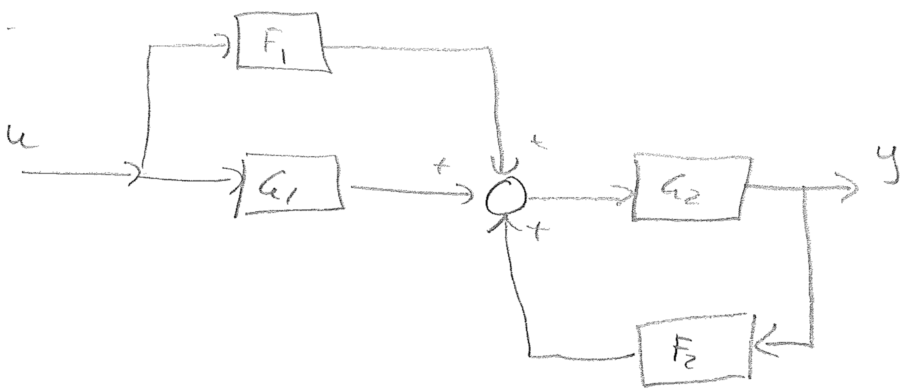
$$|G(j\omega)| = \frac{1}{|-m\omega^2 + cj\omega + k|} = \frac{1}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$

$$\arg G(j\omega) = \arg\left(\frac{1}{(k-m\omega^2) + cj\omega}\right) \Rightarrow \begin{cases} k \geq m\omega^2 \Rightarrow \arg G(j\omega) = -\arctan\left(\frac{c\omega}{k-m\omega^2}\right) \\ k < m\omega^2 \Rightarrow \arg G(j\omega) = -\arctan\left(\frac{c\omega}{k-m\omega^2}\right) - 180^\circ \end{cases}$$

e/ $f(t) = K_p(x_{ref} - x) \Rightarrow L(s) = \frac{K_p}{ms^2+cs+k} \Rightarrow G_{ry}(s) = \frac{K_p}{ms^2+cs+k+K_p}$

Routh-Hurwitz ger att $k + K_p > 0 \Rightarrow \underline{\underline{K_p > -k}}$

2/



$$Y = G_2\left((F_1 + G_1)\cdot U + F_2\cdot Y\right)$$

$\Leftrightarrow$

$$(1 - G_2 F_2)Y = G_2(F_1 + G_1)\cdot U$$

$\Leftrightarrow$

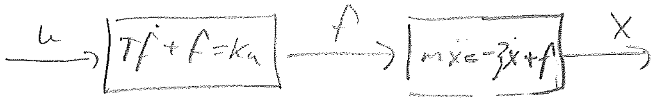
$$\underline{\underline{\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_2(F_1+G_1)}{1-G_2F_2}}}$$

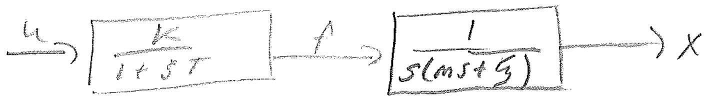
3/

$$m\ddot{x} = -\xi\dot{x} + f$$

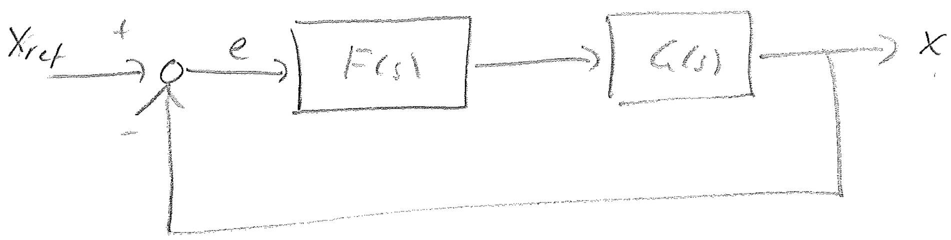
$$T\dot{f} + f = ku$$

a/





$$\Rightarrow G(s) = \frac{K}{s(1+sT)(ms+\xi)}$$



$$E(s) = X_{ref}(s) - (G(s)F(s)\cdot E(s)) \Rightarrow E(s) = \frac{1}{1+G(s)F(s)}\cdot X_{ref}(s)$$

Vi vill kunna följa ändringar hos X_{ref}, dvs $X_{ref}(t) = \sigma(t)$.

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{1+G(s)F(s)}\cdot\frac{1}{s} = \frac{1}{1+G(0)F(0)}$$

Om gränsvärdet existerar ($T, \xi > 0$ då $m > 0$)

$$\begin{cases} F_1(s) = K_p & \Rightarrow F_1(0) = 0 \\ F_2(s) = K_p + \frac{K_i}{s} & \Rightarrow F_2(0) = \infty \\ F_3(s) = K_p + K_d\cdot s & \Rightarrow F_3(0) = 0 \\ F_4(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d\cdot s & \Rightarrow F_4(0) = 0 \end{cases}$$

Alla regulatorer innebär inget kvarstående fel eftersom $G(0) = \infty$ (processen innehåller integration).

P är den enklaste regulator som fungerar i detta fall

3b/ $m = \zeta = 1, \quad T = 0$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{1}{s(1+0.1s)(1+s)}$$

Bestäm $F(s) = K_p + K_d \cdot s$ så att $\omega_c = 5$ rad/s och $\varphi_m = 60°$.

$$\begin{cases} |G(j\omega)| = \dfrac{1}{\omega \cdot \sqrt{1+(0.1\omega)^2} \cdot \sqrt{1+\omega^2}} \\ \arg G(j\omega) = -90° - \arctan(0.1\omega) - \arctan(\omega) \end{cases}$$

$$\begin{cases} |G(j\omega_c)| = \dfrac{1}{5\sqrt{1+0.5^2}\sqrt{1+5^2}} \approx \dfrac{1}{28.5} \approx 0{,}035 \\ \arg G(j\omega_c) \approx -195{,}3° \end{cases}$$

Vid överkorsningsfrekvens ska regulatorn uppfylla

$$\begin{cases} |F(j\omega_c)| = \dfrac{1}{|G(j\omega_c)|} = 28.5 \\ \arg F(j\omega_c) = +75{,}3° \quad (15{,}3° + \varphi_m) \end{cases}$$

$$\begin{cases} |F(j\omega)| = \sqrt{K_p^2 + (K_d \cdot \omega)^2} \\ \arg F(j\omega) = \arctan\left(\dfrac{K_d \cdot \omega}{K_p}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 28.5 = \sqrt{K_p^2 + (K_d \cdot 5)^2} \\ 15.3 = \arctan\left(\dfrac{K_d \cdot 5}{K_p}\right) \end{cases} \Rightarrow 3{,}8 = \frac{5K_d}{K_p} \Rightarrow K_p = 1{,}31 K_d$$

$$28.5 = \sqrt{(1{,}31 K_d)^2 + (5K_d)^2} \Rightarrow K_d = 5{,}51 \Rightarrow K_p = 7.22$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{F(s) = 7{,}2 + 5{,}51s}}$$

4)

Kurva	Förstärkning		Fasvridning	
	låga w	höga w	låga w	höga w
1	dryg 3	0	0	$-180°$
2	dryg 3	0	0	∞
3	dryg 3	0	0	$-270°$
4	∞	0	$-90°$	$-270°$

Kurva 1: $LF \approx 3{,}3$, HF 0. #poler − #nollställen = 2 $(-180° = -2 \cdot 90°)$

Enbart G_1 passar in.

Kurva 2: Tidsfördröjning $\Rightarrow$ enbart G_6 passar in.

Kurva 3: $LF \approx 3{,}3$, $HF = 0$ #poler − #nollställen = 3 $(-270° = -3 \cdot 90°)$

Enbart G_2 passar in.

Kurva 4: Innehåller integration $\Rightarrow$ Enbat G_5 passar in.

5/ $\begin{cases} \ddot{x}(t) + 5\dot{x}(t) + \cos x(t) = u(t) \\ u_0(t) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1(t) = x(t) \\ x_2(t) = \dot{x}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{x}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \ddot{x}(t) = -5\dot{x}(t) - \cos x(t) + u(t) = \\ \qquad = -5x_2(t) - \cos(x_1(t)) + u(t) \end{cases}$$

Tillståndsform:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \equiv f_1 \\ \dot{x}_2(t) = -\cos(x_1(t_1)) - 5x_2(t) + u(t) \equiv f_2 \end{cases}$$

Bestäm jämviktspunkter

$$\begin{cases} 0 = x_2^0 \\ 0 = -\cos(x_1^0) - 5x_2^0 + u_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2^0 = 0 \\ \cos(x_1^0) = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1^0 = \frac{\pi}{2} \pm n \cdot \pi$$

Linjärisiera

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{(x^0, u_0)} = 0 \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{(x^0, u_0)} = 1$$

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{(x^0, u_0)} = +\sin(x_1)\Big|_{(x^0, u_0)} = (-1)^{n+1} \qquad \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{(x^0, u_0)} = -5$$

Skriv på matrisform

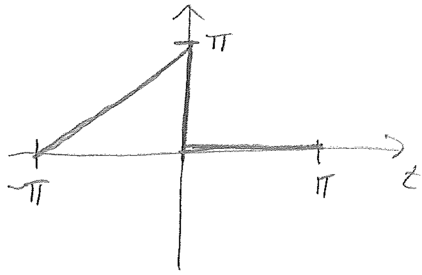
$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1^{n+1} & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Egenvärdena till $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$ ges av $\frac{1}{2}(-5 + \sqrt{21})$, $\frac{1}{2}(-5 - \sqrt{21})$ $\Rightarrow$ insignal-utsignal stabilt

— " — $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$ ges av $\frac{1}{2}(-5 + \sqrt{29})$, $\frac{1}{2}(-5 - \sqrt{29})$ $\Rightarrow$ Ej insignal-utsignal stabilt.

6/ Bestäm Fourierserieutvecklingen av

$$\begin{cases} f(t) = \begin{cases} t+\pi & -\pi \le t < 0 \\ 0 & 0 \le t < \pi \end{cases} \\ f(t) = f(t+2\pi) \end{cases}$$



För perioden $T = 2\pi$ gäller

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(nt)\,dt \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(nt)\,dt \end{cases}$$

Eftersom $f(t) = 0$ för $0 \le t < \pi$ räcker det att vi integrerar från $-\pi$ till 0.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} (t+\pi)\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\pi t\right]_{-\pi}^{0} \right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi^2}{2} + \pi^2\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} (t+\pi) \cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} t\cos(nt)\,dt + \pi \int_{-\pi}^{0} \cos(nt)\,dt \right)$$

Bestäm an

$$\int_{-\pi}^{0} t\cos(nt)\,dt = \left[\frac{t\sin(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0} \frac{\sin(nt)}{n}\,dt = \left[\frac{\cos(nt)}{n^2}\right]_{-\pi}^{0} = \frac{1}{n^2}\left(1 - (-1)^n\right)$$

$$\pi \int_{-\pi}^{0} \cos(nt)\,dt = \pi \left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{0} = \frac{\pi \sin(n\pi)}{n} = 0$$

6 forts

$$a_n = \frac{1}{\pi n^2}(1-(-1)^n) \qquad \text{for} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Beräkna b_n

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (t+\pi)\sin(nt)\,dt$$

$$\int_{-\pi}^{0} t\sin(nt)dt = \left[-\frac{t\cos(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \int_{-\pi}^{0}\frac{\cos(nt)}{n}\,dt = \underline{\frac{\pi}{n}(-1)^{n+1}}$$

$$\pi\int_{-\pi}^{0}\sin(nt) = \pi\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{0} = -\frac{\pi}{n}\left(1-\cos(n\pi)\right) = -\frac{\pi}{n}(1-(-1)^n)$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{1}{\cancel{\pi}}\left(\frac{\cancel{\pi}}{n}(-1)^{n+1} - \frac{\cancel{\pi}}{n}(1-(-1)^n)\right) = \frac{1}{n}\left((-1)^{n+1} - 1 + (-1)^n\right) = -\frac{1}{n}$$

Tillsammans ger detta

$$f(t) \simeq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^n)}{n^2}\cos(nt) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(nt)$$

7/

a)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \overset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}} x(t) + \overset{B}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} u(t) \\ y(t) = \underset{C}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}} x(t) \end{cases}$$

Bestäm en tillståndsåterkoppling $u = -Lx + r$ så att det slutna systemet får en dubbelpol i -5.

$u(t) = -Lx = -[l_1 \quad l_2]\, x(t) + r(t)$

Det återkopplade systemet ges av

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(-Lx(t) + r(t)) = (A - BL)x(t) + Br(t)$$

Vi vill att matrisen $A - BL$ ska ha två egenvärden i -5.

$$A - BL = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [l_1 \quad l_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4-l_1 & -1-l_2 \end{bmatrix}$$

Bestäm egenvärdena

$$\det(A - BL - sI) = \begin{vmatrix} -s & 1 \\ -4-l_1 & -1-l_2-s \end{vmatrix} = s^2 + (1+l_2)s + 4 + l_1 = 0$$

En dubbelpol i -5 motsvarar den karakteristiska ekv. $(s+5)^2 = s^2 + 10s + 25$.

Identifiera koefficienter

$$\left.\begin{aligned} 1 + l_2 &= 10 \\ 4 + l_1 &= 25 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} l_1 = 21 \\ l_2 = 9 \end{cases}$$

Återkoppling ges av $u = -(21 \quad 9)\, x(t) + r(t)$

7b/

Den andra raden i matrisformen säger

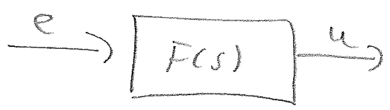
$\ddot{\varphi}(t) = -4\,\varphi(t) - 1\cdot\dot{\varphi}(t) + u(t).$

Accelerationen hos φ motverkas alltså av en kraft som är prop. mot vinkelhastigheten $(\dot{\varphi}(t))$.

Dvs koefficienten som är på position (2,2) i A-matrisen (dvs 1) modellerar friktionen, Sätter vi den till 0 blir modellen friktionsfri.

8/

$$F(s) = 7 + \frac{4s}{1+0,05s} = \frac{7+4.35s}{1+0.05s}$$



$$\Rightarrow U(s) = \frac{7+4.35s}{1+0.05s} E(s)$$

Invers laplace ger

$$u(t) + 0.05\,\dot{u}(t) = e(t) + 4.35\,\dot{e}(t)$$

Approximer med Euler bakåt $\left(\dot{f}(t) \approx \frac{f(t) - f(t-h)}{h}\right)$

$$u(t) + 0.05\left(\frac{u(t) - u(t-h)}{h}\right) = e(t) + 4.35\left(\frac{e(t) - e(t-h)}{h}\right)$$

$h = 0.05.$

$$0.1\; u(t) - 0.05\,u(t-h) = 4.4\,e(t) - 4.35\,e(t-h)$$

$$\Rightarrow u(kh) = \underbrace{0,5}_{c_1} u(kh-h) + \underbrace{44}_{c_2} e(kh) - \underbrace{43.5}_{c_3} e(kh-h)$$

Pseudokod

```
while (true)
    enew := AD.read()
    u := 0.5 * u + 44 * enew - 43.5 * eold
    DA.write(u)
    eold := enew
    sleep(0.05)
end
```