Reglerteknik M3

Tentamen 2012-12-20

Tid: 08:30 – 13:30 Lokal: M

Kurskod: ERE033

Lärare: Knut Åkesson, 0701-749525

Läraren besöker tentamenssalen vid två tillfällen för att svara på eventuella frågor. Detta sker normalt sett en timme efter tentamensstart samt en timme före tentamens slut.

Tentamen omfattar totalt 30 poäng, där betyg tre fordrar 12 poäng, betyg fyra 18 poäng och betyg fem 24 poäng. Lösningar och svar till alla uppgifter ska vara tydligt motiverade.

Lösningsförslag till tentamen anslås på kurshemsidan senast första arbetsdagen efter tentamenstillfället. *Granskning* av rättning sker den *15* och *22* januari kl. 12.30 – 13.30 i laborationssalen (vattentankslabbet, rum 5220).

Tillåtna hjälpmedel:

- Reglerteknik M3 - Formelsamling
- Bodediagram
- Beta och Physics handbook, Standard Mathematical Tables, TEFYMA
- Chalmersgodkänd räknare alternativt valfri kalkylator med rensat minne, ej handdator/smartphone.
- För Erasmusstudenter är lexikon, till och från svenska, tillåtet.

Inga anteckningar är tillåtna!

1

Avgör om påståendena ned är rätt eller fel. Kort motivering krävs.

a) Ett andra ordningens system med relativ dämpning större än 1 har reella poler.

(1p)

b) En PI-regulator medför bättre stabilitetsegenskaper för ett återkopplat system än en PD-regulator.

(1p)

2

Vilka av följande linjära system är insignal-utsignal stabila? Ge en kort motivering för varje system.

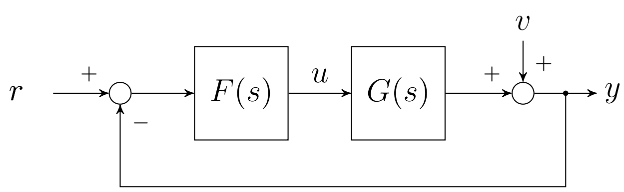
i) $G(s) = \dfrac{s-3}{s^2+2s+6}$

ii) $G(s) = \dfrac{s+3}{s^2+2s}$

(2p)

3

Betrakta det återkopplade systemet nedan.



Låt processen ges av

$$G(s) = \frac{s-3}{s^2+6s}.$$

Avgör följande fall.

a) Kan en P-regulator, $F(s) = K_p$ användas för att stabilisera det återkopplade systemet? Om så är fallet ange för vilka värden på K_p som det återkopplade systemet är stabilt.

(1p)

b) Kan en I-regulator, $F(s) = K_i/s$ användas för att stabilisera det återkopplade systemet? Om så är fallet ange för vilka värden på K_i som det återkopplade systemet är stabilt.

(1p)

4

Ett leadfilter har överföringsfunktionen

$$F(s) = K_p(1 + \frac{T_d s}{1 + T_f s}).$$

Låt $E(s)$ vara insignalen och $U(s)$ vara utsignalen till överföringsfunktionen ovan.

a) Bestäm den differentialekvation som då den Laplacetransformeras ger överföringsfunktionen $F(s)$.

(1p)

b) Låt h vara samplingsintervallet för en dator som ska implementera leadfiltret. Bestäm en differensekvation som kan användas för att approximera beteendet hos överföringsfunktionen $F(s)$.

(2p)

5

Ett system ges av följande olinjära tillståndsmodell

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_1(t) = -x_1(t) + \alpha x_1(t)x_2(t), \\ \\ \frac{d}{dt}x_2(t) = -x_2(t) + \beta x_1(t)x_2(t). \end{cases}$$

a) Bestäm systemets <u>alla</u> jämviktspunkter och bestäm motsvarande linjära tillståndsekvation för respektive jämvikspunkt.

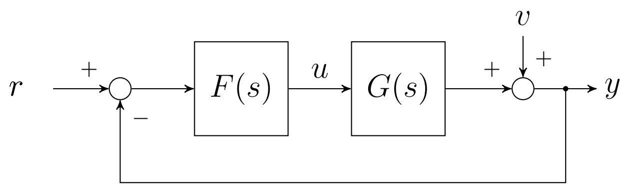
(3p)

b) Avgör de linjäriserade tillståndsekvationernas stabilitet för olika kombinationer av parametrarna α och β.

(2p)

6

Betrakta det återkopplade systemet nedan.



Process som ska styras har följande överföringsfunktion

$$G(s) = \frac{10}{4s+1}e^{-s/2}.$$

a) Välj lämplig regulator till systemet och bestäm regulatorparametrarna så att nedanstående specifikationer uppfylls.

   1) Inga kvarstående fel efter stegformade processtörningar (v).
   2) Systemets fasmarginal ska vara $\varphi_m = 60°$.
   3) Överkorsningsfrekvensen får inte understiga $\omega_c = 1$ rad/s.

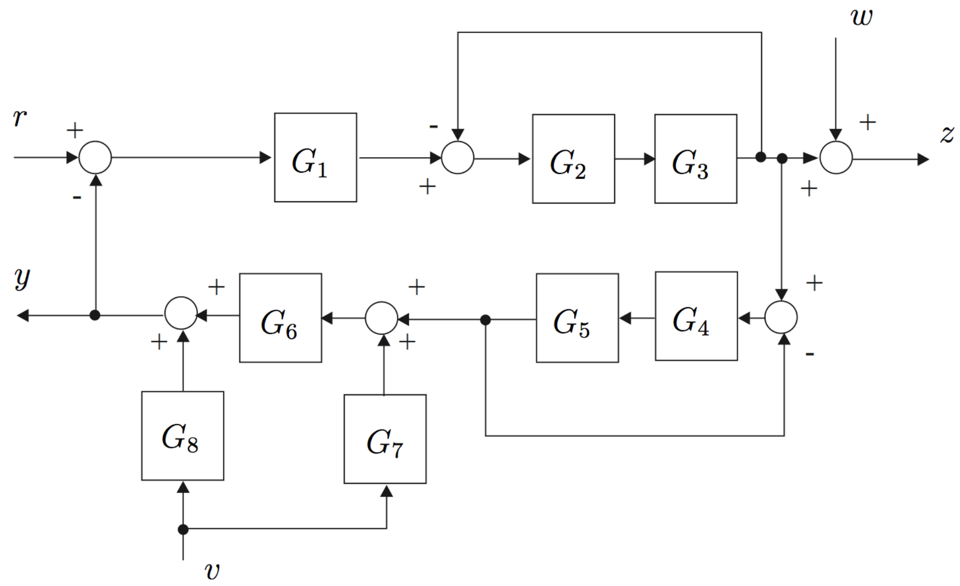
(3p)

b) Kontrollera i ett Bodediagram att kravspecifikationer 2 och 3 uppfylls.

(2p)

7

Betrakta blockschemat nedan.



a) Bestäm med överföringsfunktioner hur z beror på systemets insignaler!

(3p)

b) Anta att G_1, G_2 och G_4 är av oss bestämda, dvs ingår i vår reglering av processen från r till y, och att G_3, G_5 och G_6 är modeller av olika delprocesser. Vad kallas då denna typ av reglering?

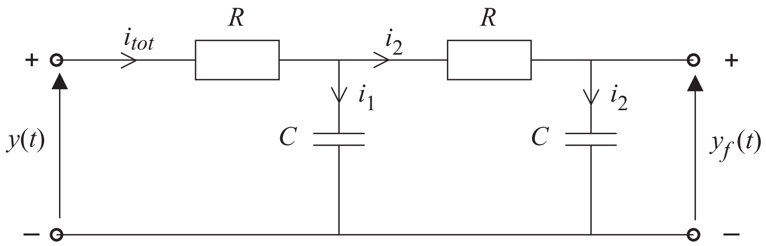
(1p)

c) Om även G_7 bestäms av oss vad kallas då den typen av reglering och vad bör G_7 *idealt* vara om vi vill kompensera bort processtörningen v totalt?

(2p)

8

Ett dubbelt RC-filter enligt figuren nedan är ett enkelt sätt att filtrera bort brus i en analog mätsignal.



a) Härled dess överföringsfunktion från givarsignal y till filtrerad signal y_f. (För en kondensator gäller $i(t) = C\frac{d}{dt}e(t)$ där e är spänningen över kondensatorn.)

(2p)

b) Ett filter som det ovan kan användas som ett antialiasfilter. Varför använder man antialiasfilter?

(1p)

c) Resistanserna är $R = 10^6\ \Omega$. Om systemet samplas med en samplingstid på 0.1 sekund, ungefär hur stor bör kapacitanserna C vara om filtret skall användas som ett antialiasfilter?

(2p)

God Jul!

1/

a/ Ja, då $\zeta = 1$ så ges karakteristiska ekvationen av $s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2 = (s+\omega_n)^2$, dvs vi har en dubbelpol i $-\omega_n$. När ζ ökar (>1) så kommer polerna att ligga kvar på reella axeln.

b/ Nej. PI-regulatorn har negativ fasvridning för <u>alla</u> frekvenser, PD-regulatorn har positiv fasvridning för <u>alla</u> frekvenser. Därmed möjlighet till större stabilitetsmarginaler med PD-regulatorn.

2/

a/ Polerna ges av $p = -1 \pm i\sqrt{5}$. Båda ligger i VHP $\Rightarrow$ insignal-utsignal stabilt

b/ Pol i origo. En stegformad insignal kommer att innebära att utsignalen går mot ∞.

3/ $G(s) = \dfrac{s-3}{s^2+6s}$

a/ Kan $F(s) = K_p$ stabilisera processen

$$G_{ry}(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)},$$

Karakteristiska ekvationen ges av $s^2+6s+K_p(s-3)=0$

$$\Rightarrow s^2+(6+K_p)s-3K_p=0$$

Nödvändigt (och tillräckligt villkor) är att $6+K_p>0$ och $-3K_p>0$

$K_p>-6$ och $K_p<0$ $\Rightarrow$ $-6<K_p<0$ stabiliserar processen.

b/ $F(s) = \dfrac{K_i}{s}$ $\Rightarrow$ $L(s) = \dfrac{K_i(s-3)}{s(s^2+6s)}$

$\Rightarrow$ K.e. ges av $s(s^2+6s)+K_i(s-3)=0$

$$\Rightarrow s^3+6s^2+K_is-3K_i=0$$

Routh-Hurwitz

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & K_i \\ s^2 & 6 & -3K_i \\ s^1 & \frac{6K_i+3K_i}{6}=\frac{3K_i}{2} & 0 \\ s^0 & -3K_i & \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{3K_i}{2}>0 \\ -3K_i>0 \end{array}\right\} \text{Motstridiga krav}$$

Det går ej att hitta ett K_i som stabiliserar systemet.

4/

a) $$F(s) = K_p\left(1 + \frac{T_d \cdot s}{1 + T_f \cdot s}\right) = K_p\left(\frac{1 + (T_f + T_d)\cdot s}{1 + T_f \cdot s}\right)$$

$$e \longrightarrow \boxed{F(s)} \longrightarrow u$$

$$U(s) = \frac{K_p + K_p(T_f + T_d)\cdot s}{1 + T_f \cdot s} \cdot E(s)$$

$$(1 + T_f \cdot s)\cdot U(s) = \left(K_p + K_p(T_f + T_d)\cdot s\right) E(s)$$

$\Longleftrightarrow$ Invers laplace.

$$u(t) + T_f \cdot \dot{u}(t) = K_p \cdot e(t) + K_p(T_f + T_d)\cdot \dot{e}(t).$$

b/ Approximera
$$\begin{cases} \dot{u}(t) \approx \dfrac{u(kh) - u((k-1)h)}{h} \\ \dot{e}(t) \approx \dfrac{e(kh) - e((k-1)h)}{h} \end{cases}$$

kort. form $\dfrac{u(k) - u(k-1)}{h}$

$$u(k) + T_f \cdot \left(\frac{u(k) - u(k-1)}{h}\right) = K_p \cdot e(k) + K_p(T_f + T_d)\left(\frac{e(k) - e(k-1)}{h}\right)$$

$$\overbrace{\left(1 + \frac{T_f}{h}\right)}^{c_1} u(k) - \overbrace{\frac{T_f}{h}}^{c_2} u(k-1) = \overbrace{K_p\left(1 + \frac{T_f + T_d}{h}\right)}^{c_3} e(k) - \overbrace{\frac{K_p(T_f + T_d)}{h}}^{c_4} e(k-1)$$

$\Rightarrow$

$$u(k) = \frac{c_2}{c_1} u(k-1) + \frac{c_3}{c_1} e(k) - \frac{c_4}{c_1} e(k-1)$$

5/

a/ $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + \alpha x_1 x_2 & \equiv f_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + \beta x_1 x_2 & \equiv f_2 \end{cases}$

Jämviktspunkt då

$$\begin{cases} 0 = -x_1 + \alpha x_1 x_2 \\ 0 = -x_2 + \beta x_1 x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = x_1(\alpha x_2 - 1) \\ 0 = x_2(\beta x_1 - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1^0, x_2^0) = (0, 0) \text{ jämviktspunkt (Fall 1)} \\ (x_1^0, x_2^0) = \left(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha}\right) \text{ jämviktspunkt (Fall 2).} \end{cases}$$

Partiella derivator

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -1 + \alpha x_2$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \alpha x_1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \beta x_2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -1 + \beta x_1$$

Fall 1 $(x_1^0, x_2^0) = (0, 0)$

$$\begin{cases} \Delta \dot{x}_1 = -1\, \Delta x_1 + 0 \cdot \Delta x_2 \\ \Delta \dot{x}_2 = 0 \cdot \Delta x_1 - 1\, \Delta x_2 \end{cases} \Rightarrow \Delta \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Delta x$$

Fall 2 $(x_1^0, x_2^0) = (1/\beta, 1/\alpha)$

$$\begin{cases} \Delta \dot{x}_1 = 0 \cdot \Delta x_1 + \alpha/\beta\, \Delta x_2 \\ \Delta \dot{x}_2 = \frac{\beta}{\alpha} \Delta x_1 + 0 \cdot \Delta x_2 \end{cases} \Rightarrow \Delta \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha/\beta \\ \beta/\alpha & 0 \end{bmatrix} \Delta x$$

5 b/ Stabiliten avgörs av egenvärdena:

Fall 1

det$(\lambda I - A) = 0$ $\Rightarrow$ $\begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

Dvs två stabila egenvärden (oberoende av α och β).

Fall 2

$$\begin{vmatrix} \lambda & -\alpha/\beta \\ -\beta/\alpha & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ och } \lambda = -1$$

Dvs det ena egenvärdet är alltid instabilt.

6/ $G(s) = \frac{10}{4s+1} e^{-s/2}$, $\omega_c = 1$ rad/s och $\varphi_m = 60°$

a/ Vi behöver I-verkan för att bli av med kvarstående fel, pröva med PI-regulator.

Bestäm $\arg G(j\omega)$ för $\omega = \omega_c = 1$ rad/s.

$$\arg G(j\omega) = -\arctan(4\omega) - \frac{\omega}{2} \cdot \frac{180}{\pi}$$

$\arg G(j \cdot 1) \approx -104.6°$ $\Rightarrow$ Vi kan tillåta regulatorn att ha $120° - 104.7° \approx 15.3°$ graders fasvridning för $\omega = 1$ rad/s.

$$F(s) = K_i \frac{1+T_i s}{s} \Rightarrow \arg F(s) = \arctan(T_i \omega) - 90° \quad (K_i > 0).$$

För $\omega = 1$ gäller alltså $\arctan(T_i) - 90° \approx -15.3°$

$\Rightarrow \arctan(T_i) = 74.7°$ $\Rightarrow T_i \approx 3.7$

$$|G(j\omega)| = \frac{10}{\sqrt{16\omega^2+1}}$$

$$|F(j\omega)| = K_i \frac{\sqrt{1+(T_i \cdot \omega)^2}}{\omega}$$

För $\omega = 1$ $\Rightarrow$ $|G(j\omega)| = \frac{10}{\sqrt{17}}$

$|F(j\omega)| = K_i \sqrt{1+T_i^2}$

För $\omega = \omega_c$ ska gälla att

$$|F(j\omega)| |G(j\omega)| = 1 \Rightarrow K_i = \frac{\sqrt{17}}{10\sqrt{1+T_i^2}} = 0.11 \Rightarrow \underline{\underline{F_{PI} = 0.11 \frac{1+3.7s}{s}}}$$

b/ Bodediagram

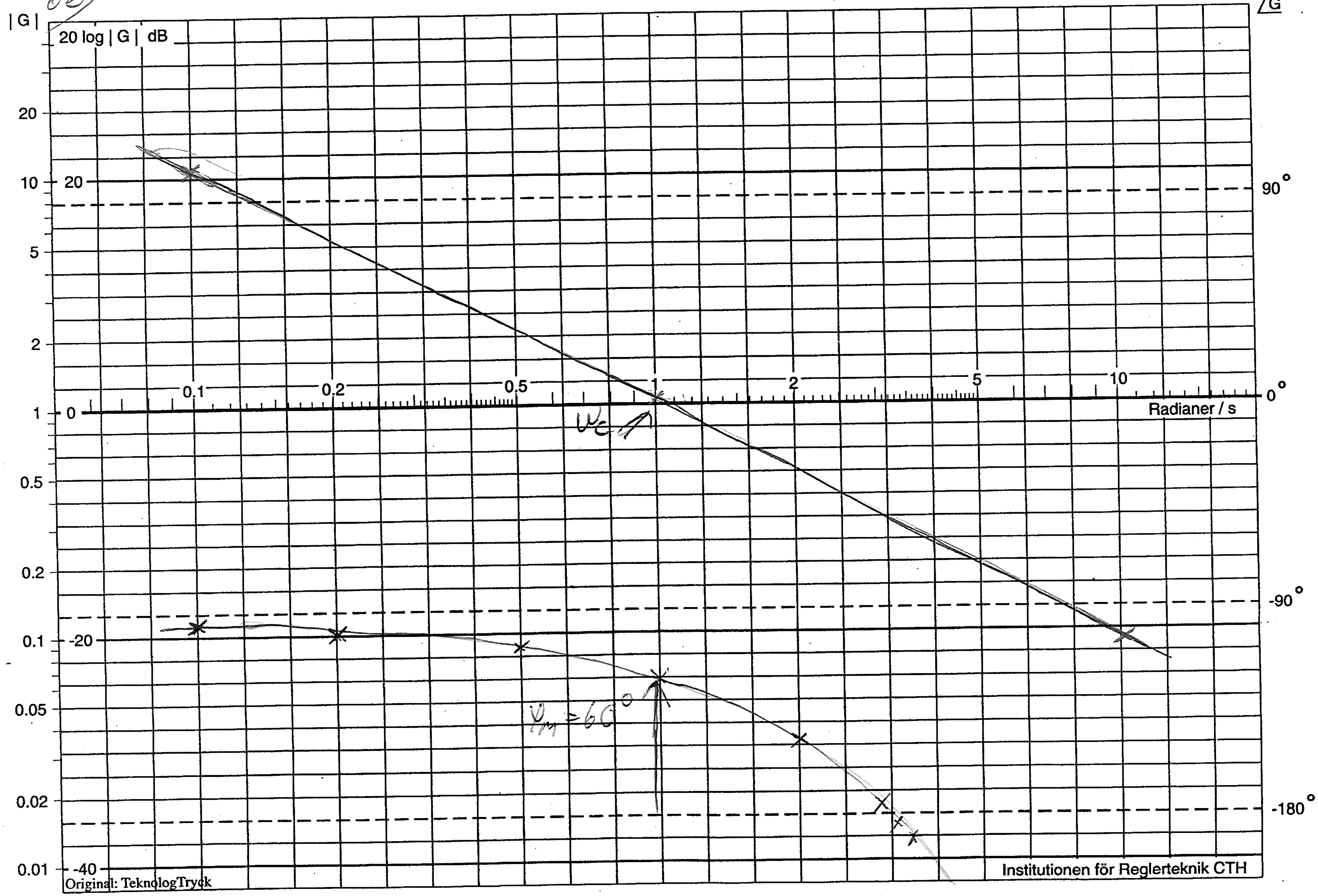
$$L(s) = 1.1 \cdot \frac{1+3.7s}{s(1+4s)} e^{-s/2}$$

$$\begin{cases} |L(j\omega)| = 1.1 \frac{\sqrt{1+(3.7\omega)^2}}{\omega\sqrt{1+(4\omega)^2}} \\ \arg L(j\omega) = -90° + \arctan(3.7\omega) - \arctan(4\omega) - \frac{\omega}{2} \cdot \frac{180°}{\pi} \end{cases}$$

$LF \approx \frac{1.1}{\omega}$

$HF \approx \frac{1.1 \cdot 3.7 \cdot \cancel{\omega}}{\omega \cdot 4.4 \cancel{\omega}} \approx 0.92/\omega$

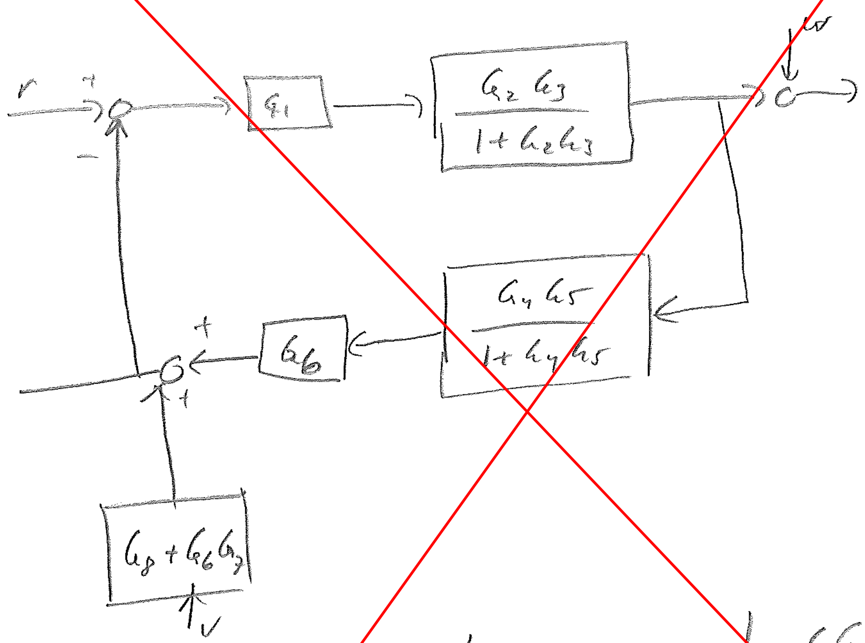
6b)



|G|
20 log |G| dB
20
10
5
2
1
0.5
0.2
0.1
0.05
0.02
0.01
20
0
-20
-40
0.1
0.2
0.5
1
2
5
10
Radianer / s
∠G
90°
0°
-90°
-180°
ω_c
$\varphi_m = 60°$
Original: TeknologTryck
Institutionen för Reglerteknik CTH

7/ Rita om schemat

a/



Se nästa sida

Vi ser att $Y(s) = \frac{L}{1+L} \cdot R(s) + \frac{1}{1+L}(G_8 + G_6 G_7)V(s)$

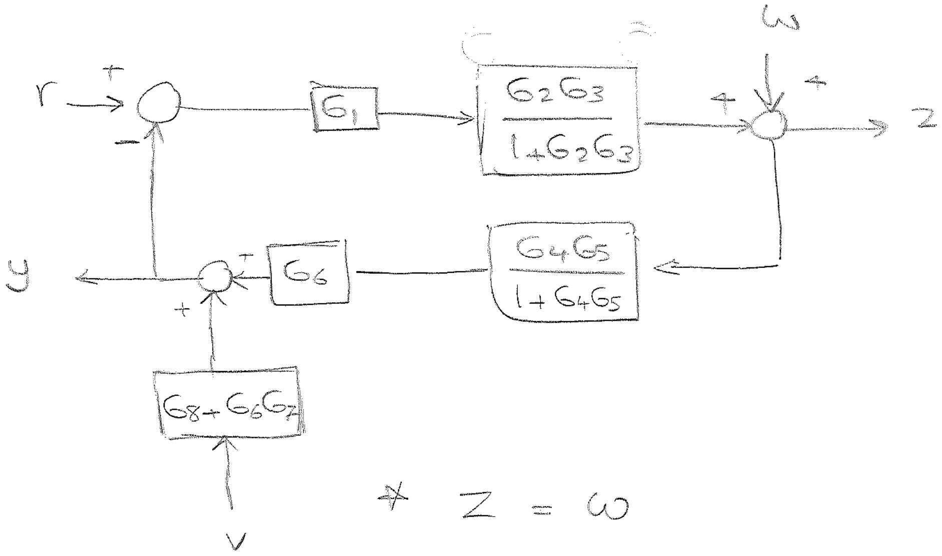
där $L(s) = G_1 \frac{G_2 G_3}{1+G_2G_3} \cdot \frac{G_4 G_5}{1+G_4G_5} \cdot G_6$

b/ Kaskadreglering

c/ Framkoppling (Försök eliminera inverkan av v på y ($G_{vy}=0$).

Då $G_8 + G_6 G_7 = 0 \Rightarrow G_7 = -\frac{G_8}{G_6}$

7a



$$* \quad Z = \omega$$

$$* \quad Z = \left(r - \frac{G_6G_4G_5}{1+G_4G_5} Z \right) \frac{G_1G_2G_3}{1+G_2G_3} \Rightarrow$$

$$Z = \left(1 + \frac{G_6G_4G_5}{1+G_4G_5} \cdot \frac{G_1G_2G_3}{1+G_2G_3} \right) = \frac{G_1G_2G_3}{1+G_2G_3} r \Rightarrow$$

$$\frac{Z}{r} = \frac{\frac{G_1G_2G_3}{1+G_2G_3}}{1+\frac{G_6G_4G_5}{1+G_4G_5} \cdot \frac{G_1G_2G_3}{1+G_2G_3}}$$

$$* \quad Z = \left(-V(G_8+G_6G_7) - Z\left(\frac{G_6G_4G_5}{1+G_4G_5}\right) \right) \frac{G_1G_2G_3}{1+G_2G_3} \Rightarrow$$

$$\frac{Z}{V} = \frac{-(G_8+G_6G_7)\left(\frac{G_1G_2G_3}{1+G_2G_3}\right)}{1+\frac{G_6G_4G_5}{1+G_4G_5} \cdot \frac{G_1G_2G_3}{1+G_2G_3}}$$

8/ Låt e_1 vara spänningen över den vänstra kondensatorn, vilket ger

$$i_1 = c\frac{de_1}{dt} \Rightarrow I_1(s) = csE_1(s)$$

$$i_2 = c\frac{dy_f}{dt} \Rightarrow I_2(s) = csY_f(s)$$

Kirchoffs lagar + Laplace ger.

$$R\cdot i_2 + y_f = e_1 \Rightarrow RI_2(s) + Y_f(s) = E_1(s)$$

$$\Rightarrow (RCs+1)Y_f(s) = E_1(s) \quad (1)$$

$$R\,i_{tot} + e_1 = y \Rightarrow R(I_1(s)+I_2(s)) + E_1(s) = Y(s)$$

$$\Rightarrow RCsE_1(s) + RCsY_f(s) + E_1(s) = Y(s) \quad (2)$$

(1) i (2) ger (sätt $\tau = RC$)

$$\tau s(\tau s+1)Y_f(s) + \tau sY_f(s) + (\tau s+1)Y_f(s) = Y(s)$$

$$((\tau s)^2 + 3\tau s + 1)Y_f(s) = Y(s)$$

$$\Rightarrow Y_f(s) = \frac{1}{(\tau s)^2 + 3\tau s + 1}\cdot Y(s)$$

b/ Vid sampling uppträder signaler med höga frekvensen ($\omega > \omega_s/2$) som signaler med lägre frekvens ($\omega_s - \omega$). Detta leder till felaktiga styrsignaler om dessa höga frekvenser ej filtreras bort före sampling.

c/ Välj brytfrekvensen för filtret så att förstärkningen för $\omega > \frac{\omega_s}{2}$ är mycket liten.

Vi väljer brytfrekvensen som $\frac{\omega_s}{4}$ (detta innebär förstärkningen är ca $-18\,dB$ (ca 0.13) vid $\frac{\omega_s}{2}$).

$$\omega_s = 2\pi f = \frac{2\pi}{h} \Rightarrow \text{brytpunkten } \frac{\omega_s}{4} = \frac{\pi}{2h} = 15.7 \text{ rad/s}.$$

$LF = 1$, $HF = \frac{1}{(\tau\omega)^2}$ $\Rightarrow$ brytpunkten ges av $1 = \frac{1}{(\tau\omega)^2} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}$.

$$15.7 = \frac{1}{RC} \Rightarrow C = \frac{1}{15.7 \cdot R} \approx 0.064\,\mu F$$

Notera att detta innebär att det dubbla RC-filtret har en pol i -0.17 och en i -0.02 (dvs inga resonansfrekvenser).