Reglerteknik M3

Tentamen 2011-04-29

Tid: 08:30 – 13:30 Lokal: M

Kurskod: ERE033

Lärare: Knut Åkesson, tel 0701-749525

Läraren besöker tentamenssalen vid två tillfällen för att svara på eventuella frågor. Detta sker normalt sett en timme efter tentamensstart samt en timme före tentamens slut.

Tentamen omfattar totalt 30 poäng, där betyg tre fordrar 12 poäng, betyg fyra 18 poäng och betyg fem 24 poäng. Lösningar och svar till alla uppgifter ska vara tydligt motiverade.

Lösningsförslag till tentamen anslås på kurshemsidan senast första arbetsdagen efter tentamenstillfället. *Granskning* av rättning sker den *13 maj* samt den *17 maj* kl 12.30 – 13.00 på avdelningen.

Tillåtna hjälpmedel:

- Reglerteknik M3 - Formelsamling
- Bodediagram
- Beta och Physics handbook, Standard Mathematical Tables, TEFYMA
- Chalmersgodkänd räknare alternativt valfri kalkylator med rensat minne, ej handdator/smartphone.
- För Erasmusstudenter är lexikon, till och från svenska, tillåtet.

Inga anteckningar är tillåtna!

1

a) Sambandet mellan en insignal u och utsignal y beskrivs av

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = u(t-2).$$

Bestäm överföringsfunktionen från $u(t)$ till $y(t)$.

(1p)

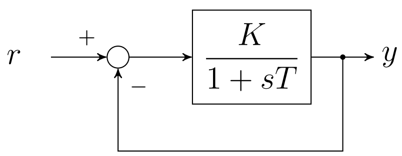
b) Sambandet mellan insignalerna u och r samt utsignalen y beskrivs av

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = u(t-2) + \dot{r}(t).$$

Bestäm överföringsfunktionen från $r(t)$ till $y(t)$.

(1p)

c) Betrakta det återkopplade systemet nedan.



Bestäm tidskonstanten för överföringsfunktionen från r till y.

(1p)

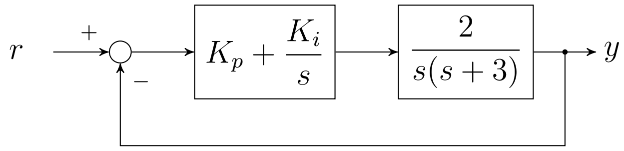
d) Sambandet mellan börvärdet $r(t)$ och utsignalen $y(t)$ ges av följande två ekvationer.

$$\begin{cases} T\dot{y}(t) + y(t) = Ke(t) \\ e(t) = r(t) - y(t) \end{cases}$$

För vilka värden på K och T kommer $y(t)$ alltid att vara begränsad då $r(t)$ är begränsad?

(2p)

e) Bestöm parametrarna i PI-regulatorn (dvs. K_p och K_i) så att det återkopplade systemet får en trippelpol i -1.



(2p)

2

Överföringsfunktionen för en temperaturgivare antas vara

$$G(s) = \frac{Y_m(s)}{Y(s)} = \frac{1}{1+Ts}$$

där $y(t)$ är den verkliga temperaturen medan $y_m(t)$ är den av termometern uppvisade temperaturen. Instrumentet testas på följande sätt:

a) Termometern flyttas från 20° vatten till 40° vatten. Efter 40 sekunder visar termometern 35.6°. Bestäm termometerns tidskonstant T.

(1p)

b) Termometern är placerad i ett kärl med vatten som har temperaturen T_0. Temperaturen i kärlet höjs linjärt med 2°/minut. Beräkna den kvarstående avvikelsen mellan vattnets temperatur och termometerns visning.

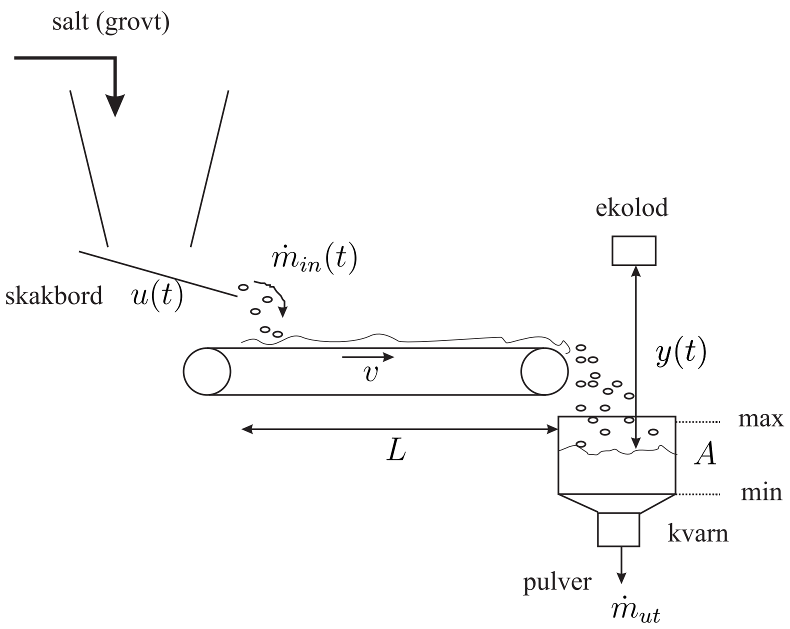
(2p)

c) I det tredje försöket undersöks hur instrumentet reagerar på en oscillerande sinusformad temperaturvariation. Antag att amplituden är 10°. Vilka amplituder visar instrumentet då frekvensen är dels 1 Hz och dels 0.001 Hz? Kommentera instrumentets lämplighet för de båda fallen.

(2p)

3

Ett salt som skall lösas levereras i grov form och mals först ned till pulver. Detta sker genom att de grova saltkristallerna skakas ned på ett transportband där de uppsamlas och males i en kvarn, se figuren nedan.



Det är mycket viktigt att kvarnen ej går tom och naturligtvis också att uppsamlaren ej överfylls. För att se till att så inte blir fallet har man installerat ett ekolod som ger avståndet y mellan ekolodet och nivån i uppsamlaren. Signalen avser man att använda för PD-reglering så att man via skakfrekvensen $u(t)$ matar rätt massaflöde $\dot{m}_{in}(t)$ på bandet.

Kvarnen maler ett konstant massaflöde $\dot{m}_{ut}(t)$, bandhastigheten är $v = 1$ m/s, längden på bandet är $L = 10$ m, arean på uppsamlaren är $A = 0.5$ m^2 och $\dot{m}_{in}(t)$ förhåller sig till styrsignalen som

$$\dot{m}_{in}(t) = 200u(t) \text{ kg/sekund}$$

Tyvärr visar det sig svårt att exakt påverka $\dot{m}_{in}(t)$ eftersom kristallernas grovhet varierar, detta kan tolkas som en processtörning.

Uppgiften fortsätter på nästa sida!

a) Visa att överföringsfunktionen som beskriver hur ändringar i styrsignalen u påverkar utsignalen y (i meter) är

$$G(s) = -0.1\frac{e^{-10s}}{s}$$

där tiden har enheten sekunder. Det grova saltet antas ha en densitet på 4000 kg/m^3 och du kan bortse från falltiderna mellan skakbord och transportband samt transportband och uppsamlaren.

(3p)

b) Rita ett Bodediagram för överföringsfunktionen $G(s)$ från a) uppgiften.

(2p)

c) Designa en PD-regulator

$$F_{PD}(s) = K_p\frac{1 + s\tau_d}{1 + s\tau_d/b}$$

så att kretsöverföringen $L(s) = F_{PD}(s)G(s)$ har överkorsningsfrekvensen $\omega_c = 0.15$ och det återkopplade systemet har fasmarginalen $\varphi_m = 50°$.

(2p)

4

Betrakta följande differentialekvation

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + x(t)^3 - x(t)u(t) = 0$$

a) Inför tillstånden $x_1(t) = x(t)$ och $x_2(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ och skriv om differentialekvationen på tillståndsform.

(1p)

b) Ange samtliga stationära punkter då $u(t) = u_0$.

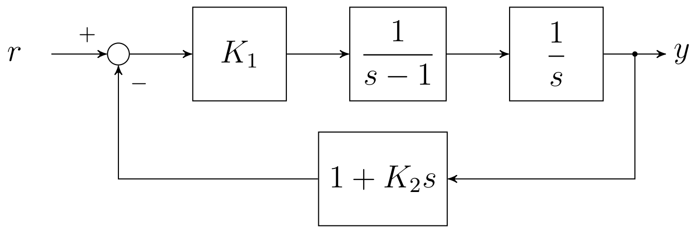
(1p)

c) Linjärisera systemet kring jämviktspunkten $(x_1, x_2, u)_0 = (1, 0, 1)$.

(2p)

5

Betrakta det återkopplade systemet nedan



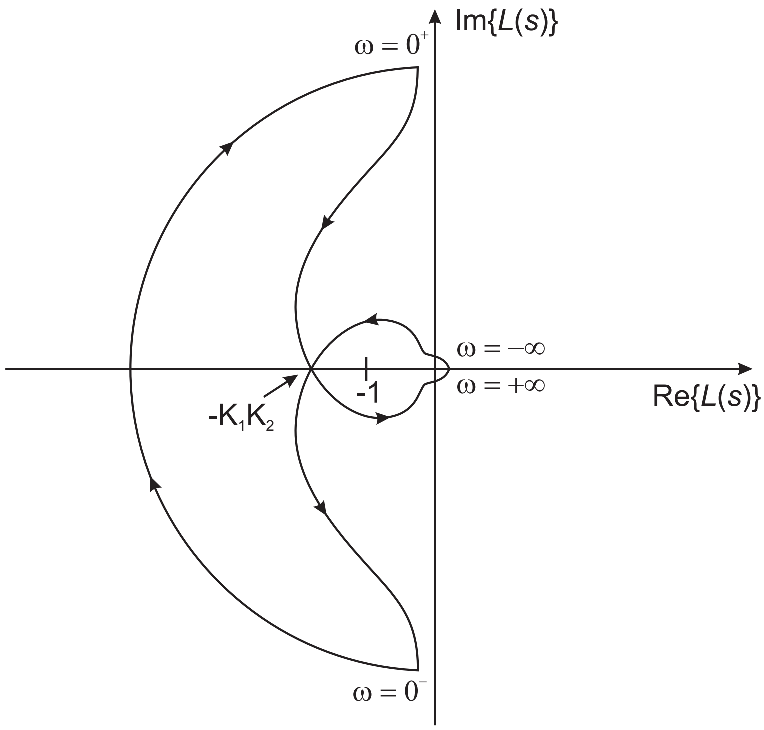
där

$$K_1, K_2 > 0.$$

Använd Nyquists stabilitetskriterium för att avgöra för vilka värden på K_1 och K_2 som det återkopplade systemet ovan är insignal-utsignal stabilt.

(3p)

<u>Ledning:</u>



6

Den komplexa Fourierserieutvecklingen av en funktion f som är periodisk med perioden 2π kan skrivas som

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

Då funktionen f är känd så vill vi beräkna koefficienterna c_n. För att göra det så kan vi utnyttja följande resultat.

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-imt} e^{int}\, dt = \begin{cases} 2\pi & \text{då } m = n. \\ 0 & \text{då } m \neq n. \end{cases}$$

a) Visa att resultatet ovan håller.

(2p)

b) Härled uttrycket för hur koefficienterna c_n ska beräknas givet att vi känner till funktionen f.

(2p)

Lycka till!

Lösningsförslag

1

a) Laplacetransformering ger

$$s^2Y(s) + 2sY(s) + Y(s) = e^{-2s}U(s).$$

Dvs överföringsfunktionen ges av

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{e^{-2s}}{s^2 + 2s + 1}.$$

b) Laplacetransformering ger

$$s^2Y(s) + 2sY(s) + Y(s) = e^{-2s}U(s) + sR(s).$$

Detta innebär att

$$Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2 + 2s + 1}U(s) + \frac{s}{s^2 + 2s + 1}R(s)$$

Dvs överföringsfunktionen från r till y ges av

$$\frac{s}{s^2 + 2s + 1}.$$

c) Överföringsfunktionen för det återkopplade systemet ges av

$$\frac{K}{1 + K + sT} = \frac{\frac{K}{1+K}}{1 + s\frac{T}{1+K}}$$

Dvs tidskonstanten ges av

$$\frac{T}{1 + K}.$$

Vi kan alltså dra slutsatsen att juu större K desto mindre tidskonstant, vilket medför ett snabbare återkopplat system.

d) Notera att detta är samma systemet som i c)-uppgiften. Polen, p, för det återkopplade systemet ges av

$$p = -\frac{1 + K}{T}.$$

Systemet är insignal-utsignal stabilt om polen ligger i strikt vänster halvplan, dvs

$$\frac{1 + K}{T} > 0$$

Detta är uppfyllt om $K > -1$ och $T > 0$, alternativt om $K < -1$ och $T < 0$.

e)

$$L(s) = F(s)G(s) = \left(K_p + \frac{K_i}{s}\right) \cdot \left(\frac{2}{s(s+3)}\right).$$

Vi får därför att

$$G_{ry}(s) = \frac{2(K_p s + K_i)}{s^3 + 3s^2 + 2K_p s + 2K_i}.$$

Eftersom vi vill ha en trippelpol i -1 så ska det åetrkopplade systemet ges av

$$G_{ry}(s) = \frac{B(s)}{(s+1)^3} = \frac{B(s)}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

$B(s)$ är ett godtyckligt polynom som vi vet något om enligt uppgiften. Vi kan nu identifiera paramterarna K_p och K_i genom att jämför koefficienterna framför i nämnarpolynomen. Vi får att $2K_p = 3$ vi får då att $K_p = 3/2$ samt att $2K_i = 1$ vilket ger $K_i = 1/2$.

2

a) Stegsvaret för ett första ordningenssystem ges av

$$y_m(t) = (1 - e^{t/T})y_0$$

där y_0 är steghöjden. I detta fall är $y_0 = 40° - 20° = 20°$.

$$y_m(t) = 20° + (1 - e^{t/T})20°$$

$$y_m(40) = 20° + (1 - e^{40/T})20° = 35.6°$$

$$e^{-40/T} = \frac{4.4}{20} = 0.22$$

$$T = \frac{-40}{\ln 0.22} = 26.42s$$

b)

$$y(t) = \frac{2}{60}t$$

$$Y(s) = \frac{1}{30s^2}$$

$$E(s) = Y(s) - Y_m(s) = Y(s) - \frac{1}{1+Ts}Y(s) = \frac{Ts}{1+Ts}\frac{1}{30s^2}$$

$$\lim_{t\to\infty} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \frac{T}{30} \approx 0.88$$

c)

$$|Y_m(j\omega)| = |\frac{1}{1+Tj\omega}||Y(j\omega)|$$

Då frekvensen är 1 Hz så är $\omega = 2\pi$, och då den är 0.001Hz så är $\omega = 0.002\pi$.

$$|Y_m(j2\pi)| = \frac{10}{\sqrt{1+(26.42 \cdot 2\pi)^2}} \approx 0.06$$

$$|Y_m(j0.002\pi)| = \frac{10}{\sqrt{1+(26.42 \cdot 0.002\pi)^2}} \approx 9.9$$

Instrumentet är för långsamt för att kunna mäta de högre temperaturvariationerna.

3

a) Massbalans över kvarnen ger att

$$\frac{d}{dt}(Ah\rho) = \dot{m}_{in}(t-\frac{L}{v}) - \dot{m}_{ut}(t)$$

Från uppgiften har vi att $\dot{m}_{in}(t) = 200u(t)$ samt att $\dot{m}_{ut}(t)$ är konstant, kalla denna konstant $\dot{m}_{ut}$. Vi har också från uppgiftsformuleringen att $y(t) = -h(t) + y_0$, där y_0 är nivån som ekolodet visar då höjden i kvarnen är 0. Genom att derivera detta uttryck får vi att $\dot{h}(t) = -\dot{y}(t)$. Vi kan därmed skriva om differentialekvation som

$$-A\rho\dot{y}(t) = 200u(t-\frac{L}{v}) - \dot{m}_{ut}$$

Det efterfrågas hur förändringar i styrsignalen ger upphov till förändringar i utsignalen. Skriv därför om insignalen om som $u(t) = u_0 + \Delta u(t)$, samt utsignalen $y(t) = y_{00} + \Delta y(t)$ (y_{00} infördes eftersom y_0 redan var definierat ovan). Vi kan välja u_0 så att flödet in är lika med flödet ut. Detta innebär att vi väljer $200u_0 = \dot{m}_{ut}$, dvs $u_0 = \dot{m}_{ut}/200$. Eftersom $y(t) = y_{00} + \Delta y(t)$ så får vi att $\dot{y}(t) = \Delta\dot{y}(t)$. Vilket tillsammans innebär att

$$-A\rho\Delta\dot{y}(t) = 200\Delta u(t-\frac{L}{v}))$$

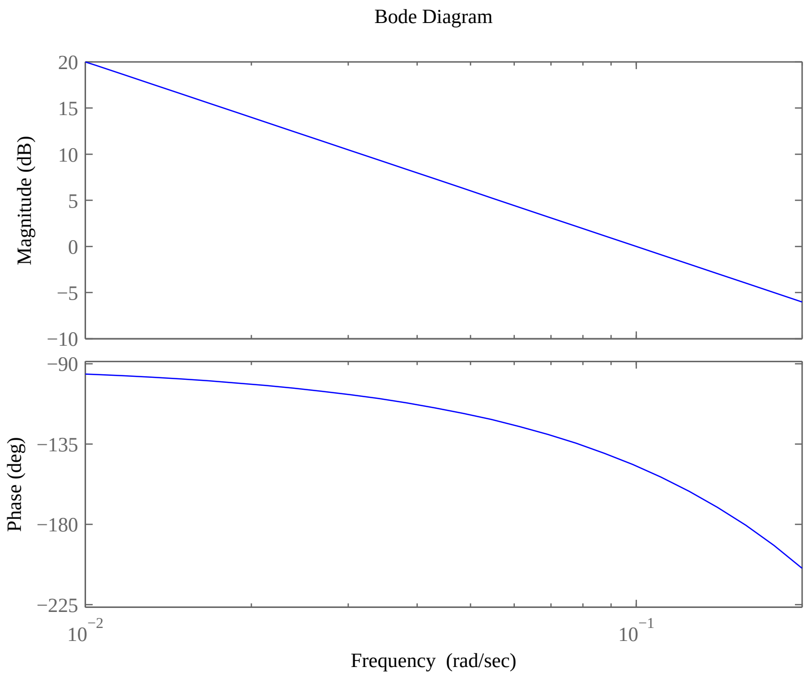
Laplacetransformering ger

$$-A\rho s\Delta Y(s) = 200\Delta U(s)e^{-sL/v}$$

Dvs

$$\frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)} = -\frac{200e^{-sL/v}}{A\rho s} = -\frac{200e^{-s10/1}}{0.5\cdot 4000s} = -0.1\frac{e^{-10s}}{s}.$$

b) Eftersom $G(s) = -0.1\frac{e^{-10s}}{s}$ har ett minustecken så är den något annorlunda med standardfallet. Definiera $H(s) = 0.1\frac{e^{-10s}}{s}$. G och H kommer att ha samma förstärkning för alla frekvenser men olika fasvriding. Eftersom multiplikation med -1 vrider alla punkter i det komplexa talplanet med 180°, så ökar fasförkjutningen med 180°. Bodediagrammet för H ges nedan



Bodediagrammet för G är likadant förutom att fasen är förskjuten ytterliggare 180°.

c) Eftersom vi har ett minustecken i processen $G(s)$ (vilket är ickestandard), så för att de designmetoder som presenterats i boken ska kunna användas rakt av utan modifieringar så är det enklast att designa regulatorn för processen $H(s)$ (introducerad i b) uppgiften) och därefter multiplicera den framräknade regulatorn med -1. Detta innebär att kretsöverföringen kommer de två minusteckena att ta ut varandra eftersom de multipliceras ihop. Detta innebär att vi kan designa regualtorn på vanligt sätt utifrån den givna överförsningfrekvens och fasmarginalen.

$$|H(j\omega)| = \frac{0.1}{\omega}$$
$$\arg H(j\omega) = -90^\circ - 10\omega\frac{180^\circ}{\pi}$$

Vi har krav på att överkorsningsfrekvensen ska vara $\omega_c = 0.15$.

$$\arg H(j\omega_c) = -176^\circ.$$

Då vi vill ha en fasmarginal på 50° måste vi höja fasen med 46°. Ur formelsamlingen får vi att $b \approx 6$, vilket ger oss att $\tau_d = \frac{\sqrt{6}}{0.15} \approx 16.3$. För att vi ska få förstärkningen till 1 vid överkorsningensfrekvensen väljer vi nu $K_p = \frac{1}{|H(j\omega_c)|\sqrt{b}} \approx 0.61$. PD-regulatorn som skulle styra processen H ges därför av

$$F_{PD}^H(s) = 0.61\frac{1 + 16.3s}{1 + 2.72s},$$

vilket alltså innebär att PD-regualtorn som reglerar processen G ges av

$$F_{PD}^G(s) = -0.61\frac{1 + 16.3s}{1 + 2.72s}.$$

4

a) Välj tillstånden enligt

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t) \\ x_2(t) &= \dot{x}(t) \end{aligned}$$

Detta ger att

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \equiv f_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{x}(t) = x_1(t)u(t) - x_1^3(t) \equiv f_2(t) \end{aligned}$$

Tillståndsmodellen är alltså

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t)u(t) - x_1^3(t) \end{aligned}$$

Utsignalen (kalla utsignalen för $y(t)$), utsignalen, dvs $x(t)$, ges av första tillståndet, dvs $y(t) = x_1(t)$.

b) Låt $u(t) = u_0$. Bestäm stationärpunkten, dvs punkten då $\dot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t) = 0$. Vi får då följande ekvationssystem

$$\begin{aligned} 0 &= x_{20} \\ 0 &= x_{10}u_0 - x_{10}^3 \end{aligned}$$

Ur den övre ekvationen får vi att x_{20} måste vara 0. Ur den nedre får vi att antingen är $x_{10} = 0$ eller så är $x_{10} = \pm\sqrt{u_0}$. Dvs vi har en stationärpunkt då $x_{20} = 0$ och antingen $x_{10} = 0$ eller $x_{10} = \pm\sqrt{u_0}$.

c) Linjärisering ger (Taylorutveckling)

$$A = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_2} \end{array}\right]_{(x_0,u_0)} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$B = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial u} \end{array}\right]_{(x_0,u_0)} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right]$$

Den linjäriserade modellen som gäller approximativt för avvikelser runt arbetspunkten ges nu av

$$\Delta\dot{x}(t) = A\Delta x(t) + B\Delta u(t)$$

5

Eftersom kretsöverföringenb är instabil så kan ej Nyquistsförenklade stabilitetskriterium användas utan vi får förlita oss på Nyquists fullständiga stabilitetskriterium. Enligt Nyquistfullständiga kriterium har vi att

$$Z = N + P$$

Kretsöverföringen ges av

$$L(s) = \frac{K_1(1 + K_2 s)}{s(s-1)}$$

Kretsöveröringen har alltså en pol i HHP, därav är $P = 1$.

Enligt figuren har vi för fallet då $K_1K_2 > 1$ att $N = -1$. Detta ger att $Z = -1 + 1 = 0$, dvs det återkopplade systemet har ingen pol i HHP. Dvs det är insignal-utsignal stabilt.

Fallet då $0 < K_1K_2 < 1$ innebär att punkten -1 hamnar inne i den stora öglan. Vi får då att $N = 1$, detta ger att $Z = 1+1 = 2$. Vi har därför två poler i HHP för det återkopplade systemet. Dvs systemet är inte insignal-utsignal stabilt.

Fallet då $K_1K_2 < 0$, gör att kurvan speglas i imaginäraxeln och vi får direkt att $N = 0$, vilket ger $Z = 0 + 1 = 1$, dvs instabilt.

Sammanfattningsvis, det återkopplade systemet är enbart insignal-utsignal stabilt då $K_1K_2 > 1$.

6

a) Visa först fallet då $m = n$ (m, n heltal). Vi får då att

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} e^{int}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} 1\, dt = 2\pi$$

Vi undersöker nu fallet då $m \neq n$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-imt} e^{int}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)t}\, dt$$

Från Eulers formel har vi att

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x).$$

Inför $k = m - n$ (observera att k är ett heltal på grund av att n, m är heltal). Vi får nu att

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) + i\sin(kt)\, dt = \left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - i\left[\frac{\cos(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

Eftersom vi har att $\sin(k\pi) = 0$ för varje heltal k och $\cos(x) = \cos(-x)$ så blir både realdelen och imaginärdelen av integralen noll. Vi får därför att för $m \neq n$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-imt}e^{int}\, dt = 0$$

b) Multiplicera $f(t)$ med e^{-imt} och integrera över en period. Vi får då att

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-imt}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}\right) e^{-imt}\, dt$$

Från resultatet i uppgift b) har vi att vi endast fallet $n = m$ behöver behandlas då integralen blir 0 i alla andra fall. I fallet att $n = m$ får vi att integralen blir $c_n 2\pi$. Vi får därför att

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\, dt = c_n 2\pi.$$

Vi kan nu lösa ut c_n och får att

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\, dt.$$