Reglerteknik M3, 4p

Tentamen 2007-01-16

Tid: 14:00 – 18:00 Lokal: V-huset

Kurskod: ERE031

Lärare: Knut Åkesson, tel 0701-749525

Läraren besöker tentamenssalen vid två tillfällen för att svara på eventuella frågor. Detta sker normalt sett en timmar efter tentamensstart samt en timme före tentamens slut.

Tentamen omfattar totalt 30 poäng, där betyg tre fordrar 12 poäng, betyg fyra 18 poäng och betyg fem 24 poäng. Lösningar och svar till alla uppgifter ska vara tydligt motiverade.

Lösningsförslag till tentamen anslås på kurshemsidan senast första arbetsdagen efter tentamenstillfället. *Tentamenresultat* anslås senast den *30 januari* kl 12.30 på avdelningens anslagstavla. *Granskning* av rättning sker den *30 och 31 januari* kl 12.30 – 13.00 på avdelningen.

Tillåtna hjälpmedel:

- Reglerteknik M3 - Formelsamling
- Bodediagram
- Beta och Physics handbook, Standard Mathematical Tables, TEFYMA
- Chalmersgodkänd räknare alternativt valfri kalkylator med rensat minne, ej handdator.
- För Erasmusstudenter är lexikon, till och från svenska, tillåtet.

Inga anteckningar är tillåtna!

Institutionen för signaler och system
Chalmers tekniska högskola

1

a) Sambandet mellan en insignal u och utsignal y beskrivs av följande differentialekvation.

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = u(t-2)$$

Bestäm överföringsfunktionen från $u(t)$ till $y(t)$.

(1p)

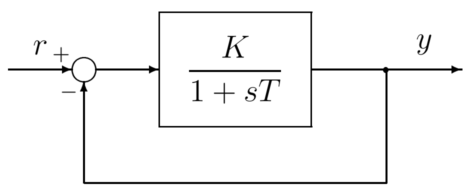
b) Sambandet mellan insignalerna u och r samt utsignalen y beskrivs av följande differentialekvation.

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = u(t-2) + \dot{r}(t)$$

Bestäm överföringsfunktionen från $r(t)$ till $y(t)$.

(1p)

c) Betrakta det återkopplade systemet nedan.



Bestäm tidskonstanten för överföringsfunktionen från r till y.

(1p)

d) Låt $y(t)$ vara utsignalen från ett återkopplat system. Insignalen till det återkopplade systemet är börvärdet $r(t)$. Sambandet mellan börvärdet $r(t)$ och utsignalen $y(t)$ ges av följande två ekvationer.

$$\begin{cases} T\dot{y}(t) + y(t) = Ke(t) \\ e(t) = r(t) - y(t) \end{cases}$$

För vilka värden på K och T kommer $y(t)$ alltid att vara begränsad då $r(t)$ är begränsad?

(2p)

2

Överföringsfunktionen för ett minimumfas system skall bestämmas med hjälp av frekvensanalys. För detta ändamål pålades systemet en periodisk sinusformad insignal med amplituden 5. Mätning av utsignalens amplitud och fasvridning φ (relativt insignalen) utfördes för ett antal olika vinkelfrekvenser, ω, hos insignalen, vilket gav följande resultat:

ω	0.1	0.2	0.3	0.6	1	2	3	6
amplitud	9.852	9.429	8.787	6.305	3.536	0.894	0.316	0.044
φ	-17.1°	-33.9°	-50.1°	-92.9°	-135.0°	-190.3°	-214.7°	-241.6°

a) Uppskatta systemets överföringsfunktion. (2p)

b) Bestäm regulatorparametrarna i en PI-regulator

$$F(s) = K(1 + \frac{1}{sT})$$

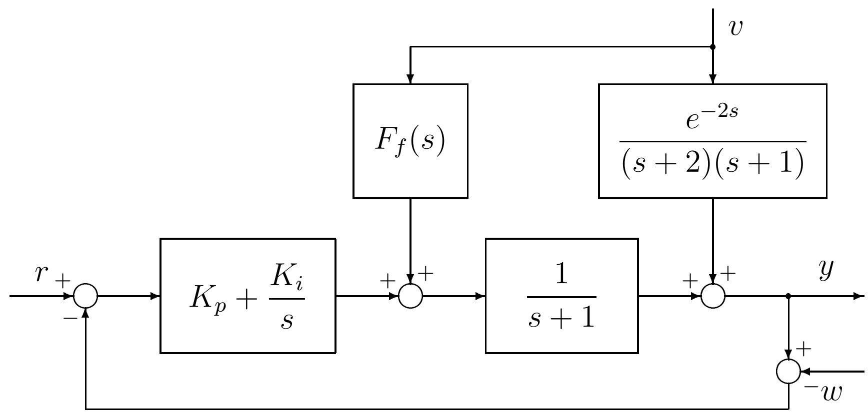
enligt Ziegler-Nichols metod. (2p)

Ledning: PI-parametrarna skall ställas in enligt $K = 0.45K_0$ och $T = T_0/1.2$, där K_0 är förstärkningen då systemet är på gränsen till instabilitet, och T_0 är periodtiden för de uppkomna självsvängningarna.

c) Bestäm fas- och amplitudmarginalen för det återkopplade systemet. (2p)

3

Betrakta det återkopplade systemet nedan.



a) Bestäm för vilka värden på K_p och K_i överföringsfunktionen från w till y är insignal-utsignal stabil.

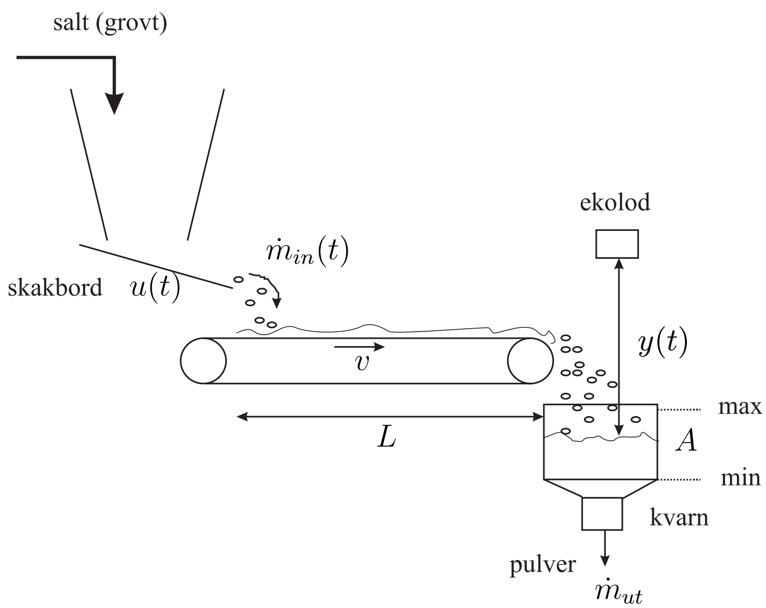
(1p)

b) Bestäm $F_f(s)$ så att processtörningen v ej påverkar utsignalen y. Antag ideala förhållanden, dvs att verkligheten och modellen stämmer överens.

(2p)

4

Ett salt som skall lösas levereras i grov form och mals först ned till pulver. Detta sker genom att de grova saltkristallerna skakas ned på ett transportband där de uppsamlas och males i en kvarn, se figuren nedan.



Det är mycket viktigt att kvarnen ej går tom och naturligtvis också att uppsamlaren ej överfylls. För att se till att så inte blir fallet har man installerat ett ekolod som ger avståndet y mellan ekolodet och nivån i uppsamlaren. Signalen avser man att använda för PD-reglering så att man via skakfrekvensen $u(t)$ matar rätt massaflöde $\dot{m}_{in}(t)$ på bandet.

Kvarnen maler ett konstant massaflöde $\dot{m}_{ut}(t)$, bandhastigheten är $v = 1$ m/s, längden på bandet är $L = 10$ m, arean på uppsamlaren är $A = 0.5$ m^2 och $\dot{m}_{in}(t)$ förhåller sig till styrsignalen som

$$\dot{m}_{in}(t) = 200u(t) \text{ kg/sekund}$$

Tyvärr visar det sig svårt att exakt påverka $\dot{m}_{in}(t)$ eftersom kristallernas grovhet varierar, detta kan tolkas som en processtörning.

Uppgiften fortsätter på nästa sida!

a) Visa att överföringsfunktionen som beskriver hur ändringar i styrsignalen u påverkar utsignalen y (i meter) är

$$G(s) = -0.1\frac{e^{-10s}}{s}$$

där tiden har enheten sekunder. Det grova saltet antas ha en densitet på 4000 kg/m^3 och du kan bortse från falltiderna mellan skakbord och transportband samt transportband och uppsamlaren.

(3p)

b) Rita ett Bodediagram för överföringsfunktionen $G(s)$ från a) uppgiften.

(2p)

c) Designa en PD-regulator

$$F_{PD}(s) = K_p\frac{1+s\tau_d}{1+s\tau_d/b}$$

så att kretsöverföringen $L(s) = F_{PD}(s)G(s)$ har överkorsningsfrekvensen $\omega_c = 0.15$ och det återkopplade systemet har fasmarginalen $\varphi_m = 50°$.

(2p)

5

Betrakta följande differentialekvation

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + x(t)^3 - x(t)u(t) = 0$$

a) Inför tillstånden $x_1(t) = x(t)$ och $x_2(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ och skriv om differentialekvationen på tillståndsform.

(1p)

b) Ange samtliga stationära punkter då $u(t) = u_0$.

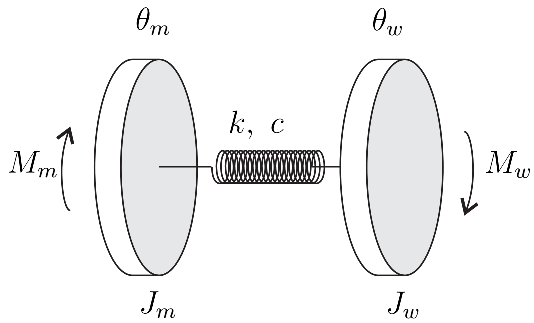
(1p)

c) Linjärisera systemet kring jämviktspunkten $(x_1, x_2, u)_0 = (1, 0, 1)$.

(2p)

6

En förenklad modell av en drivlina i en bil kan beskrivas av modellen nedan.



Motorn genererar ett drivande moment M_m som överförs till hjulsidan via en elastisk drivaxel med elasticitetskoefficient k och friktion c. θ_m och θ_w är vinkeln på motor respektive hjulsidan. Fordonet påverkas av ett bromsande moment M_w på hjulsidan.

Genom att sätta upp balansekvationerna för drivlinan får vi följande samband

$$J_m\ddot{\theta}_m(t) = M_m(t) - k(\theta_m(t) - \theta_w(t)) - c(\dot{\theta}_m(t) - \dot{\theta}_w(t))$$
$$J_w\ddot{\theta}_w(t) = k(\theta_m(t) - \theta_w(t)) + c(\dot{\theta}_m(t) - \dot{\theta}_w(t)) - M_w(t)$$

a) Välj tillstånd och ställ upp en tillståndsmodell för drivlinan. Insignaler är M_m och M_w, utsignal är hastigheten på hjulet $\dot{\theta}_w$.

(3p)

b) Bestäm överföringsfunktionen från motormoment M_m till hjulvarvtalet $\dot{\theta}_w$.

(2p)

Lycka till!

Lösningsförslag

1

a) Laplacetransformering ger
$$s^2Y(s) + 2sY(s) + Y(s) = e^{-2s}U(s).$$
Dvs överföringsfunktionen ges av
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{e^{-2s}}{s^2 + 2s + 1}.$$

b) Laplacetransformering ger
$$s^2Y(s) + 2sY(s) + Y(s) = e^{-2s}U(s) + sR(s).$$
Detta innebär att
$$Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2 + 2s + 1}U(s) + \frac{s}{s^2 + 2s + 1}R(s)$$
Dvs överföringsfunktionen från r till y ges av
$$\frac{s}{s^2 + 2s + 1}.$$

c) Överföringsfunktionen för det återkopplade systemet ges av
$$\frac{K}{1 + K + sT} = \frac{\frac{K}{1+K}}{1 + s\frac{T}{1+K}}$$
Dvs tidskonstanten ges av
$$\frac{T}{1 + K}.$$
Vi kan alltså dra slutsatsen att juu störra K desto mindre tidskonstant, vilket medför ett snabbare återkopplat system.

d) Notera att detta är samma systemet som i c)-uppgiften. Polen, p, för det återkopplade systemet ges av
$$p = -\frac{1 + K}{T}.$$
Systemet är insignal-utsignal stabilt om polen ligger i strikt vänster halvplan, dvs
$$\frac{1 + K}{T} > 0$$
Detta är uppfyllt om $K > -1$ och $T > 0$, alternativt om $K < -1$ och $T < 0$.

2

a) Insignaler är enligt uppgift $5\sin(\omega t)$, utsignalen kommer därför, för stora t, att ges av

$$5|G(j\omega)|\sin(\omega t + \arg G(j\omega)).$$

För låga frekvenser så har utsignalen ungefär amplituden 10. Eftersom insignalen har amplituden 5 så är förstärkningen för låga frekvenser ungefär 2. För låga frekvenser så ser fasvridingen ut att vara nära 0 grader och för höga frevenser nära $-270°$. Vi kan direkt dra slutsatsen att gradtalet i nämnare måste vara tre högre än grdatalet i täljaren - detta på grund av fasen går från $0°$ till $-270° = -3 \cdot 90°$. Gen att plotta de givna punkterna i ett bodediagram så ser vi att högfrekvensasymptoten faller med ca 60db/dekad. Detta innebär att gradtalet i nämnaren måste ha gradtalet 3. Från Bodediagrammet ser vi också att brytpunkterna verkar sammanfalla vid 1 rad/s. Från detta kan vi alltså dra slutsatsen att överföringsfunktionen ges approximativt av

$$G(s) = \frac{2}{(1+s)^3}.$$

b) Genom att beräkna för överföringsfunktionen i a) uppgiften alternativt skatta direkt ur de givna värdena så får vi $\omega_\pi \approx 1.7$. Förstärkningen vid denna frekvens är approximativt 0.25. Vi får alltså att $K_0 = \frac{1}{0.25} = 4$, samt att periodtiden på svängningen $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_\pi} \approx 3.6$. Vi får därför följande regulatorparametrar $K = 0.45K_0 \approx 1.8$ och $T = T_0/1.2 \approx 3.0$.

c) Rita Bodediagrammet för FG och läs av fas och amplitudmarginal alternativ räkna analytiskt ut. Amplitudmarginalen blir ca 1.5 och fasmarginalen blir ca $15°$.

3

a) Polerna för det återkopplade systemet ges av

$$K_i + K_p s + s(s+1) = 0.$$

Dvs

$$s^2 + (K_p + 1)s + K_i = 0,$$

Villkor för stabilitet fås nu (exempelvis mha av Routh-Hurwitz kriteriet) Vi får att $K_p + 1 > 0$ samt att $K_i > 0$. Dvs vi får kravet att $K_P > -1$ och att $K_i > 0$.

b) Bestäm $G_{vy}(s)$.

$$G_{vy}(s) = \frac{\frac{e^{-2s}}{(s+2)(s+1)} + \frac{F_f(s)}{s+1}}{1 + \frac{K_p s + K_i}{s(s+1)}}.$$

v påverkar ej utsignalen y då $G_{vy}(s) = 0$. Dvs lös ut $F_f(s)$ ur $G_{vy}(s) = 0$. Vilket leder till att

$$F_f(s) = -\frac{e^{-2s}}{s+2}.$$

4

a) Massbalans över kvarnen ger att

$$\frac{d}{dt}(Ah\rho) = \dot{m}_{in}(t - \frac{L}{v}) - \dot{m}_{ut}(t)$$

Från uppgiften har vi att $\dot{m}_{in}(t) = 200u(t)$ samt att $\dot{m}_{ut}(t)$ är konstant, kalla denna konstant $\dot{m}_{ut}$. Vi har också från uppgiftsformuleringen att $y(t) = -h(t) + y_0$, där y_0 är nivån som ekolodet visar då höjden i kvarnen är 0. Genom att derivera detta uttryck får vi att $\dot{h}(t) = -\dot{y}(t)$. Vi kan därmed skriva om differentialekvation som

$$-A\rho\dot{y}(t) = 200u(t - \frac{L}{v}) - \dot{m}_{ut}$$

Det efterfrågas hur förändringar i styrsignalen ger upphov till förändringar i utsignalen. Skriv därför om insignalen om som $u(t) = u_0 + \Delta u(t)$, samt utsignalen $y(t) = y_{00} + \Delta y(t)$ (y_{00} infördes eftersom y_0

redan var definierat ovan). Vi kan välja u_0 så att flödet in är lika med flödet ut. Detta innebär att vi väljer $200u_0 = \dot{m}_{ut}$, dvs $u_0 = \dot{m}_{ut}/200$. Eftersom $y(t) = y_{00} + \Delta y(t)$ så får vi att $\dot{y}(t) = \Delta \dot{y}(t)$. Vilket tillsammans innebär att

$$-A\rho\Delta\dot{y}(t) = 200\Delta u(t - \frac{L}{v}))$$

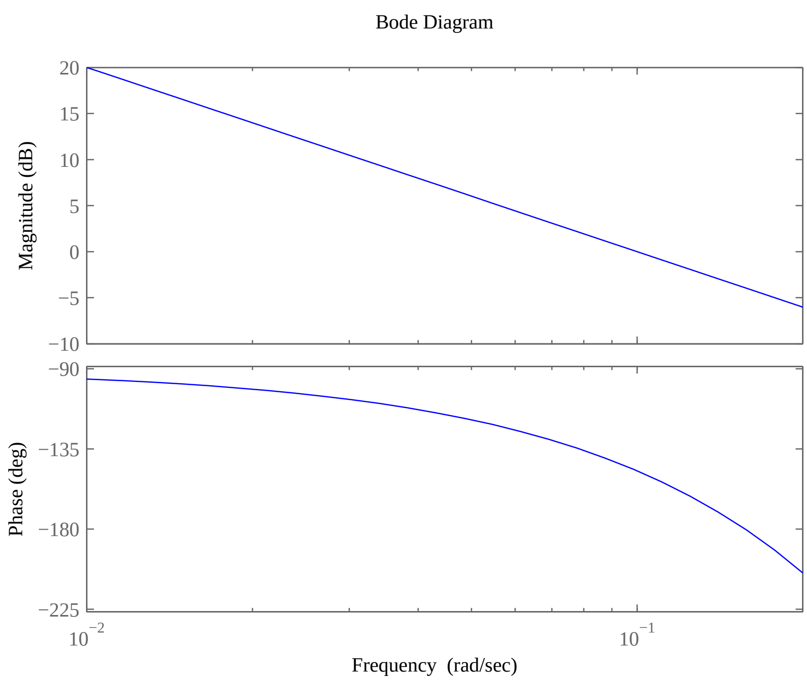
Laplacetransformering ger

$$-A\rho s\Delta Y(s) = 200\Delta U(s)e^{-sL/v}$$

Dvs

$$\frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)} = -\frac{200e^{-sL/v}}{A\rho s} = -\frac{200e^{-s10/1}}{0.5 \cdot 4000s} = -0.1\frac{e^{-10s}}{s}.$$

b) Eftersom $G(s) = -0.1\frac{e^{-10s}}{s}$ har ett minustecken så är den något annorlunda med standardfallet. Definiera $H(s) = 0.1\frac{e^{-10s}}{s}$. G och H kommer att ha samma förstärkning för alla frekvenser men olika fasvriding. Eftersom multiplikation med -1 vrider alla punkter i det komplexa talplanet med 180°, så ökar fasförkjutningen med 180°. Bodediagrammet för H ges nedan



Bodediagrammet för G är likadant förutom att fasen är förskjuten ytterliggare 180°.

c) Eftersom vi har ett minustecken i processen $G(s)$ (vilket är ickestandard), så för att de designmetoder som presenterats i boken ska kunna användas rakt av utan modifieringar så är det enklast att designa regulatorn för processen $H(s)$ (introducerad i b) uppgiften) och därefter multiplicera den framräknade regulatorn med -1. Detta innebär att kretsöverföringen kommer de två minusteckena att ta ut varandra eftersom de multipliceras ihop. Detta innebär att vi kan designa regualtorn på vanligt sätt utifrån den givna överförsningfrekvens och fasmarginalen.

$$|H(j\omega)| = \frac{0.1}{\omega}$$

$$\arg H(j\omega) = -90^\circ - 10\omega\frac{180^\circ}{\pi}$$

Vi har krav på att överkorsningsfrekvensen ska vara $\omega_c = 0.15$.

$$\arg H(j\omega_c) = -176^\circ.$$

Då vi vill ha en fasmarginal på 50° måste vi höja fasen med 46°. Ur formelsamlingen får vi att $b \approx 6$, vilket ger oss att $\tau_d = \frac{\sqrt{6}}{0.15} \approx 16.3$. För att vi ska få förstärkningen till 1 vid överkorsningensfrekvensen väljer vi nu $K_p = \frac{1}{|H(j\omega_c)|\sqrt{b}} \approx 0.61$. PD-regulatorn som skulle styra processen H ges därför av

$$F_{PD}^{H}(s) = 0.61\frac{1 + 16.3s}{1 + 2.72s},$$

vilket alltså innebär att PD-regualtorn som reglerar processen G ges av

$$F_{PD}^{G}(s) = -0.61\frac{1 + 16.3s}{1 + 2.72s}.$$

5

a) Välj tillstånden enligt

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t) \\ x_2(t) &= \dot{x}(t) \end{aligned}$$

Detta ger att

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) & \equiv & \; f_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{x}(t) & = & \; x_1(t)u(t) - x_1^3(t) \quad \equiv \quad f_2(t) \end{aligned}$$

Tillståndsmodellen är alltså

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t)u(t) - x_1^3(t) \end{aligned}$$

Utsignalen (kalla utsignalen för $y(t)$), utsignalen, dvs $x(t)$, ges av första tillståndet, dvs $y(t) = x_1(t)$.

b) Låt $u(t) = u_0$. Bestäm stationärpunkten, dvs punkten då $\dot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t) = 0$. Vi får då följande ekvationssystem

$$\begin{aligned} 0 &= x_{20} \\ 0 &= x_{10}u_0 - x_{10}^3 \end{aligned}$$

Ur den övre ekvationen får vi att x_{20} måste vara 0. Ur den nedre får vi att antingen är $x_{10} = 0$ eller så är $x_{10} = \pm\sqrt{u_0}$. Dvs vi har en stationärpunkt då $x_{20} = 0$ och antingen $x_{10} = 0$ eller $x_{10} = \pm\sqrt{u_0}$.

c Linjärisering ger (Taylorutveckling)

$$A = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_2} \end{array} \right]_{(x_0,u_0)} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{array} \right]$$

$$B = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial u} \end{array} \right]_{(x_0,u_0)} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right]$$

Den linjäriserade modellen som gäller approximativt för avvikelser run arbetspunkten ges nu av

$$\Delta\dot{x}(t) = A\Delta x(t) + B\Delta u(t)$$

6

a) Ett tänkbart val av tillstånd är $x_1(t) = \theta_m(t)$, $x_2(t) = \theta_w(t)$, $x_3(t) = \dot{\theta}_m(t)$, $x_4(t) = \dot{\theta}_w(t)$, detta ger oss en tillståndmodell av ordning fyra. Genom att titta på ekvationerna så ser vi att balansekvationerna enbart beror på skillanden mellan $\theta_m(t)$ och $\theta_w(t)$, därför kan skillanden mellan dessa signaler vara ett bra val av tillstånd. Följande val av tillstånd ger oss en tillståndsmodell som enbart innehåller tre tillstånd:

$$\begin{cases} x_1(t) = \dot{\theta}_m(t) \\ x_2(t) = \dot{\theta}_w(t) \\ x_3(t) = \theta_m(t) - \theta_w(t) \end{cases}$$

Detta ger att

$$\dot{x}_1 = \ddot{\theta}_m = \frac{1}{J_m}(M_m - k(\theta_m - \theta_w) - c(\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_w)) = \frac{1}{J_m}(-cx_1 + cx_2 - kx_3 + M_m))$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{\theta}_w = \frac{1}{J_w}(k(\theta_m - \theta_w) + c(\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_w) - M_w) = \frac{1}{J_w}(cx_1 - cx_2 + kx_3 - M_w))$$

$$\dot{x}_3 = \dot{\theta}_m - \dot{\theta}_w = x_1 - x_2$$

Skrivet på matrisform blir det

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{c}{J_m} & \frac{c}{J_m} & -\frac{k}{J_m} \\ \frac{c}{J_w} & -\frac{c}{J_w} & \frac{k}{J_w} \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{J_m} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_w} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_m \\ M_w \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

b) $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ med A, B, C från a) uppgiften. Alternativt kan vi få fram överföringsfunktionen utan att gå vägen via tillståndsformen. Laplacetransformera balansekvationerna.

$$(J_m s^2 + cs + k)\theta_m = M_m + (k + cs)\theta_w$$

$$(J_w s^2 + cs + k)\theta_w = (k + cs)\theta_m - M_w$$

Den sökta överföringsfunktionen är

$$\frac{s\theta_w}{M_m},$$

för att få fram den så sätter vi M_w till 0 i balansekvationen ovan.

Lös ut θ_m ur första balansekvationen och sätt in i andra balansekvationen.

$$(J_w s^2 + cs + k)\theta_w = (k + cs)\frac{M_m + (k + cs)\theta_w}{J_m s^2 + cs + k}$$

Nu kan vi lösa ut θ_w.

$$\frac{\theta_w}{M_m} = \frac{k + cs}{s^2(J_m J_w s^2 + (J_m + J_w)(cs + k))}$$

vilket leder till att

$$\frac{s\theta_w}{M_m} = \frac{k + cs}{s(J_m J_w s^2 + (J_m + J_w)(cs + k))}$$