Reglerteknik M3, 4p

Tentamen 2006-12-19

Tid: 08:30 – 12:30 Lokal: V-huset

Kurskod: **ERE031. OBS – Detta är gamla kursen på 4p!**

Lärare: Knut Åkesson, tel 0701-749525

Läraren besöker tentamenssalen vid två tillfällen för att svara på eventuella frågor. Detta sker normalt sett en timmar efter tentamensstart samt en timme före tentamens slut.

Tentamen omfattar totalt 30 poäng, där betyg tre fordrar 12 poäng, betyg fyra 18 poäng och betyg fem 24 poäng. Lösningar och svar till alla uppgifter ska vara tydligt motiverade.

Lösningsförslag till tentamen anslås på kurshemsidan senast första arbetsdagen efter tentamenstillfället. *Tentamenresultat* anslås senast den *9 januari* kl 12.30 på avdelningens anslagstavla. *Granskning* av rättning sker den *15 och 22 januari* kl 12.30 – 13.00 på avdelningen.

Tillåtna hjälpmedel:

- Reglerteknik M3 - Formelsamling
- Bodediagram
- Beta och Physics handbook, Standard Mathematical Tables, TEFYMA
- Chalmersgodkänd räknare alternativt valfri kalkylator med rensat minne, ej handdator.
- För Erasmusstudenter är lexikon, till och från svenska, tillåtet.

Inga anteckningar är tillåtna!

Institutionen för signaler och system
Chalmers tekniska högskola

1

Överföringsfunktionen för en temperaturgivare antas vara

$$G(s) = \frac{Y_m(s)}{Y(s)} = \frac{1}{1+Ts}$$

där $y(t)$ är den verkliga temperaturen medan $y_m(t)$ är den av termometern uppvisade temperaturen. Instrumentet testas på följande sätt:

a) Termometern flyttas från 20° vatten till 40° vatten. Efter 40 sekunder visar termometern 35.6°. Bestäm termometerns tidskonstant T.

(1p)

b) Termometern är placerad i ett kärl med vatten som har temperaturen T_0. Temperaturen i kärlet höjs linjärt med 2°/minut. Beräkna den kvarstående avvikelsen mellan vattnets temperatur och termometerns visning.

(2p)

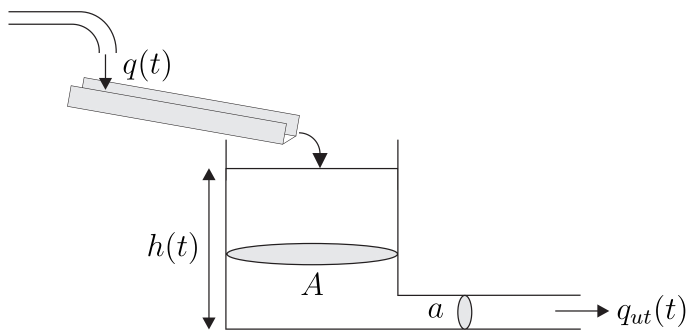
c) I det tredje försöket undersöks hur instrumentet reagerar på en oscillerande sinusformad temperaturvariation. Antag att amplituden är 10°. Vilka amplituder visar instrumentet då frekvensen är dels 1 Hz och dels 0.001 Hz? Kommentera instrumentets lämplighet för de båda fallen.

(2p)

2

För att kunna designa en regulator behövs en modell över processen som ska styras. Vi ska i denna uppgift titta på modelleringen av två processer som vi studerat i laboration respektive inlämninsguppgift. För att ställa upp en modell över processen kan du behöva göra antaganden som inte är redovisade i uppgiften – dessa ska vara rimliga och de ska redovisas.

Process 1

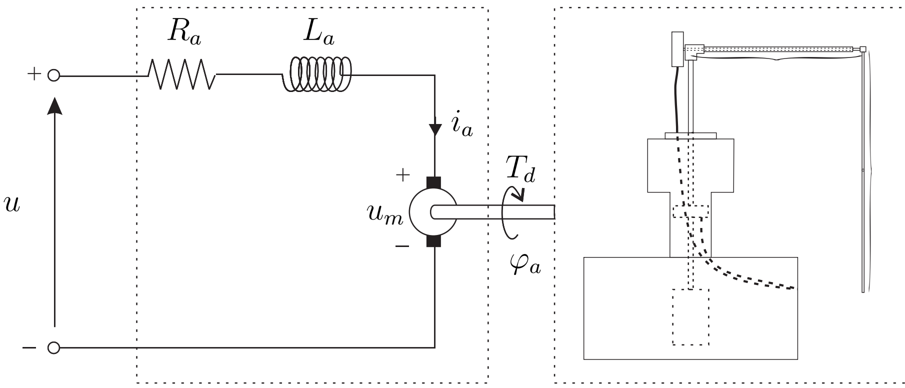


a) Betrakta processen ovan. $q(t)$ är inflödet till rännan som sedan i sin tur mynnar ut i tanken. Utflödet $q_{ut}(t)$ beror på höjden i tanken enligt följande samband $q_{ut}(t) = a\sqrt{2gh(t)}$. Inflödet $q(t)$ rinner via en lång ränna, med konstant hastighet, för att först därefter rinna ner i tanken. Tanken är cylinderformat med arean A. Bestäm en ekvation som beskriver sambandet mellan inflödet i tanken $q(t)$ och utflödet $q_{ut}(t)$.

(2p)

Uppgiften fortsätter på nästa sida!

Process 2



I inlämningsuppgifterna använde vi en ankarstyrd DC-motor för att styra en mekanisk pendel. Insignalen till motorn är spänningen $u(t)$, och utsignalen det drivande momentet $T_d(t)$. Resistansen i motorn är R_a och induktansen L_a. För en ankarstyrd DC-motor gäller att det drivande momentet, $T_d(t)$, är proportionellt mot strömmen genom ankarlindningen, $i_a(t)$, dvs

$$T_d(t) = K_m i_a(t).$$

Det drivande momentet kommer att innebära att pendeln börjar röra på sig, vilket kommer att innebära att det induceras en spänning (mot-emk), som är proportionell mot rotorns varvtal enligt följande samband

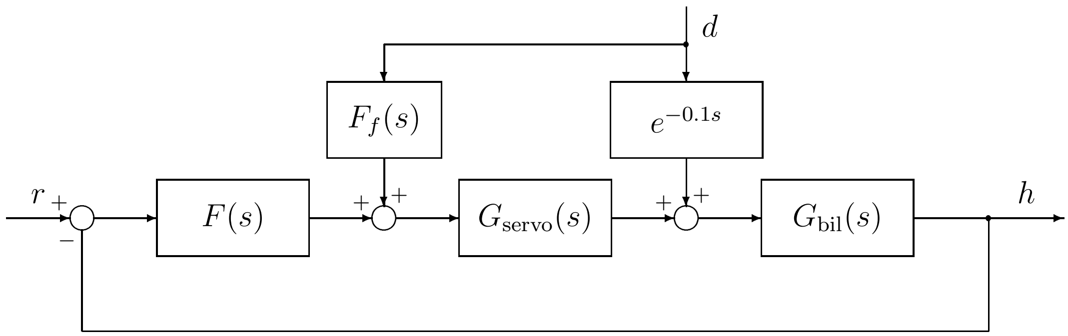
$$u_m(t) = K_u \dot{\varphi}_a(t).$$

b) Bestäm överföringsfunktionen från spänningen u det drivande momentet T_d, samt överföringsfunktionen från $\dot{\varphi}_a$ till T_d.

(3p)

3

För att öka komforten i en bil är det möjligt att ersätta fjädrar och stötdämpare i en bil med aktiva hydraulservon. Hydraulservots uppgift är att hålla nivån i bilen konstant, detta görs genom att mäta den aktuella höjden på fjädringen och med hjälp av en regulator styra kraften i servot så att bilens nivå är konstant. Reglersystemet kan ses i figuren nedan.



Hydraulservot och bilen beskrivs beskrivs av

$$\begin{cases} G_{\text{servo}}(s) = \dfrac{1}{0.2s+1} \\ \\ G_{\text{bil}}(s) = \dfrac{1}{s^2+1.5s+1} \end{cases}$$

Regulatorn som styr systemet är en PI-regulator med följande parametrar

$$F(s) = K_p(1 + \frac{1}{sT_i}).$$

a) Bestäm parametrarna K_p och T_i i PI-regulator ovan så att det återkopplade systemet får överkorsningsfrekvensen $\omega_c = 0.7$ rad/s och fasmarginalen $\varphi_m = 50°$.

(3p)

b) För att förbättra egenskaperna på ojämna vägar har en laseravståndsmätare installerats längst fram på bilen. Denna mätare gör att vi kan mäta störningen d innan den slår igenom i bilen, vilket gör att vi kan konstruera en framkoppling $F_f(s)$. Hur skall $F_f(s)$ väljas för att störningen inte skall påverka utsignalen h?

(2p)

4

Betrakta processen

$$G(s) = \frac{(1-s)}{(s+1)^2}$$

som ska regleras med en PID-regulator på formen

$$F_{PID}(s) = K_i \frac{(1+s)^2}{s(1+s/\beta)} \qquad (\zeta = 1,\ \tau = 1)$$

a) Vilka krav ställs på K_i och β för att få ett stabilt återkopplat system?

(2p)

b) Bestäm regulatorparametrarna K_i och β så att det återkopplade systemet får en dubbelpol i $s = -2$.

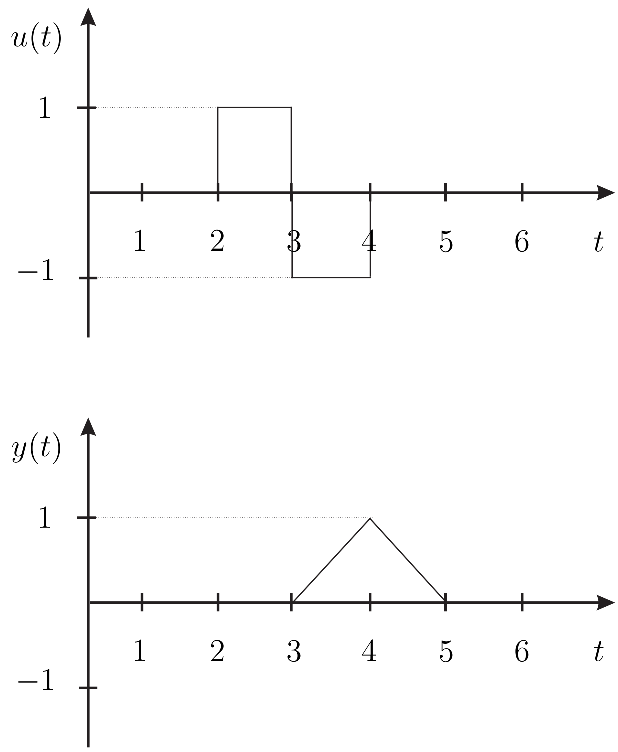
(2p)

c) Processen $G(s)$ har ett nollställe i höger halvplan. Processer med nollställen i höger halvplan är ofta besvärligare att reglera än processer med nollställen i vänster halvplan - motivera varför!

(1p)

5

Figuren nedan visar insignalen $u(t)$ och utsignalen $y(t)$ från ett dynamiskt system.



a) Bestäm systemets överföringsfunktion.

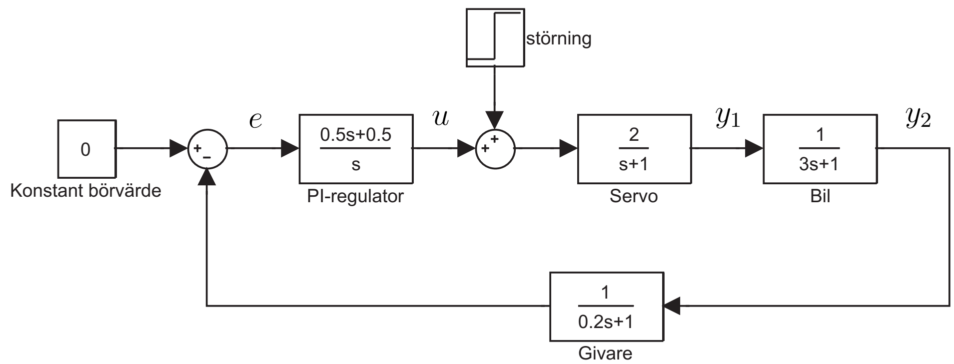
(2p)

b) Avgör om systemet är insignal-utsignal stabilt?

(1p)

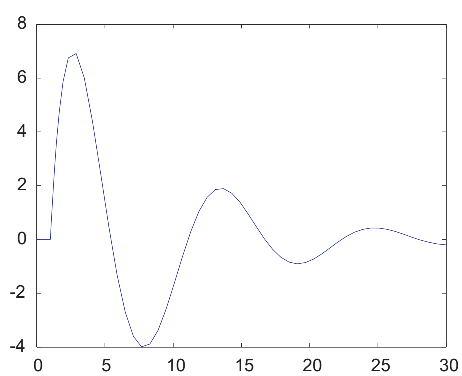
6

En stegstörning till ett reglersystem simuleras i Simulinkdiagrammet nedan.

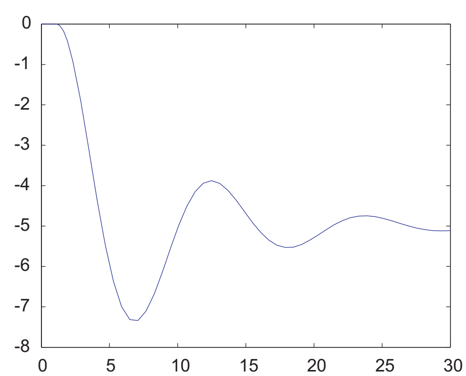


Para ihop signalerna e, u, y_1, y_2 med signalerna i diagrammen nedan.

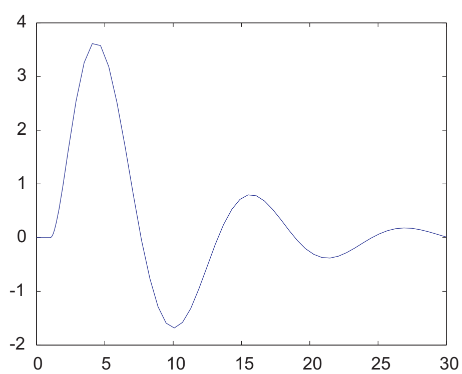
(2p)



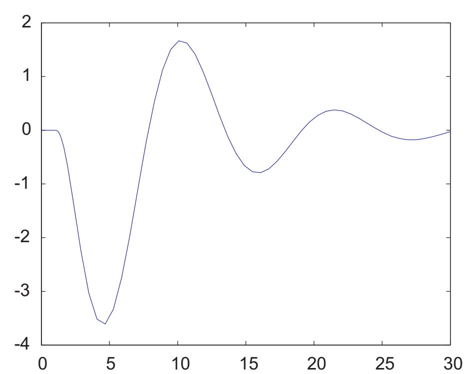
(a)



(b)



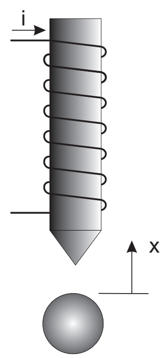
(c)



(d)

7

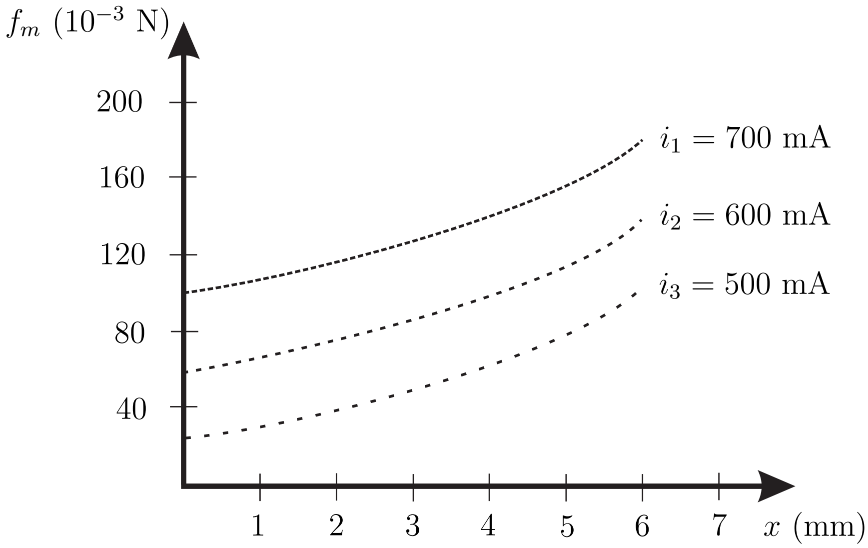
Följande uppgift handlar om att beräkna en approximativ linjär modell med hjälp av experimentella data. Traditionella kullager kan förbättras genom att kombinera magnetism och reglerteknik. Genom att styra magnetfältet runt en roterande axel så är det kan man se till att axeln aldrig vidrör magneterna, på detta sätt blir axelfriktionen helt försumbar. Vi ska titta på en förenklad variant av detta problem där det gäller att få en metallkula att sväva i på en viss höjd genom att reglera magnetfältet som påverkar kulan. Den förenklade modellen visas i figuren nedan.



Kulans rörelse beskrivs med hjälp av Newton's lag

$$m\ddot{x} = f_m(x, i) - mg$$

där kraften f_m är orsakad av det elektromagnetiska fältet, vilket i sin tur bestäms av strömmen, i, och avståndet till kulan x. Kraften f_m är inte enkel att bestämma teoretiskt men går relativt enkelt att mäta experimentellt. I figuren på nästa sida så visas hur kraften f_m beror på avståndet x för tre olika strömmar i_1, i_2 och i_3.



En approximativ linjär modell runt en arbetspunkt (x_0, i_0) för hur kraften f_m beror på avståndet $x = x_0 \delta x$ och strömmen $i = i_0 + \delta i$ ges av

$$f_m(x_0 + \delta x, i_0 + \delta i) \approx f_m(x_0, i_0) + c_x \delta x + c_i \delta i$$

a) Vi ska beräkna en jämviktspunkt för kulan. Antag att strömmen är 600 mA och kulan väger $8.4 \cdot 10^{-3}$ kg. Bestäm det avstånd x som gör att kulan kommer att hänga i jämvikt.

(1p)

b) Bestäm en approximativ linjär modell runt arbetspunkten, dvs bestäm konstanterna c_x och c_i i den approximativa linjära modellen ovan.

(4p)

GOD JUL!

Lösningsförslag

1

a) Stegsvaret för ett första ordningenssystem ges av

$$y_m(t) = (1 - e^{t/T})y_0$$

där y_0 är steghöjden. I detta fall är $y_0 = 40^\circ - 20^\circ = 20^\circ$.

$$y_m(t) = 20^\circ + (1 - e^{t/T})20^\circ$$

$$y_m(40) = 20^\circ + (1 - e^{40/T})20^\circ = 35.6^\circ$$

$$e^{-40/T} = \frac{4.4}{20} = 0.22$$

$$T = \frac{-40}{\ln 0.22} = 26.42s$$

b)

$$y(t) = \frac{2}{60}t$$

$$Y(s) = \frac{1}{30s^2}$$

$$E(s) = Y(s) - Y_m(s) = Y(s) - \frac{1}{1+Ts}Y(s) = \frac{Ts}{1+Ts}\frac{1}{30s^2}$$

$$\lim_{t\to\infty} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \frac{T}{30} \approx 0.88$$

c)

$$|Y_m(j\omega)| = |\frac{1}{1+Tj\omega}||Y(j\omega)|$$

Då frekvensen är 1 Hz så är $\omega = 2\pi$, och då den är 0.001Hz så är $\omega = 0.002\pi$.

$$|Y_m(j2\pi)| = \frac{10}{\sqrt{1 + (26.42 \cdot 2\pi)^2}} \approx 0.06$$

$$|Y_m(j0.002\pi)| = \frac{10}{\sqrt{1 + (26.42 \cdot 0.002\pi)^2}} \approx 9.9$$

Instrumentet är för långsamt för att kunna mäta de högre temperaturvariationerna.

2

a) Volymen i tanken är lika med integralen av inlödet minnus utflödet, dvs

$$V(t) = \int_0^t q(\tau - L) - q_{ut}(\tau)d\tau$$

Dessutom gäller att:

$$V(t) = Ah(t)$$

Vilket ger att

$$Ah(t) = \int_0^t q(\tau - L) - q_{ut}(\tau)d\tau$$

Lös ut $h(t)$ ur

$$q_{ut}(t) = a\sqrt{2gh(t)}$$

vilket ger oss

$$h(t) = \frac{q_{ut}^2(t)}{2a^2 g}.$$

Sätt in $h(t)$ i ekvationen ovan ger oss följande olinjära samband

$$A\frac{q_{ut}^2(t)}{2a^2 g} = \int_0^t q(\tau - L) - q_{ut}(\tau)d\tau$$

Vi kan om vi vill derivera ekvationen ovan och får då följande samband

$$\frac{A}{a^2 g} q_{ut}(t)\dot{q}_{ut}(t) = q(t - L) - q_{ut}(t)$$

b) Kirchoff ger

$$u(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + K_u \dot{\varphi}_a(t)$$

Vilket vi kan skriva om som

$$L_a \frac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a(t) = u(t) - K_u \dot{\varphi}_a(t)$$

Laplacetransformering ger

$$(L_a s + R_a)I_a(s) = U(s) - K_u P(s)$$

där $P(s)$ är laplacetransformen av $\dot{\varphi}_a(t)$.

$$I_a(s) = \frac{1}{L_a s + R_a} U(s) + \frac{-K_u}{L_a s + R_a} P(s)$$

$$T_d(s) = K_m I_a(s)$$

Överföringsfunktionen från u till T_d ges följaktligen av

$$\frac{K_m}{L_a s + R_a}.$$

Överföringsfunktionen från u till $\dot{\varphi}_a(t)$ ges följaktligen av

$$\frac{-K_u K_m}{L_a s + R_a}.$$

3

a)

$$G_{tot}(s) = \frac{1}{(0.2s+1)(s^2+1.5s+1)}$$

$$|G_{tot}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(0.2\omega)^2+1}\sqrt{(1-\omega^2)^2+(1.5\omega)^2}}$$

$$|G_{tot}(j0.7)| = \frac{1}{\sqrt{(0.2\cdot 0.7)^2+1}\sqrt{(1-0.7^2)^2+(1.5\cdot 0.7)^2}} \approx 0.85$$

Då $0 < \omega < 1$ gäller att

$$\arg G_{tot}(j\omega) = -\arctan(0.2\omega) - \arctan(\frac{1.5\omega}{1-\omega^2})$$

Då $\omega = 0.7$ får vi alltså att

$$\arg G_{tot}(j0.7) = -\arctan(0.2\cdot 0.7) - \arctan(\frac{1.5\cdot 0.7}{1-0.7^2}) \approx -72.1^\circ$$

För regulatorn ska följande gälla

$$F(j0.7) = \frac{1}{|G_{tot}(j0.7)|} \approx 1.18$$

samt at

$$\arg F(j0.7) = -180° + 72.1° + 50° = -57.9°$$

För PI-regulatorn gäller att

$$\arg F(j\omega) = -90° - \arctan(T_i\omega)$$

Genom att sätt in ω_c kan vi beräkna T_i som

$$T_i = \tan(32.1°)/0.7 \approx 0.89$$

$$|F(j\omega_c)| = K_p \frac{\sqrt{1+(T_i\omega_c)^2}}{T_i\omega_c} = 1.18 \Rightarrow K_p \approx 0.62$$

b) Överföringsfunktionen från d till insignalen på G_{bil} ska vara 0, vilket ger

$$F_f(s)G_{servo}(s) + e^{-0.1s} = 0$$

Detta ger att

$$F_f(s) = -\frac{e^{-0.1s}}{G_{servo}(s)} = -(0.2s+1)e^{-0.1s}$$

4

a)

$$L(s) = \frac{(1-s)}{(s+1)^2}\frac{K_i(1+s)^2}{s(1+s/\beta)} = \frac{K_i(1-s)}{s+s^2/\beta}$$

Polerna för det återkopplade systemet ges av

$$s^2 + \beta(1-K_i)s + \beta K_i = 0$$

Det återkopplade systemet är därför stabilt då $\beta(1-K_i) > 0,\ \beta K_i > 0$. Vi får två fall. (i) $\beta > 0$: $0 < K_i < 1$. (ii) $\beta < 0$: Detta ger att $K_i < 0$ samt att $1-K_i < 0$, vilket alltså är motstridiga krav. Det återkopplade systemet är följdaktligen stabilt då $\beta > 0,\ 0 < K_i < 1$.

b) Om vill ha en dubbelpol i $s = -2$, ska den karakteristiska polynomet ges av $(s+2)^2 = s^2 + 4s + 4$. Vi får följande två samband $\beta K_i = 4$ samt $\beta(1-K_i) = 4$. Ur detta får vi att $\beta = 8$ samt att $K_i = 0.5$.

c) Processer med nollställen i högerhalvplan är icke-minimumfasprocesser och är ofta besvärliga att reglera beroende på att dessa processer kan ha ett stegsvar som initialt går åt ”fel” håll.

5

a)

$$u(t) = \sigma(t-2) - 2\sigma(t-3) + \sigma(t-4)$$

$$U(s) = (e^{-2s} - 2e^{-3s} + e^{-4s})/s$$

$$y(t) = (t-3)\sigma(t-3) - 2(t-4)\sigma(t-4) + (t-5)\sigma(t-5)$$

$$Y(s) = (e^{-3s} - 2e^{-4s} + e^{-5s})/s^2$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{e^{-s}}{s}\frac{(e^{-2s} - 2e^{-3s} + e^{-4s})/s}{(e^{-2s} - 2e^{-3s} + e^{-4s})/s} = \frac{e^{-s}}{s}$$

b) Överföringsfunktionen är inte insignal-utsignal stabilt på grund av polen i origo. Exempelvis så skulle ett enhetssteg som insignal ge en obegränsad utsignal.

6

a) Vi kan direkt säga att u måste vara (b) på grund av b inte går mot 0. Reglerfelet e måste vara figur (d) eftersom denna är negativ strax efter att felet inträffat. Återstår y_1 och y_2, (a) måste vara y_1 på grund av den större fasförskjutningen. Kvar är nu (c) för y_2.

7

a) Kulans tyngdkraft är $8.4 \cdot 10^{-3} \cdot 9.81 \approx 0.0824$ N. Ur figuren ser vi (för kurvan i_2) att då den elektromagnetiska kraften är lika stor som kulans tyngdkraft så är avståndet till kulan ca. 2.7 mm.

b)

$$c_x = \frac{\partial f_m}{\partial x} \approx \frac{(110-40) \cdot 10^{-3}}{(5-0) \cdot 10^{-3}} \approx 14 \text{ N/m}$$

$$c_i = \frac{\partial f_m}{\partial i} \approx \frac{(120-40) \cdot 10^{-3}}{(700-500) \cdot 10^{-3}} \approx 0.4 \text{ N/A}$$

Dvs runt arbetspunkten $(x_0, i_0) = (2.7 \cdot 10^{-3} \text{ m}, 600 \cdot 10^{-3} \text{ A})$ gäller att

$$f_m \approx 0.0824 + 14\delta x + 0.4\delta i$$