Reglerteknik M3

Tentamen 2006-01-10

Tid: 14:00 – 18:00 Lokal: V-huset

Kurskod: ERE031

Lärare: Knut Åkesson, tel 0701-749525

Läraren besöker tentamenssalen vid två tillfällen för att svara på eventuella frågor. Detta sker normalt sett en timmar efter tentamensstart samt en timme före tentamens slut.

Tentamen omfattar 6 uppgifter med totalt 30 poäng, där betyg tre fordrar 12 poäng, betyg fyra 18 poäng och betyg fem 24 poäng. Lösningar och svar till alla uppgifter ska vara tydligt motiverade.

Lösningsförslag till tentamen anslås på kurshemsidan senast första arbetsdagen efter tentamenstillfället. *Tentamenresultat* anslås senast den *24 januari* kl 12.30 på avdelningens anslagstavla. *Granskning* av rättning sker den *24 och 25 januari* kl 12.30 – 13.00 på avdelningen.

Tillåtna hjälpmedel:

- Reglerteknik M3 - Formelsamling
- Bodediagram
- Beta och Physics handbook, TEFYMA
- Chalmersgodkänd räknare alternativt valfri kalkylator med rensat minne, ej handdator.

Inga anteckningar är tillåtna!

Institutionen för signaler och system
Chalmers tekniska högskola

1

Sambandet mellan insignalen $u(t)$ och utsignalen $y(t)$ för ett system ges av

$$\dot{y}(t) + 3y(t) = b_0\dot{u}(t) + b_1u(t)$$

b_0 och b_1 är reella konstanter som kan anta både positiva och negativa värden.

I fallet att $u(t)$ är en sinusformad signal så vet vi att om insignal-utsignal sambandet är stabilt så kommer utsignalen stationärt att också vara en sinusformad signal men den kommer att vara förstärkt och fasvriden.

a) Bestäm för sambandet ovan hur förstärkningen beror på frekvensen hos den sinusformade insignalen.

(2p)

b) Ange värden på b_0 och b_1 så att förstärkningen är lika med ett oberoende av frekvensen på den sinusformade insignalen.

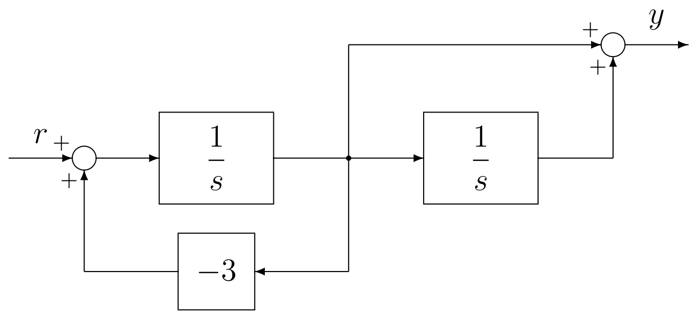
(1p)

c) Bestäm för sambandet ovan hur fasvridningen beror på frekvensen hos den sinusformade insignalen. Notera att b_0 och b_1 kan anta både positiva och negativa värden.

(2p)

2

Betrakta blockschemat nedan.



a) Bestäm överföringsfunktionen från r till y, samt avgör om en begränsad insignal alltid kommer att ge upphov till en begränsad utsignal.

(2p)

b) Antag att systemet befinner sig i vila då följande insignal appliceras

$$r(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases}$$

Bestäm den resulterande utsignalen $y(t)$, $t > 0$.

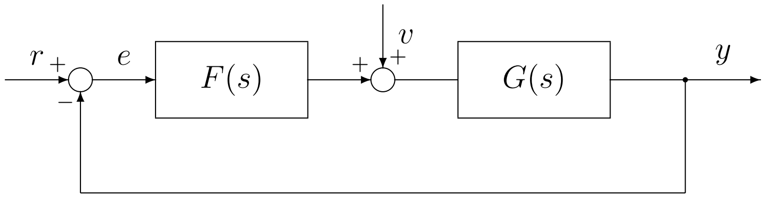
Om du inte löst a) uppgiften kan du använda följande överföringsfunktion från r till y istället

$$\frac{s+2}{s(s+4)}.$$

(3p)

3

Betrakta blockschemat nedan.



En instabil process som har överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{s-1}$$

ska regleras med en PI-regulator

$$F(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$$

a) För vilka värden på K_p och K_i blir det återkopplade systemet stabilt? (1p)

b) Bestäm regulatorparametrarna K_p och K_i så att det återkopplade systemet får en dubbelpol i $s = -\omega_n$. (2p)

c) Bestäm $|G_{ry}(j\omega)|$. Om du löst b) uppgiften kan du använda dess värden på K_p och K_i dvs bestämma $|G_{ry}(j\omega)|$ som funktion av ω_n. Om du inte löst b) får du bestämma $|G_{ry}(j\omega)|$ som funktion av K_p och K_i. (2p)

4

Figuren nedan visar hur en PI-regulator reglerar temperaturen (y) i en ugn. Styrsignalen (u) är kommenderat bränsleflöde, vilket utgör insignalen till ett bränsleventilservo med en överföringsfunktion

$$G_u(s) = \frac{1}{1+5s}.$$

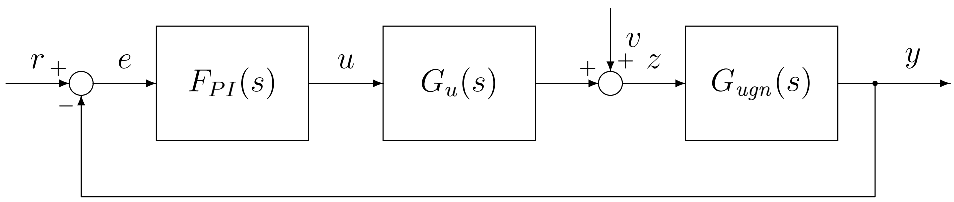
Ugnens verkliga bränsletillflöde (z) karakteriseras därför av denna tidskonstant i servot samt av ett störflöde v, som representerar variationer i bränsletryck, viskositet m m.

Själva ugnens dynamik $G_{ugn}(s)$ kan beskrivas av en förstärkning K, en tidskonstant T_2 och en tidsfördröjning T_d, dvs

$$G_{ugn}(s) = \frac{K}{1+T_2 s} e^{-sT_d},$$

med följande numeriska värden: $K = 0.3°\mathrm{C}/\text{flödesenhet}$, $T_2 = 50$ sekunder, $T_d = 10$ sekunder. PI-regulatorns överföringsfunktion är

$$F_{PI}(s) = 0.15 \frac{1+30s}{s}$$



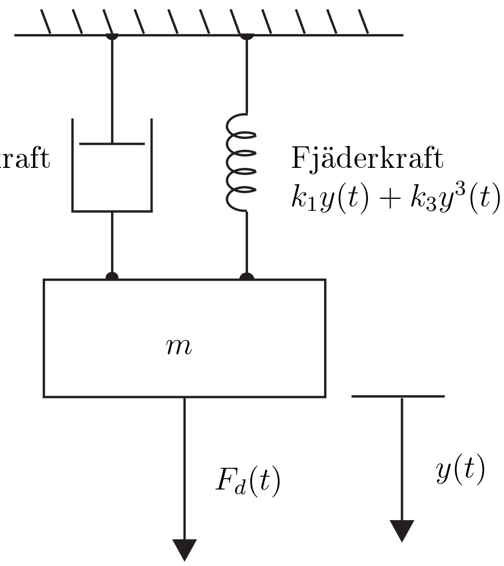
För att förbättra regleringen av störningen v utrustas systemet med en bränsleflödesgivare (som mäter variabeln z) och en inre krets för reglering av bränsleflödet (kaskadreglering). Den inre kretsen förses med en proportionell regulator med förstärkningen $K_p = 10$, dvs $Z = G_u(s)K_p(F_{PI}(s)E - Z) + V$

a) Rita ett blockschema som illustrerar det kompletta reglersystemet inklusive kaskadreglering. (1p)

b) Bestäm överföringsfunktionen från laststörningen v till utsignalen y i fallet med kaskadreglering. (1p)

c) Bestäm hur mycket effektivare som en lågfrekvent laststörning kompenseras jämfört med fallet utan kaskadreglering. (3p)

5



En massa med vikten m och positionen $y(t)$ drivs enligt figuren av en drivande kraft $F_d(t)$. Via den progressiva fjädern utsätts massan också för den olinjära fjäderkraften $k_1 y(t) + k_3 y^3(t)$ och dämpkraften $b\dot{y}(t)$. Definiera nollpunkten för y då systemet hänger i jämvikt.

Den drivande kraften $F_d(t)$ genereras via en hydraulisk motor med överföringsfunktionen

$$F_d(s) = \frac{K_m}{1+s} U(s)$$

Motorns uppgift är att positionera massan m vid positionen $y = y_0$.

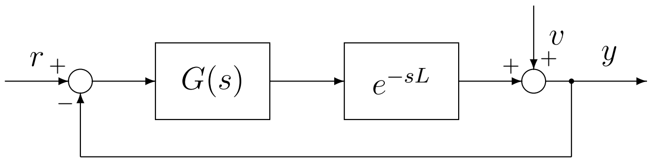
a) Formulera en olinjär tillståndsmodell som beskriver fjäder-massasystemet rörelse inklusive den hydrauliska motorn med $u(t)$ som insignal och massans position $y(t)$ som utsignal. (3p)

b) Bestäm en linjär tillståndsmodell som beskriver avvikelser kring den önskade positionen $y = y_0$. (2p)

c) Bestäm polerna hos överföringsfunktionen från F_d till y. (1p)

6

Betrakta det återkopplade systemet i figuren nedan.



Överföringsfunktionen $G(s)$ är stabil och har en överkorsningsfrekvens ω_c som är svår att avläsa exakt från ett givet Bodediagram, men man kan med all säkerhet säga att det ligger mellan 10-20 rad/s. Fasmarginalen φ_m är minst 20 grader för detta intervall. Bestäm den maximala tidsfördröjning, L, så att vi kan garantera stabilitet för det återkopplade systemet?

(4p)

LYCKA TILL!

Lösningsförslag

1

a) Laplacetransformering ger

$$(s+3)Y(s) = (b_0 s + b_1)U(s)$$

Vilket leder till att

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s + b_1}{s+3}$$
$$\Rightarrow$$
$$G(j\omega) = \frac{b_0 j\omega + b_1}{j\omega + 3}$$
$$\Rightarrow$$
$$|G(j\omega)| = \frac{\sqrt{b_1^2 + (b_0\omega)^2}}{\sqrt{3^2 + \omega^2}}$$

b) Välj $b_0 = 1$ och $b_1 = 3$.

c) Tänk på i vilken kvadrant som det komplexa talet $G(j\omega)$ hamnar i. Notera att det finns flera korrekta svar eftersom det går att lägga till $n \cdot 2\pi$ radianer till alla vinklar men i reglertekniska sammanhang är det lämpligast att enbart låta de tal som ligger i första kvadranten ha positiv fasvridning medans övriga kvadranter har en negativ fasvriding. Följdaktligen får vi följande (så länge $b_1 \neq 0$):

$$\arg G(j\omega) = \arctan\frac{b_0\omega}{b_1} - \arctan\frac{\omega}{3},\ b_1 > 0$$
$$\arg G(j\omega) = -\pi + \arctan\frac{b_0\omega}{b_1} - \arctan\frac{\omega}{3},\ b_1 < 0$$

2

a) Inför hjälpvariabeln $Z(s)$ som betecknar signalen mellan de två integrationsblocken.

$$Y(s) = (1 + \frac{1}{s})Z(s)$$
$$Z(s) = \frac{1}{s}(R(s) - 3Z(s))$$

Ur den nedre sambandet kan vi lösa ut $Z(s)$.

$$Z(s) = \frac{1}{s+3}R(s)$$

Vilket vi kan sätta in i det första sambandet och få fram

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s+3)}R(s).$$

Eftersom överföringsfunktionen har en pol i origo vilket medför att insignalen kommer att integreras upp, vilket i sin tur medför att exempelvis en stegformad insignal (dvs. en begränsad insignal) kommer att ge upphov till en obegränsad utsignal.

b) Laplacetransformering av insignalen ger

$$R(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-2s}$$

Detta leder till att usignalen blir

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s+3)}(\frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-2s}) = \frac{s+1}{s^2(s+3)} - \frac{s+1}{s^2(s+3)}e^{-2s}$$

För att bestämma $y(t)$ gör vi en invers laplacetransformering. Ur formelsamlingen har vi att

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{a}{s^2(s+a)}\} = (t - \frac{1}{a}(1 - e^{-at}))\sigma(t)$$

Multiplikation med s i frekvensplanet innebär deriviering i tidsplanet dvs,

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{as}{s^2(s+a)}\} = (1 - e^{-at})\sigma(t)$$

Alternativt kan man förkorta med s i formeln ovan vilket

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{as}{s^2(s+a)}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{a}{s(s+a)}\}$$

vilket direkt finns att läsa av i formelsamlingen.

De båda inverstransformeringarna ger tillsammans uttrycket för

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s+1}{s^2(s+3)}\} = \frac{1}{3}((t - \frac{1}{3}(1 - e^{-3t})) + 1 - e^{-3t})\sigma(t)$$

Låt

$$y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s+1}{s^2(s+3)}e^{-2s}\}$$

Eftersom multiplikation med e^{-sL} i frekvensplanet medför tidsförskjutning med L tidsenheter i tidsplanet för vi direkt uttrycket för

$$y_2(t) = y_1(t-2)$$

Detta ger att

$$y(t) = y_1(t) - y_2(t) = y_1(t) - y_1(t-2) =$$

$$= \frac{1}{3}((t - \frac{1}{3}(1 - e^{-3t})) + 1 - e^{-3t})\sigma(t) - \frac{1}{3}(((t-2) - \frac{1}{3}(1 - e^{-3(t-2)})) + 1 - e^{-3(t-2)})\sigma(t-2)$$

3

a) Polerna till det återkopplade systemet ges av (den karakteristiska ekvationen)

$$s^2 + (K_p - 1)s + K_i = 0$$

Genom att använda oss av Routh-Hurwitz får vi följande stabilitetsvillkor

$$K_p - 1 > 0,$$

$$K_i > 0.$$

Dvs. det återkopplade systemet är stabilt då $K_p > 1$ och $K_i > 0$.

b) Dubbepol i $s = -\omega_n$, ger att den karakteristiska ekvationen ska vara

$$(s + \omega_n)^2 = s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2$$

Genom att identifiera koefficienterna i de två karakteristiska ekvationerna får vi att

$$K_p - 1 = 2\omega_n$$

$$K_i = \omega_n^2$$

Detta ger följande uttryck för regulatorparametrarna.

$$K_p = 2\omega_n + 1,$$

$$K_i = \omega_n^2.$$

c)

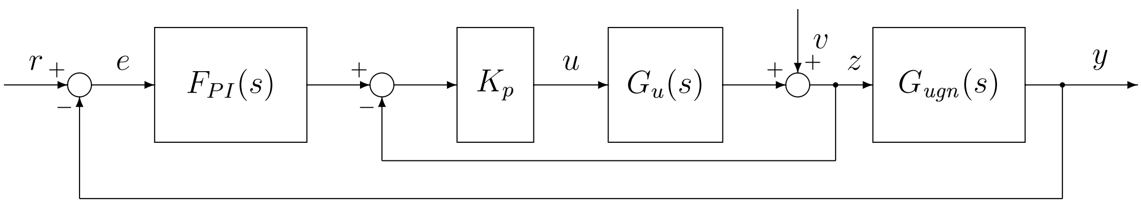
$$G_{ry}(s) = T(s) = \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)} = \frac{(2\omega_n + 1)s + \omega_n^2}{(s + \omega_n)^2}$$

$$G_{ry}(j\omega) = \frac{(2\omega_n + 1)j\omega + \omega_n^2}{(j\omega + \omega_n)^2}$$

$$|G_{ry}(j\omega)| = \frac{\sqrt{(\omega(2\omega_n + 1))^2 + \omega_n^4}}{\omega^2 + \omega_n^2}$$

4

a)



b)

$$Z = G_u K_p (F_{PI}(R - Y) - Z) + V$$

$$Y = G_{ugn} Z$$

Sätt $R = 0$ eftersom vi enbart är intresserad av överföringsfunktionen från v till z samt sätt in den andra ekvationen i den första och lös ut Y. Detta ger att

$$Y = \frac{G_{ugn}}{1 + G_u K_p (1 + G_{ugn} F_{PI})}$$

c) Eftersom vi är intresserad av hur lågfrekventa störningar kompenseras (tänk $\sin(\omega t)$ för små ω). Eftersom $\omega \to 0$ så kan vi direkt låta $s \to 0$. Detta medför att vi får följande förenklade överföringsfunktioner.

$$G_{ugn}(0) = K$$
$$G_u(0) = 1$$

Eftersom F_{PI} har oändlig förstärkning för låga frekvenser och vi inte vill räkna med oändligheter så nöjer vi oss i detta läge med att approximera PI-regualatorn med (då s är litet)

$$F_{PI}(s) \approx \frac{0.15}{s}.$$

Sätter vi in dessa uttryck i överföringsfunktionen från v till y får vi

$$|\frac{Y(j\omega)}{V(j\omega)}| \approx \frac{\omega}{0.15 K_p} = \frac{\omega}{1.5}$$

På liknande sätt får vi i fallet utan kaskadreglering att

$$Y = \frac{G_{ugn}}{1 + G_{ugn} G_u F_{PI}} V$$

Sätt in överföringsfuktionerna då s är litet ger

$$|\frac{Y(j\omega)}{V(j\omega)}| \approx \frac{\omega}{0.15}$$

Dvs. då $K_p = 10$ ger en kaskadreglering 10 bättre dämpning av lågfrekventa störningar än i fallet då man inte använder sig av kaskadreglering.

5

a) Newtons 2:a lag på fjäder-massasystemet ger

$$m\ddot{y}(t) = F_d(t) - b\dot{y}(t) - k_1 y(t) - k_3 y^3(t).$$

Modellen över motorn ger

$$F_d(t) + \dot{F}_d(t) = K_m u(t).$$

För att skriva på tillståndsform så introducerar vi $v(t) = \dot{y}(t)$. Vi får då

$$\begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ \dot{v}(t) \\ \dot{F}_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \\ -\frac{k_1}{m} y(t) - \frac{k_3}{m} y^3(t) - \frac{b}{m} v(t) + \frac{1}{m} F_d(t) \\ -F_d(t) + K_m u(t) \end{bmatrix}$$

b) Bestäm först vilket u_0 som behövs för hålla sig på den önskade positionen y_0 (dvs arbetspunkten). Vi får detta genom att sätta alla tillståndsderivator till 0 och lösa det återstående ekvationssystemet. Detta ger oss att

$$k_1 y_0 + k_3 y_0^3 = F_{d0} = K_m u_0$$

vilket ger att

$$u_0 = \frac{1}{K_m}(k_1 y_0 + k_3 y_0^3)$$

Genom att beräkna de partiella derivator i arbetspunkten får vi

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{y}(t) \\ \Delta\dot{v}(t) \\ \Delta\dot{F}_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{m}(k_1 + 3k_3 y_0^2) & -\frac{b}{m} & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y(t) \\ \Delta v(t) \\ \Delta F_d(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_m \end{bmatrix} \Delta u(t)$$

$$\Delta y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y(t) \\ \Delta v(t) \\ \Delta F_d(t) \end{bmatrix}$$

c) Polerna ges av egenvärdena till matrisen $sI - A$. Dvs det karakteristiska polynomet är

$$\det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ \frac{1}{m}(k_1 + 3k_3 y_0^2) & s + \frac{b}{m} & -\frac{1}{m} \\ 0 & 0 & s+1 \end{bmatrix} = (s+1)(s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k_1 + 3k_3 y_0^2}{m})$$

Detta ger oss att

$$s = \begin{cases} -1 \\ -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{(\frac{b}{2m})^2 - \frac{k_1 + 3k_3 y_0^2}{m}} \end{cases}$$

6

Tidsfördröjningen påverkar fasen enligt

$$\omega L \frac{180}{\pi} \text{ grader.}$$

Största bidraget från tidsfördröjningen i det givna intervallet sker alltså vid 20 rad/s. För att det återkopplade systemet inte ska bli instabilt krävs att fasvridningen som tidsfördröjningen åstadkommer får vara max 20 grader vid 20 rad/s. Dvs

$$\omega L \frac{180}{\pi} < 20$$

vilket leder till att

$$L < \frac{\pi}{180} \approx 0.0175 \text{ sekunder}$$