Reglerteknik M3

Tentamen 2005-01-11

Tid: 14.00 – 18.00 Lokal: V-huset

Kurskod: ERE031

Lärare: Knut Åkesson, tel 0701-749525

Läraren besöker tentamenssalen vid två tillfällen för att svara på eventuella frågor. Detta sker normalt sett en timmer efter tentamensstart samt en timme före tentamensslut.

Tentamen omfattar 6 uppgifter med totalt 30 poäng, där betyg tre fordrar 12 poäng, betyg fyra 18 poäng och betyg fem 24 poäng. Lösningar och svar till alla uppgifter ska vara klart motiverade.

Lösningsförslag till tentamen anslås på kurshemsidan senast första arbetsdagen efter tentamenstillfället. *Tentamenresultat* anslås senast den *25 januari* kl 12.30 på avdelningens anslagstavla. *Granskning* av rättning sker den *27 och 28 januari* kl 12.30 – 13.00 på avdelningen.

Tillåtna hjälpmedel:

- Formelsamlingen till Reglerteknikens grunder
- Bodediagram
- Beta och Physics handbook, TEFYMA
- Chalmersgodkänd räknare alternativt valfri kalkylator med rensat minne, ej handdator.

Inga anteckningar är tillåtna!

Avdelningen för reglerteknik och automation
Institutionen för signaler och system
Chalmers tekniska högskola

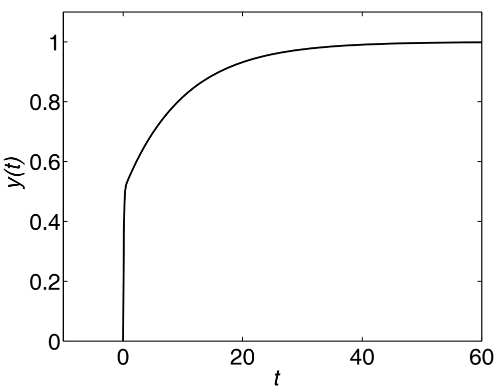
Betrakta följande överföringsfunktioner

1

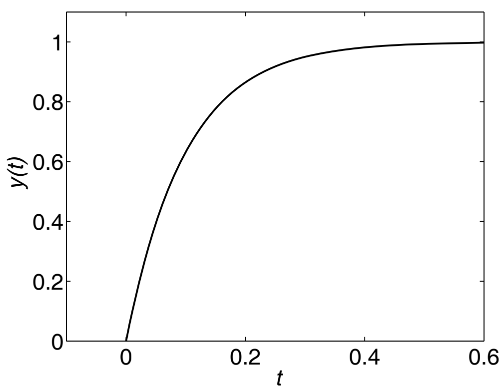
$$G_1(s) = \frac{0.1}{s + 0.1}, \qquad G_2(s) = \frac{10}{s + 10},$$

$$G_3(s) = G_1(s) \cdot G_2(s), \qquad G_4(s) = \frac{G_1(s) + G_2(s)}{2}.$$

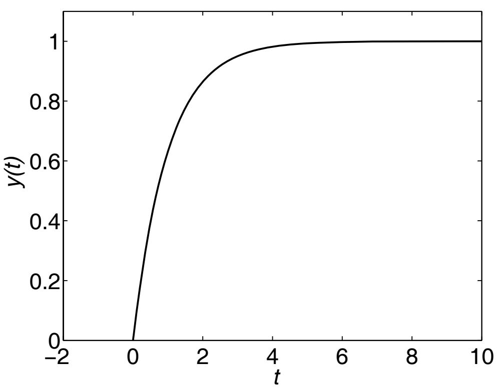
a) Nedan har fyra stegsvar ritats upp, insignalen är ett steg med amplituden 1 som läggs på vid $t = 0$. Ange för varje överföringsfunktion ovan vilket av stegsvaren nedan som bäst motsvarar det riktiga stegsvaret. Notera att det är möjligt att något eller några stegsvar nedan inte hör ihop med någon överföringsfunktion ovan. Motivera ditt svar! (2p)



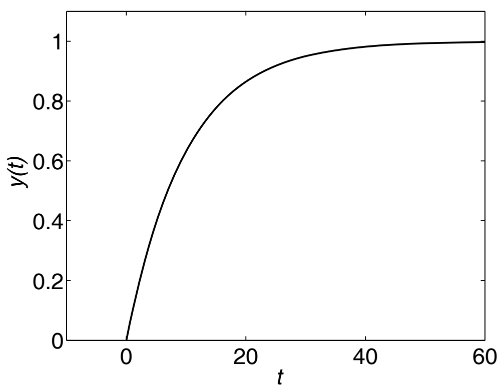
(a)



(b)



(c)



(d)

Uppgiften fortsätter på nästa sida!

b) Bestäm en P-regulator för $G_3(s)$ så att det återkopplade systemet får en pol i origo. Var hamnar den återstående polen?

(2p)

c) Antag att en verklig process beskrivs av $G_3(s)$ ovan men för att få så enkla räkningar som möjligt då vi gör en regulatordesign så vill vi använda en approximativ första ordningens modell av processen. Regulatorns huvudsakliga uppgift är att följa långsamma börvärdesändringar. Av $G_1(s)$ och $G_2(s)$ ovan, vilken är bäst att använda som approximativ modell av $G_3(s)$ för att göra denna regulatordesign. Motivera ditt svar?

(2p)

2

Sambandet mellan utsignalen $y(t)$ och insignalen $u(t)$ för en maskin som ska styras beskrivs av följande differentialekvation

$$\alpha \dot{y}(t) + \beta y(t) = u(t), \ y(0) = 1.$$

a) Avgör för vilka α och β som alla begränsade insignaler ger upphov till begränsade utsignaler, dvs systemet är in/ut-signal stabilt. En signal är begränsad om den alltid håller sig inom ett ändligt intervall.

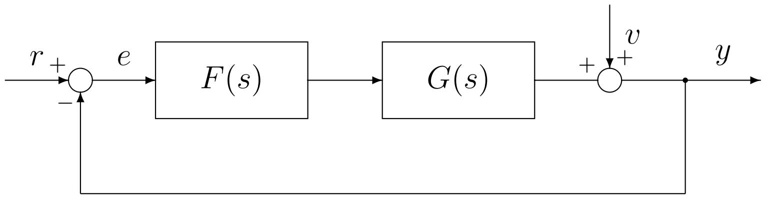
(2p)

b) Låt $\alpha = \beta = 1$ och $u(t) = \sin(t) + \cos(2t), \ t \geq 0$. Bestäm hur $y(t)$ ser ut stationärt, dvs då transienterna klingat av.

(3p)

3

En enkel och i många fall användbar metod för att designa regulator är så kallad λ-tuning. λ-tuning används flitigt inom processindustrin. På vanlig sätt kan vi rita ett blockschema över styrsystemet



I korthet går λ-tuning ut på följande.

1. Approximera processen som du vill styra med en första ordningens modell med dödtid, dvs
$$G(s) = \frac{K}{1+sT}e^{-sL}.$$
2. Bestäm regulatorn $F(s)$ så att det återkopplade systemet får överföringsfunktionen
$$G_{ry}(s) = \frac{1}{1+s\lambda T}e^{-sL},$$
där λ är en designparameter.

Vi ska nu undersöka λ-tuning lite närmare.

Uppgiften fortsätter på nästa sida!

a) Visa att λ-tuning medför att överföringsfunktionen för regulatorn beskrivs av

$$F(s) = \frac{1 + sT}{K(1 + s\lambda T - e^{-sL})}$$

(2p)

b) I designsteget ska man välja λ. Kommer börvärdesändringar att följas bättre då λ ökar eller minskar? Motivera ditt svar!

(2p)

c) Då processen som ska styras saknar dödtid, dvs $L = 0$, så medför detta att regulatorn i a) är av, en från kursen, välkänd regulatortyp - vilken?

(1p)

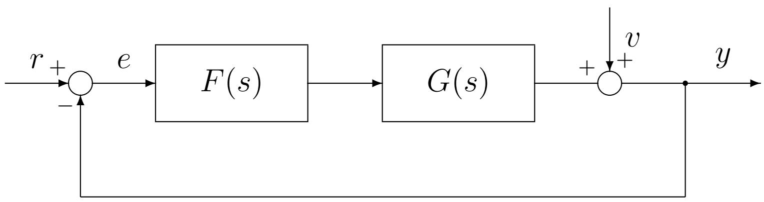
d) Antag att processen saknar dödtid, dvs. $L = 0$. Bestäm känslighetsfunktionen $S(s)$ och utred hur mycket processtörningar av typen $v(t) = \sin(\omega t)$ påverkar utsignalen $y(t)$ för låga resp. höga frekvenser, redogör även för hur valet av λ påverkar.

(2p)

4

Betrakta det återkopplade systemet enligt figuren nedan, där

$$F(s) = K(1 + \frac{1}{sT}), \quad G(s) = \frac{s}{(s+1)^3}.$$



a) Visa att trots integralverkan i regulatorn (och ett stabilt återkopplat system) så blir det kvarstående felet vid stegstörningar $v(t) = v_0\sigma(t)$ inte 0. Varför är det så?

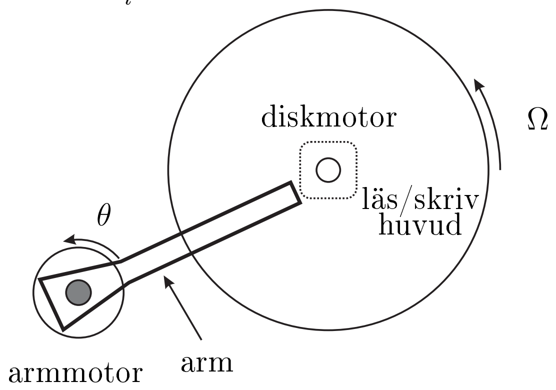
(1p)

b) Bestäm K och T så att fasmarginalen $\varphi_m = 45°$ vid överkorsningsfrekvensen $\omega_c = 1.5$ rad/s.

(2p)

5

Figuren nedan visar principen för positionering av läs/skriv-huvud i en vanlig hårddisk för datorer. Läs/skriv-huvudet sitter på en arm vars vinkel θ kan mätas. Armen kan styras genom att variera strömmen, $i(t)$, genom armmotorn. Armens rörelse kan beskrivas av dess tröghetsmoment J, den viskösa lagerdämpningen d (proportionell mot rotationshastigheten hos armen) samt fjäderkonstanten k, för den fjäder som strävar att återföra armen till ett "nolläge". Armmotorns moment är proportionellt mot strömmen med en proportionalitetsfaktor K_i.



Följande parametervärde gäller: $J = 0.01$ Nm/(rad/s^2), $d = 0.1$ Nm/(rad/s), k=10 Nm/rad, K_i=0.05 Nm/A.

a) Visa att överföringsfunktionen från motorström, $i(t)$, till armvinkel, $\theta(t)$, kan beskrivas av

(2p)

$$G(s) = \frac{5}{s^2 + 10s + 1000}$$

b) Dimensionera en regulator för positionering av armen. Det enda kravet på regulatorn är det återkopplade systemet ska ha en fasmarginal på 65°.

(2p)

6

Betrakta återigen regulatorn som erhålls vi λ-tuning.

$$F(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1 + sT}{K(1 + s\lambda T - e^{-sL})}$$

där $e(t)$ är insignalen till regulatorn, dvs. reglerfelet, och $u(t)$ är regulatorns utsignal, dvs. styrsignalen.

a) Skriv regulatorn på tidsform, dvs. ange en differentialekvation som då den Laplacetransformeras ger $F(s)$ ovan.

(2p)

b) För att implementera regulatorn i en dator behöver vi tidsdiskretisera regulatorn ovan eftersom datorn bara läser av felet $e(t)$ och beräknar styrsignalen $u(t)$ vid diskreta tidpunkter. Vi betecknar med samplingsintervallet h och väljer h så att dödtiden L är en jämn multipel av h, dvs. $L = ch$, där c är ett heltal. Kalla styrsignalen efter k samplingar $u(kh)$, felet $e(kh)$. Kalla på samma sätt styrsignalen efter $k - 1$ samplingar för $u((k-1)h)$ och felet för $e((k-1)h)$. Bestäm $u(kh)$ som funktion av reglerfelet $e(kh)$ och tidigare styrsignaler och reglerfel. Ledning: Ett enkelt sätt att göra en tidsdiskretapproximation av en tidsderivata är

$$\dot{f}(t) \approx \frac{f(t) - f(t-h)}{h}.$$

(3p)

LYCKA TILL!

Lösningsförslag

1

a)

$$G_1(s) = \frac{0.1}{s+0.1} = \frac{1}{1+10s}$$
$$G_2(s) = \frac{10}{s+10} = \frac{1}{1+0.1s}$$

Tidskonstanten för G_1 är således 10 och för G_2 blir den 0.1. Stegsvar för 1:a ordningens system ges av

$$y(t) = K(1 - e^{t/T})$$

Därför måste vi ha $G_1 - d$ samt $G_2 - b$.

$$G_3(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{1}{1+10s} \cdot \frac{1}{1+0.1s} = \frac{100}{99} \cdot \frac{1}{1+10s} - \frac{1}{99} \cdot \frac{1}{1+0.1s}$$

Dvs vi ser att stegsvaret för G_3 helt domineras av G_1 bidraget, vilket är helt naturligt eftersom den långsammaste komponenten kommer att sätta begränsningar för hur snabbt det sammansatta systemet kan reagera. Där gäller att G_3 bäst beskrivs av stegsvaret i figur d. För G_4 kommer den snabba delen, dvs bidraget från $G_2/2$, snabbt att gå upp till 0.5, och sedan kommer bidraget från G_1 att långsamt närma sig 0.5. Dvs figuren i a) motsvarar bäst detta stegsvar.

b) P-regulator medför att

$$L(s) = \frac{K_p}{(s+0.1)(s+10)}$$

Det återkopplade systemets poler ges av

$$1 + L(s) = 0.$$

Detta medför att

$$s^2 + 10.1s + 1 + K_p = 0$$

Dvs $K_p = -1$ ger en pol i origo. Den återstående polen hamnar då i -10.1.

c) $G_1(s)$ är bäst att använda eftersom den beskriver den huvudsakliga dynamiken, se a).

2

a) Systemet beskrivs av

$$\alpha \dot{y}(t) + \beta y(t) = u(t),\ y(0) = 1.$$

Detta innebär att överföringsfunktionen ges av

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{\alpha s + \beta}.$$

En begränsad insignal ger upphov till en begränsad utsignal då alla poler ligger strikt vänster halvplan. $\alpha = 0$ medför direkt att utsignalen är direkt proportionell mot insignalen. I fallet då $\alpha \neq 0$ så ges polen av

$$s = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Begränsad insignal medför därför begränsad utsignal så länge

$$\frac{\beta}{\alpha} > 0.$$

Notera speciellt att $y(0)$ inte påverkar in/ut-signal stabiliteten.

b) $\alpha = \beta = 1$ och $u(t) = \sin(t) + \cos(2t),\ t \geq 0$. Systemet är stabilt. Vi vet att för linjära stabila system så gäller stationärt att en sinussignal in till systemet medför att utsignalen är en sinussignal med samma frakvens fast den är förstärkt och fasvriden. Förstärkning och fasvridning är frekvensberoende. Förstärkningen ges av

$$|G(j\omega)|$$

och fasvridningen av

$$\arg G(j\omega)$$

För linjära systemet så kan bidraget från två insignaler som adderats tilll varandra betraktas var för sig. Cosinustermen skriver vi om till en sinusterm på följande sätt $\cos(2t) = \sin(2t + \pi/2)$.

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$$
$$\arg G(j\omega) = -\arctan\omega$$
$$|G(j)| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \ \arg G(j) = -\arctan 1 = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}$$
$$|G(2j)| = \frac{1}{\sqrt{5}}, \ \arg G(2j) = -\arctan 2 \approx -1.11 \text{ rad}$$

Detta medför att utsignalen stationärt blir

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{\sqrt{5}}\sin(2t + \pi/2 - 1.11).$$

3

a) Vi har att

$$G(s) = \frac{K}{1+sT}e^{-sL},$$
$$G_{ry}(s) = \frac{1}{1+s\lambda T}e^{-sL}.$$

Dessutom gäller att

$$G_{ry}(s) = \frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)}.$$

Detta medför att

$$G_{ry}(s) = F(s)G(s)(1 - G_{ry}(s)),$$

vilket ger

$$F(s) = \frac{G_{ry}(s)}{G(s)(1-G_{ry}(s))} = \frac{1+sT}{K(1+s\lambda T - e^{-sL})}.$$

b)

$$G_{ry}(s) = \frac{1}{1+s\lambda T}e^{-sL} = \frac{1}{1+sT_2}e^{-sL}.$$

Dvs tidskonstanten T_2 ökar då λ ökar vilket innebär att systemet följer börvärdesändringar långsammare.

c) $L = 0$ innebär att

$$F(s) = \frac{1+sT}{K(1+s\lambda T-1)} = \frac{1+sT}{s\lambda KT},$$

vilket är en PI-regulator.

d)

$$S(s) = \frac{1}{1+F(s)G(s)} = \frac{s\lambda T}{1+s\lambda T}$$

$$|S(j\omega)| = \frac{\omega\lambda T}{\sqrt{1+(\omega\lambda T)^2}}$$

Dvs för små ω gäller

$$|S(j\omega)| \approx \omega\lambda T.$$

För stora ω gäller

$$|S(j\omega)| \approx 1.$$

Vi ser här att om vi ökar λ så kommer också lågfrekventa störningar att påverka utsignalen mer.

4

a)

$$\frac{E(s)}{V(s)} = -\frac{1}{1+F(s)G(s)}$$

$$k.f. = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) \text{ (om gränsvärdet existerar)}$$

$$V(s) = \frac{v_0}{s} \Rightarrow E(s) = -\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+K(1+\frac{1}{sT})\cdot\frac{s}{(s+1)^3}}\frac{v_0}{s} = -\underline{\underline{\frac{v_0}{1+K/T}}}$$

Derivering hos processen kancelleras av integralverkan hos regulatorn.

b)

$$|F(j\omega_c)||G(j\omega_c)| = 1 \qquad \varphi_m = 180^\circ + \arg F(j\omega_c) + \arg G(j\omega_c)$$

$$\arg F(j\omega_c) = -90^\circ + \arctan(\omega_c T) = \varphi_m - 180^\circ - (90^\circ - 3\arctan\omega_c)$$

$$\Longrightarrow$$

$$\underline{\underline{T = 0.45}}$$

$$|F(j\omega_c)| = \frac{K}{\omega_c T}\sqrt{1 + (\omega_c T)^2} = \frac{1}{|G(j\omega_c)|} = \frac{(1 + \omega_c{}^2)^{\frac{3}{2}}}{\omega_c}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\underline{\underline{K = 2.18}}$$

5

a) Från Newtons lag för roterande system vet vi att ändringen av rörelsemängdensmoment per tidsenhet är lika med drivande moment minus belastande moment.

$$J\ddot{\theta}(t) = T_d(t) - k\theta(t) - d\dot{\theta}(t)$$

där $T_d(t) = K_i i(t)$ är det drivande momentet.

$$J\ddot{\theta}(t) + d\dot{\theta}(t) + k\theta(t) = K_i i(t)$$

Laplacetransformering ger

$$\frac{\Theta(s)}{I(s)} = \frac{K_i}{Js^2 + ds + k} = \frac{0.05}{0.01s^2 + 0.1s + 10} = \frac{5}{s^2 + 10s + 1000}$$

b) Pröva med en P-regulator.

$$F(s) = K_p \qquad \Longrightarrow \qquad L(s) = \frac{5K_p}{s^2 + 10s + 1000}$$

Då $K_p > 0$ gäller:

$$|L(j\omega)| = \frac{5K_p}{\sqrt{(1000-\omega^2)^2 + 100\omega^2}}$$

Så länge vi är i första eller fjärde kvadranten gäller (tänk på att arctan returnerar ett tal mellan $-\pi/2$ och $\pi/2$)

$$\arg L(j\omega) = -\arctan(\frac{10\omega}{1000-\omega^2})$$

Per definition gäller att

$$|L(j\omega_c)| = 1.$$

Kravet på 65 graders fasmarginal medför att

$$\arg L(j\omega_c) = -115°.$$

Vilket medför att vi måste lösa (tänk på att vi är i tredje kvadranten)

$$-\arctan(\frac{10\omega_c}{1000-{\omega_c}^2}) = -115° + 180°.$$

Detta löses enklast numeriskt, vilket ger $\omega_c \approx 34.1$ rad/s.

Bestäm nu K_p så att

$$K_p = \frac{\sqrt{(1000-{\omega_c}^2)^2 + 100{\omega_c}^2}}{5} \approx 75.6$$

6

a)

$$K(1 + s\lambda T - e^{-sL})U(s) = (1+sT)E(s)$$

$$\Longrightarrow$$

$$(1 + s\lambda T - e^{-sL})U(s) = \frac{1}{K}(1+sT)E(s)$$

$$\Longrightarrow$$

$$\lambda T\dot{u}(t) + u(t) - u(t-L) = \frac{1}{K}e(t) + \frac{T}{K}\dot{e}(t)$$

b)

$$u(t) = u(t-L) - \lambda T\dot{u}(t) + \frac{1}{K}e(t) + \frac{T}{K}\dot{e}(t)$$

$$\dot{u}(t) \approx \frac{u(t)-u(t-h)}{h},\ \dot{e}(t) \approx \frac{e(t)-e(t-h)}{h}.$$

Sätt nu in approximationerna i differentialekvationen.

$$u(t) = u(t-L) - \lambda T(\frac{u(t)-u(t-h)}{h}) + \frac{1}{K}e(t) + \frac{T}{K}(\frac{e(t)-e(t-h)}{h})$$

$$\Longrightarrow$$

$$u(t) = \frac{h}{h-\lambda T}(u(t-L) + \frac{\lambda T}{h}u(t-h) + \frac{h+T}{Kh}e(t) - \frac{T}{Kh}e(t-h))$$

Vi byter nu beteckningar genom att låta $t = kh$, och $L = ch$.

$$u(kh) = \frac{h}{h-\lambda T}(u((k-c)h) + \frac{\lambda T}{h}u((k-1)h) + \frac{h+T}{Kh}e(kh) - \frac{T}{Kh}e((k-1)h))$$

Ovanstående differensekvation kan enkelt programmeras in i en dator som på sätt kan implementera den önskade reglerfunktionen.