Reglerteknik M3

Tentamen 2004-08-18

Tid: 8:45-12:45 Lokal: V-huset

Kurskod: ERE031

Lärare: Knut Åkesson, tel 0701-749525

Tentamen omfattar 6 uppgifter med totalt 30 poäng, där betyg tre fordrar 12 poäng, betyg fyra 18 poäng och betyg fem 24 poäng. Lösningar och svar till alla uppgifter ska vara klart motiverade.

Tentamenresultat anslås senast den *6 september* kl 12:30 på avdelningens anslagstavla. *Granskning* av rättning sker den *6 och 7 september* kl 12:30 – 13:00 på avdelningen.

Tillåtna hjälpmedel:

- Formelsamlingen till Reglerteknikens grunder
- Bodediagram
- Beta och Physics handbook, TEFYMA
- Valfri kalkylator med rensat minne, ej handdator.

Inga anteckningar är tillåtna!

Avdelningen för reglerteknik och automation
Institutionen för signaler och system
Chalmers tekniska högskola

1

Komplementära känslighetsfunktionen $T(s)$ för ett system ges av

$$T(s) = \frac{100}{s^2 + 13s + 100}$$

a) Bestäm systemets kretsöverföring $L(s)$.

(2p)

b) Bestäm bandbredden hos $T(s)$.

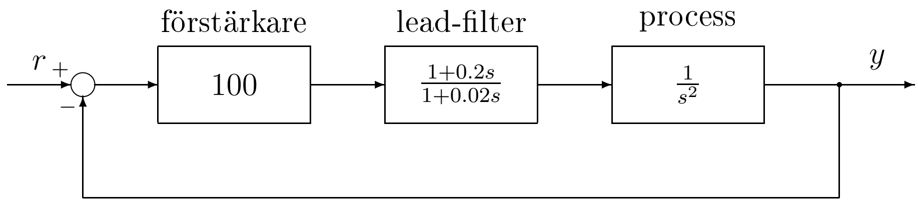
(2p)

c) Låt kretsöverföringen vara produkten av regulatorns och processens överföringsfunktioner. Vad blir den komplementära känslighetsfunktionen om förstärkningen i regulatorn dubbleras (allt annat oförändrat)?

(1p)

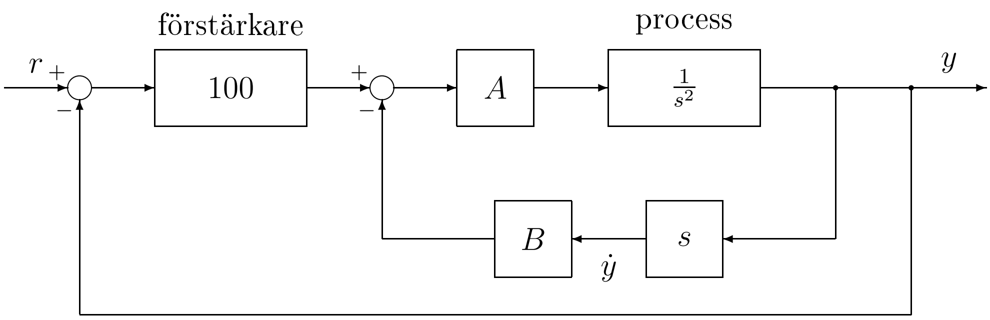
2

Ett lead-filter har designats för att styra en process. Ett blockschema över processen och regulatorn finns i figur 1 nedan.



Figur 1: Blockschemat med lead-filtret som regulator.

Av en händelse finns det redan två givare tillhands i processen där den ena mäter $y(t)$ och den andra $\dot{y}(t)$. Vi vill utnyttja att vi direkt kan mäta $\dot{y}(t)$ och vill därför implementera en regulator för processen enligt figur 2 nedan.



Figur 2: Blockschemat med modifierat reglersystem där vi direkt kan mäta $\dot{y}(t)$.

a) Bestäm fasmarginal och överkorsningsfrekvens för systemet i figur 1.
(3p)

a) Bestäm konstanterna A och B så att systemen i figur 1 och figur 2 får samma fasmarginal och överkorsningsfrekvens.
(2p)

3

Betrakta följande differentialekvation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x^3 - xu = 0$$

a) Inför tillstånden $x_1 = x$ och $x_2 = \frac{dx}{dt}$ och skriv om differentialekvationen på tillståndsform.
(2p)

b) Ange samtliga stationära punkter då $u = u_0$.
(1p)

c) Linjärisera systemet kring jämviktspunkten $(x_1, x_2, u)_0 = (1, 0, 1)$.
(2p)

4

Du har konstruerat ett aktivt stötdämparsystem för en bil. Det går ut på att ersätta fjädrarna och stötdämparna i bilen med ett hydraulservo, vilket ger lagom kraft nedåt för att hålla bilen upprätt och göra färden komfortabel. Kraften i servot regleras av en regulator, som mäter den aktuella höjden h på fjädringen och försöker hålla den konstant kring referensvärdet (som sätts till 0). Reglersystemet kan ses i figur 4. Hydraulservot beskrivs av

$$G_{\text{servo}}(s) = \frac{1}{s/10 + 1}$$

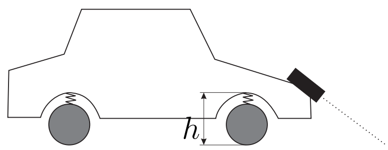
och bilen beskrivs av

$$G_{\text{bil}}(s) = \frac{1}{s+1}.$$

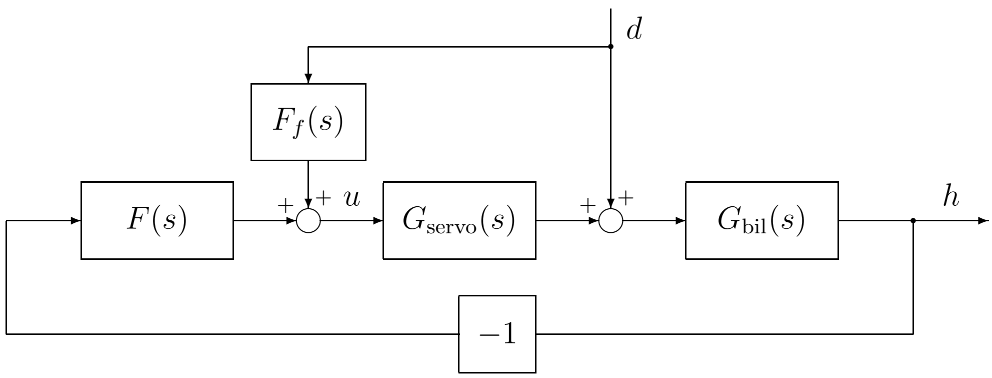
Regulatorn $F(s)$ ges av

$$F(s) = 2(\frac{3}{s} + 1)$$

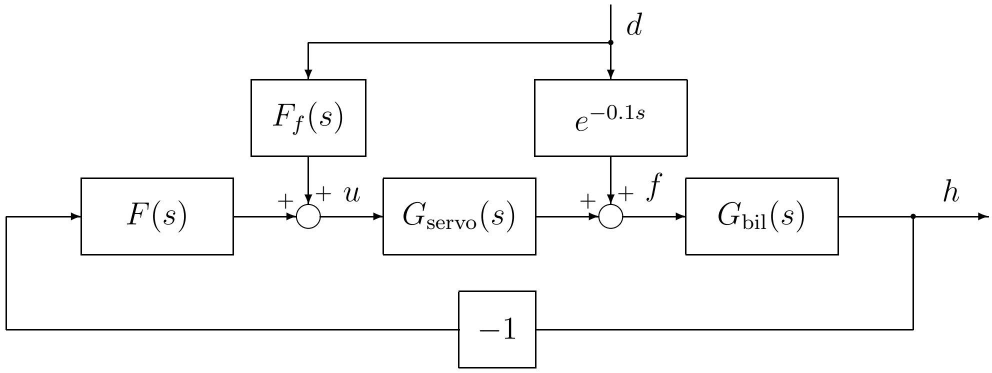
Vägens höjdförändringar kan ses som en laststörning d på processen $G_{\text{servo}}(s)$.



Figur 3: Bilen med det aktiva stötdämparsystemet.



Figur 4: Blockschema för stötdämparsystemet i a) uppgiften.



Figur 5: Det modifierade blockschemat för stötdämparsystemet med fördröjning enligt b) uppgiften.

a) För att förbättra egenskaperna på ojämna vägar har en laseravståndsmätare installerats längst fram på bilen (se figur 3). Denna mätare gör att vi kan mäta störningen d innan den slår igenom i bilen, vilket gör att vi kan konstruera en framkoppling $F_f(s)$. Hur skall $F_f(s)$ väljas för att störningen inte skall synas alls i utsignalen h?

(2p)

b) I själva verket fungerar lasermätningen så bra att den mäter störningen d 0.1 sekunder *innan* den slår igenom i bilen. Blockschemat förändras nu som i figur 5. Hur ska kompenseringen $F_f(s)$ ändras så att störningen d återigen inte slår igenom i utsignalen h?

(1p)

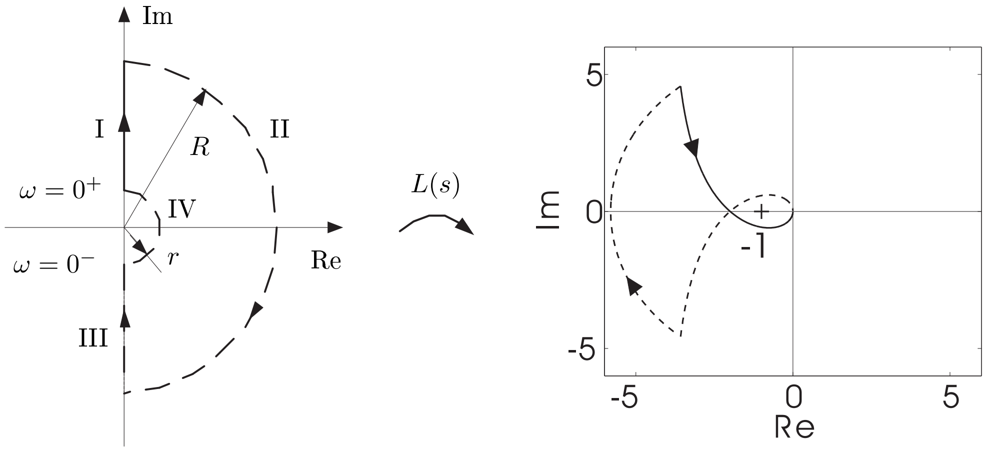
c) Antag att $F_f(s)$ inte ändras som i b) utan förblir som i a). Varför kommer en störning med frekvensen $\omega = \frac{\pi}{0.1}$ att påverka bilen extra mycket?

(2p)

5

I figur 6 nedan ses till vänster Nyquists kontur som omsluter högra halvplanet då $R \to \infty$ och $r \to 0$. Till höger den avbildning $L(s)$ som erhålls då s genomlöper Nyquists kontur i medurs riktning. $L(s)$ har en pol i strikt höger halvplan, en pol i origo samt ett nollställe i strikt vänster halvplan. $L(s)$ återkopplas med negativ enhetsåterkoppling så att det slutna systemet blir

$$G(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}.$$



Figur 6: Till vänster Nyquists kontur och till höger avbildningen $L(s)$ då Nyquists kontur genomlöps i medurs riktning.

Avgör om det slutna systemet är stabilt.

(3p)

6

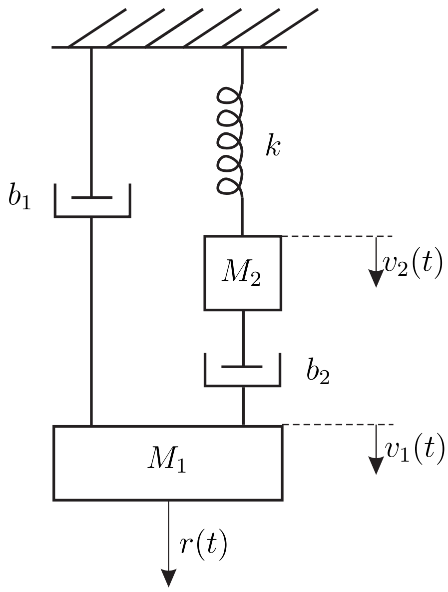
I figur 7 visas ett mekaniskt system som består av två massor M_1 och M_2, två viskösa dämpare med dämpkonstaner b_1 och b_2, en fjäder med fjäderkonstant k samt en pålagd kraft $r(t)$. I figur 7 är v_1 och v_2 hastigheterna för de två massorna. I figur 8 visas en elektrisk krets med en strömgenerator som genererar strömmen $r(t)$. R_1 och R_2 är två resistanser, C_1 och C_2 är två kapacitanser och L en induktans. I figur 8 betecknar $v_1(t)$ och $v_2(t)$ två spänningar. En intressant egenskap för dessa två system är att trots att de är två helt olika typer av system så har de liknande matematisk struktur.

a) Betrakta det mekaniska systemet och bestäm överföringsfunktionen från kraften r till hastigheten v_1.

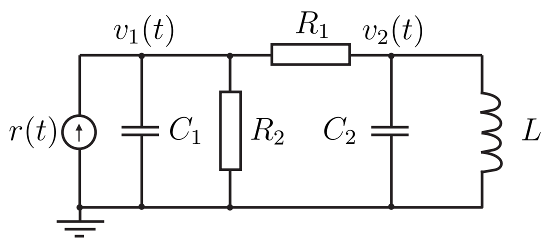
(4p)

b) Betrakta det elektriska systemet och bestäm överföringsfunktionen från strömmen r till spänningen v_1.

(3p)



Figur 7: Ett mekaniskt system.



Figur 8: Ett elektriskt system.

LYCKA TILL!

1) a) $T(s) = \dfrac{L(s)}{1+L(s)}$, $L(s) = \dfrac{B(s)}{A(s)}$ $\Rightarrow$ $T(s) = \dfrac{B(s)}{A(s)+B(s)}$

$$T(s) = \frac{100}{s^2+13s+100} \Rightarrow \begin{cases} B(s) = 100 \\ A(s) = s(s+13) \end{cases} \Rightarrow L(s) = \frac{100}{s(s+13)}$$

b) bandbredden ω_b definieras av $\dfrac{|G(j\omega_b)|}{|G(j\cdot 0)|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Bandbredden hos $T(s)$ är därför det ω_b då

$$\frac{|T(j\omega_b)|}{|T(j\cdot 0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad . \quad T(j\cdot 0) = 1 .$$

$$|T(j\omega_b)| = \frac{|100|}{|-\omega_b^2 + 13j\omega_b + 100|} = \frac{100}{\sqrt{(100-\omega_b^2)^2 + (13\omega_b)^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{10^4}{(100-\omega_b^2)^2 + (13\omega_b)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\cdot 10^4 = 10^4 - 200\omega_b^2 + \omega_b^4 + 169\omega_b^2$$

$$\Rightarrow \omega_b^4 - 31\omega_b^2 - 10^4 = 0 \Rightarrow \omega_b^2 = \frac{31}{2} (\pm) \sqrt{\left(\frac{31}{2}\right)^2 + 10^4} \approx 116,7$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\omega_b \approx 10.8}}$$

c) $L'(s) = 2\cdot L(s) \Rightarrow T'(s) = \dfrac{L'(s)}{1+L'(s)} = \dfrac{2L(s)}{1+2L(s)} = \underline{\underline{\dfrac{200}{s^2+13s+200}}}$

2) a) $L(s) = \dfrac{100}{s^2}\, \dfrac{1+0,2s}{1+0,02s} = 100 \cdot \dfrac{1+\frac{s}{5}}{1+\frac{s}{50}} \cdot \dfrac{1}{s^2}$

$|L(j\omega_c)| = 1$. Lös genom att rita bodediagram eller lös numeriskt.

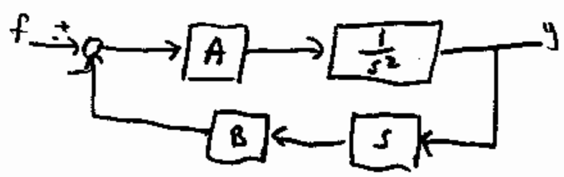
$\Rightarrow \omega_c \approx 20$

$\arg L(j\omega_c) = -180° + \arctan(0,2\omega) - \arctan(0,02\omega)$

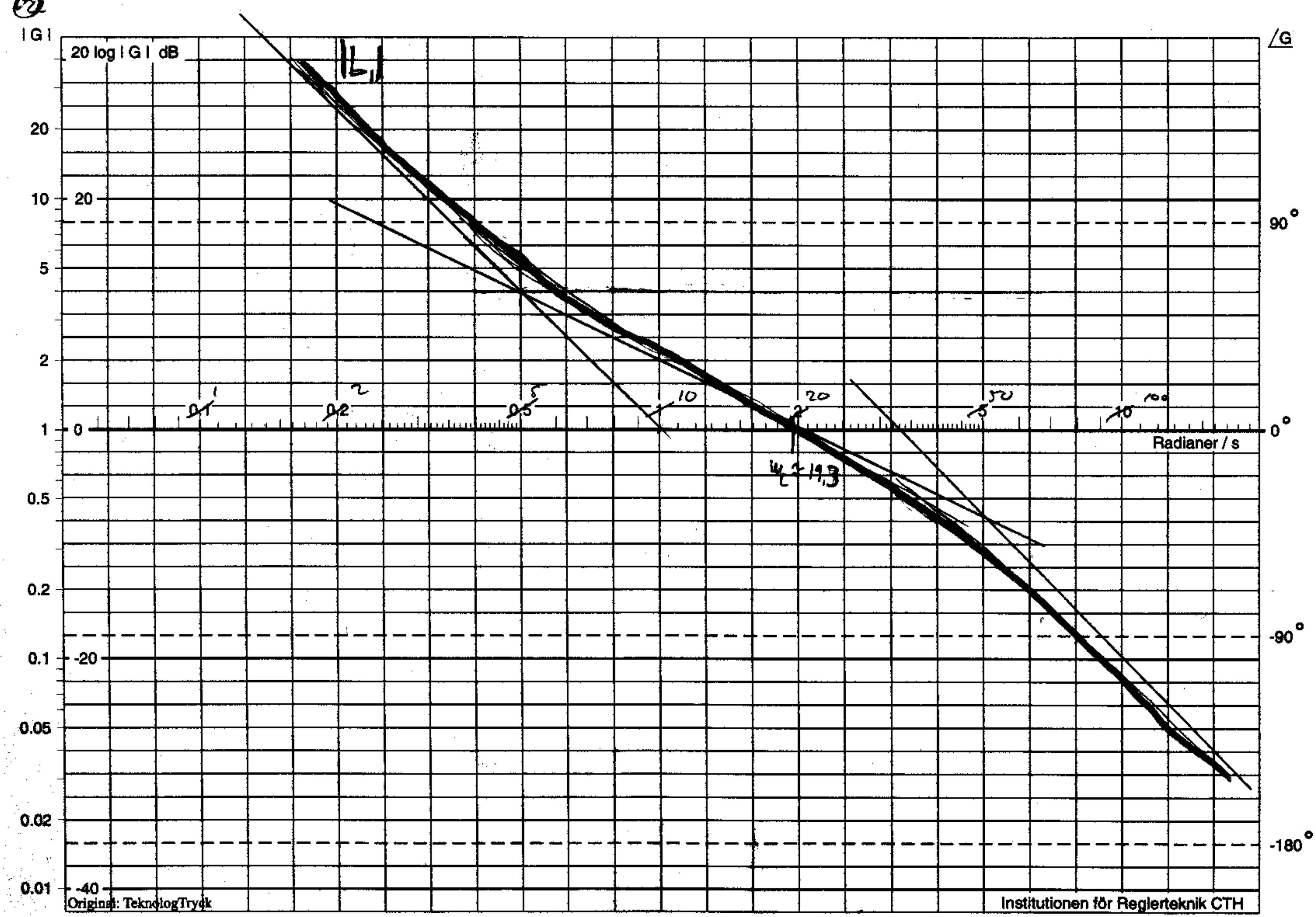
$\Rightarrow \arg L(j20) = -126°$ $\Rightarrow \varphi_m = 54°$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\begin{cases} \varphi_m = 54° \\ \omega_c = 20 \end{cases}}}$$

b) Betrakta den inre återkopplingen.



$$\Rightarrow G_{fy} = \frac{\frac{A}{s^2}}{1+\frac{AB}{s}} = \frac{A}{s(s+AB)}$$



|G|
20 log |G| dB
|L|
∠G
20
10
20
5
2
1
0
0.5
0.2
0.1
-20
0.05
0.02
0.01
-40
90°
0°
-90°
-180°
0.1
1
0.2
2
0.5
5
1
10
2
20
5
50
10
100
$\omega_c = 14.3$
Radianer / s
Original: TeknologTryck
Institutionen för Reglerteknik CTH

2b/ $G_{fy} = \frac{A}{s(s+AB)} \Rightarrow L(s) = \frac{100A}{s(s+AB)}$

Vi ska bestämma A och B så att ($\omega_c \approx 20$)

$$\begin{cases} |L(j\cdot 20)| = 1 \\ \arg L(j\cdot 20) = -126^\circ \end{cases}$$

$\arg L(j\cdot 20) = -90^\circ - \arctan\left(\frac{20}{AB}\right) = -126^\circ \Rightarrow \arctan\left(\frac{20}{AB}\right) = 36^\circ$

$\Rightarrow AB = \frac{20}{\tan(36^\circ)} \approx \underline{\underline{27.5}}$

$|L(j\cdot 20)| = \frac{100A}{20\sqrt{20^2+27.5^2}} = 0.1469A = 1 \Rightarrow \underline{\underline{A = 6.8}} \Rightarrow \underline{\underline{B = 4.04}}$

3/ $\frac{d^2x}{dt^2} + x^3 - x\cdot u = 0$

a/ $\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x} = x_2 \equiv f_1 \\ \dot{x}_2 = \ddot{x} = x\cdot u - x^3 = x_1 u - x_1^3 \equiv f_2 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 u - x_1^3 \end{cases}}}$

b/ $u = u_0$. Bestäm stationärpunkterna. (stationärpunkter då $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$)

$\begin{cases} 0 = x_2 \\ 0 = x_1 u_0 - x_1^3 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 0$ eller $u_0 - x_1^2 = 0 \Rightarrow x_1 = \pm\sqrt{u_0}$

Dvs. vi har en stationärpunkt då $x_2 = 0$ och $x_1 = 0$ eller $x_1 = \pm\sqrt{u_0}$.

c/ $\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0 & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1 & \frac{\partial f_1}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = u - 3x_1^2 & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0 & \frac{\partial f_2}{\partial u} = x_1 \end{cases}$

$\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{x_0,u_0} = 1 \qquad \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{x_0,u_0} = 1-3 = -2 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial u} = 1$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\begin{bmatrix} \Delta\dot{x}_1 \\ \Delta\dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u}}$$

4/ a) $G_{dh} = \dfrac{F_f(s)\cdot G_{servo}(s) + 1}{1 + F(s)G_{servo}(s)G_{bil}(s)}$

Vi vill att $G_{dh} = 0 \Rightarrow F_f(s)G_{servo}(s) + 1 = 0 \Rightarrow F_f(s) = \dfrac{-1}{G_{servo}(s)}$

$G_{servo}(s) = \dfrac{1}{s/10+1} \Rightarrow \underline{\underline{F_f(s) = -(s/10+1)}}$

$F_f(s)$ är stabil så den är lämplig att implementera.

b) $G_{dh} = \dfrac{F_f \cdot G_{servo} + e^{-0.1s}}{1 + F\,G_{servo}\cdot G_{bil}} \Rightarrow \underline{\underline{F_f(s) = -e^{-0.1s}(s/10+1)}}$

Går också bra att implementera. Fast det hade inte funkat om lasern hade varit för långsam istället för för snabb.

c) $G_{df} = -(s/10+1)\cdot\dfrac{1}{s/10+1} + e^{-0.1s} = -1 + e^{-0.1s}$

Betrakta $|G_{df}| = |-1 + e^{-0.1s}| \leq |-1| + |e^{-0.1s}| = 2$

För $\omega = \frac{\pi}{0.1}$ gäller att $\left|G_{df}\left(\frac{\pi}{0.1}j\right)\right| = \left|-1 + e^{-\pi i}\right| = 2$

dvs vi har maximal förstärkning av störningar av denna frekvens. Den maximala förstärkningen är 2ggr.

5/ $Z = P + N$

$\begin{cases} Z: \text{Antalet nollställen i HHP för } 1+L(s) \\ P: \text{Antalet poler i HHP för } L(s) \\ N: \text{Antalet medurs varv runt } -1. \end{cases}$

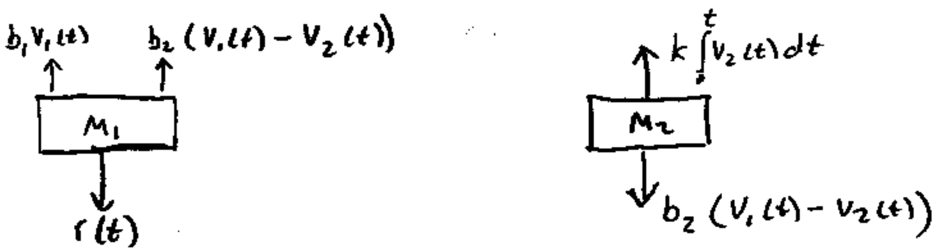
Z: sökt

P: givet -1

N: Ur figur: -1

$\Rightarrow Z = 1 - 1 = 0 \Rightarrow$ Det återkopplade systemet saknar poler i VHP $\Rightarrow$ stabilt system.

6/ a/



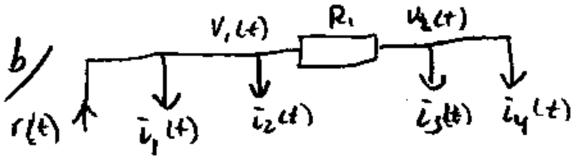
$$F = m\cdot a \Rightarrow \begin{cases} M_1 \cdot s \cdot V_1(s) = R(s) - b_1 V_1(s) - b_2(V_1(s) - V_2(s)) & \text{I} \\ M_2 \cdot s \cdot V_2(s) = b_2(V_1(s) - V_2(s)) - k \cdot \dfrac{V_2(s)}{s} & \text{II} \end{cases}$$

Lös ut V_2 ur II $\Rightarrow V_2(s) = \dfrac{b_2}{M_2 \cdot s + b_2 + \frac{k}{s}} \cdot V_1(s)$

Sätt in i I: $\left[M_1 s + b_1 + b_2 - \dfrac{b_2^2}{M_2 s + b_2 + \frac{k}{s}}\right] \cdot V_1(s) = R(s)$

$$\Rightarrow \frac{V_1(s)}{R(s)} = \underline{\underline{\frac{M_2 s^2 + b_2 s + k}{(M_1 s + b_1 + b_2)(M_2 s^2 + b_2 s + k) - b_2^2 s}}}$$

b/



$$\begin{cases} V_2(s) = s \cdot L \cdot I_4(s) = \dfrac{1}{sC_2} \cdot I_3(s) & \text{A} \\ I_3(s) + I_4(s) = \dfrac{V_1(s) - V_2(s)}{R_1} & \text{B} \\ V_1(s) = \dfrac{1}{sC_1} I_1(s) = R_2 \cdot I_2(s) & \text{C} \\ R(s) = I_1(s) + I_2(s) + I_3(s) + I_4(s) & \text{D} \end{cases}$$

D $\Rightarrow R(s) = sC_1 V_1(s) + \dfrac{V_1(s)}{R_2} + \dfrac{V_1(s)}{R_1} - \dfrac{V_2(s)}{R_1}$

A+B $\Rightarrow \left(sC_2 + \dfrac{1}{sL}\right) V_2(s) = \dfrac{V_1(s) - V_2(s)}{R_1} \Rightarrow V_2(s) = \dfrac{\frac{1}{R_1}}{\left(sC_2 + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL}\right)} V_1(s)$

$$\Rightarrow \left[C_1 \cdot s + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{\left(\frac{1}{R_1}\right)^2}{C_2 s + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL}}\right] V_1(s) = R(s).$$

$$\Rightarrow \frac{V_1(s)}{R(s)} = \underline{\underline{\frac{C_2 s^2 + \frac{1}{R_1} s + \frac{1}{L}}{\left(C_1 s + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\left(C_2 s^2 + \frac{1}{R_1} s + \frac{1}{L}\right) - \left(\frac{1}{R_1}\right)^2}}}$$

Notera att vi har samma struktur här som i det mekaniska fallet.