1a. Samplingsfrekvens > 2*högsta frekvensen hos $x(t)$ (Samplingsteoremet)

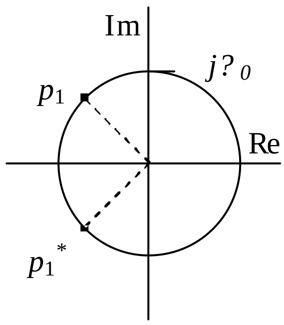
? s > 2*40p = 2 p *40 = 80p Svar: ? s > 80p [rad/s] eller
$f_s > 40$ [Hz]

1b. $x_1 \leftrightarrow X_c$ Två perioder i intervallet, k=2 komponent dominerar. Har DC-komponent.

$x_2 \leftrightarrow X_a$ Har DC-komponent. Lågt frekvensinnehåll .

$x_3 \leftrightarrow X_b$ Ingen DC-komponent, Sinusformat signal, Två perioder i intervallet betyder k=2 .

2. Poler ur tabell eller från egenskaper hos Butterworth LP-filter



$$p_1 = \frac{w_0}{\sqrt{2}}(-1+j)$$

$$H(s) = \frac{K}{(s-p_1)(s-p_1^*)} = \frac{K}{s^2 - s(p_1+p_1^*) + p_1 p_1^*}$$

$$H(s) = \frac{K}{s^2 + s\sqrt{2}w_0 + w_0^2}$$

Maximal först. = 1 (0 dB) vid låga frekv. för ett LP-filter

$$\left|H(s)\right|_{s=jw} = \frac{K}{w_0^2} = 1 \text{ då } w \to 0, \text{ vilket ger } K = w_0^2$$

Impulssvar: Invers Laplacetransf. av $H(s)$

Metod 1. kvadratkomplettera nämnarpolynomet.

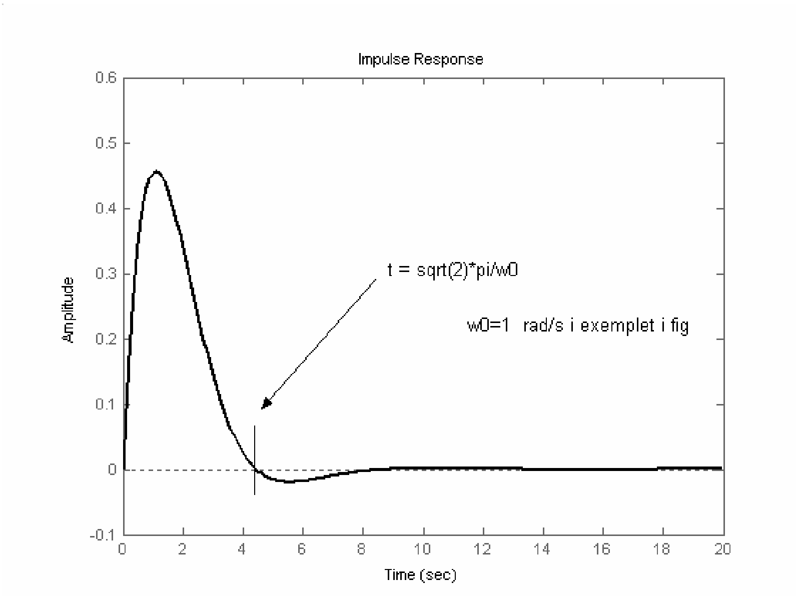
$$H(s) = \frac{w_0^2}{s^2 + s\sqrt{2}w_0 + w_0^2} = \frac{w_0^2}{\left(s+\frac{w_0}{\sqrt{2}}\right)^2 + w_0^2 - \left(\frac{w_0}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{w_0^2}{\left(s+\frac{w_0}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{w_0^2}{2}}$$

Använd transformparet $\frac{b}{(s+a)^2+b^2} \leftrightarrow e^{-at}\sin bt$

Impulssvar: $h(t) = \sqrt{2} w_0 e^{-\frac{w_0}{\sqrt{2}} t} \sin\left(\frac{w_0}{\sqrt{2}} t\right) u(t)$

Metod 2. Vanlig partialbråksuppdelning

$H(s) = \frac{A}{(s - p_1)} + \frac{B}{(s - p_1^*)} \leftrightarrow Ae^{p_1 t} + Be^{p_1^* t}$ skriv om med Eulers ekv $\Rightarrow h(t)$.



3. $x(t)$ periodisk. Fourierserie enligt Svärdströms Appendix A.

$$x(t) = \frac{4}{p^2}\left(\frac{\cos t}{1} + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} + \dots\right)$$

$x(t)$ innehåller signalkomponenter med frekvenser ?=1, 3, 5, ... rad/s
$y(t)$ innehåller signalkomponenter med samma frekvenser

Dessa frekvenskomponenter passerar ej det ideala bandpassfiltret.

$w(t) = 0$

4. **H_1:** $w(n) = \frac{1}{2}w(n-1) + 2x(n)$ z-transformera

$$W(z) = \frac{1}{2}z^{-1}W(z) + 2X(z) \Rightarrow H_1(z) = \frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

H_2: $h_2(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ med z-transform $H_2(z) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$

Både $H_1(z)$ och $H_2(z)$ har konvergensområde $|z| > 1/2$

a)

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) = \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)} = \frac{2}{1+\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{4}z^{-2}} = \frac{2}{1-\frac{1}{4}z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

skriv om som $Y(z)\left(1-\frac{1}{4}z^{-2}\right) = 2X(z)$ vilket ger <u>differensekvationen</u>

$y(n) - \frac{1}{4}y(n-2) = 2x(n)$ genom inv. z-transf.

b)

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) = \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)} = \frac{A}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} + \frac{B}{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

Partialbråksuppdelningen ger $A = B = 1$

$$H(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

Inv. z-transf av $H(z)$ (med $|z| > 1/2$) ger

$h(n) = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u(n)$ som är <u>impulssvaret</u>

5.

Systemets överföringsfunktion $H(z) = Z\{h(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\,z^{-n} = 1 + 2z^{-1} + z^{-2}$

Frekvenssvar, sätt $z = e^{j\Omega}$ (eller $z = e^{jwT_s}$)

$$H\left(e^{j\Omega}\right) = 1 + 2e^{-j\Omega} + e^{-j2\Omega} = e^{-j\Omega}\left(e^{j\Omega} + 2 + e^{-j\Omega}\right) = e^{-j\Omega} \quad 2\left(1 + \cos\Omega\right)$$

$$\left|H\left(e^{j\Omega}\right)\right| = 2\left(1 + \cos\Omega\right)$$

$$\angle H\left(e^{j\Omega}\right) = -\Omega$$

med $\Omega = wT_s$ där $w = [\text{rad/s}]$ och $f = \dfrac{w}{2p}$ $[\text{Hz}]$

$\left|H(f)\right| = 2\left(1 + \cos\left(2p\ f\ T_s\right)\right)$

Samplingsfrekvensen $f_s = \dfrac{1}{T_s} = 1000\,\text{Hz}$ motsvarar normerad samplingsfrekvens

$\Omega = \Omega_s = 2p$