Svar till Tentamen i EKS del B,EMI 190 –971219

1. (a) LP – nollställe i $z = -1$. Polerna "närmast låga frekvenser".
   (b) Flytta nollstället till $z = 1$.
   (c) $y''(t) + y(t) = x'(t)$
   (d) Välj $\Omega = 0$ i ITDFT: $X(e^{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = 0$, DC-nivå (medelnivå) noll.
   (e) Stegsvar=integralen av impulssvaret $\Rightarrow$ vänstra=stegsvar, högra=impulssvar.

2. (a) Impulssvaret $h[n] = \mathrm{sinc}(\pi(n-2)/8)/8$ för $n = 0, 1, 2, 3, 4$, $h[n] = 0$ för övrigt. $B(z) = 0.1125 + 0.1218z^{-1} + 0.125z^{-2} + 0.1218z^{-3} + 0.1125z^{-4}$.
   (b) Nollställe i $z_0 = re^{j\pi/4} \Rightarrow$ nollställen i z_0^*, $1/z_0$, $1/z_0^*$ pga linjär fas. Endast r är okänd. $B(z) = (1 - re^{j\pi/4}z^{-1})(1 - re^{-j\pi/4}z^{-1})(1 - \frac{1}{r}e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - \frac{1}{r}e^{-j\pi/4}z^{-1})$. Utveckla polynomet och sätt upp en ekvation i r genom att identifiera en av koefficienterna $\Rightarrow r = \sqrt{2}$ eller $1/\sqrt{2}$.

3. (a) $H(s) = \frac{\left(4+(3+s)^2\right)^2}{4\,(3+s)\left(1+(1+s)^2\right)}$
   (b) Slutvärdet av stegsvaret ges av DC förstärkningen $H(0) = 169/24$. Svaret i a) måste alltså inte transformeras för att svara på frågan. Alternativt kan också slutvärdesteoremet används.

4. (a) Periodisk signal

$$x(t) = \begin{cases} \sin(t) & 0 < t < T_p/2 \\ 0 & T_p/2 < t < T_p \end{cases}$$

där $T_p = 2\pi$. Utveckla $x(t)$ i en Fourierserie $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkt}$. Pga av filtret så behövs bara koefficienterna $a_0, a_1, a_2, a_{-1}, a_{-2}$. $a_0 = 1/\pi$, $a_1 = 1/4j$, $a_{-1} = a_1^* = -1/4j$, $a_2 = a_{-2} = -1/3\pi$. Inför $\tilde{x}(t) = 1/\pi + \frac{1}{4j}(e^{jt} - e^{-jt}) - \frac{1}{3\pi}(e^{2jt} + e^{-2jt}) = 1/\pi + \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{2}{3\pi}\cos(2t)$, den del av $x(t)$ upp till och med $k = \pm 2$. Utsignalen från filtret blir nu

$$y(t) = $$

$$1/\pi + \frac{|H(j1)|}{2}\sin(t + \arg(H(j1)) - \frac{2|H(j2)|}{3\pi}\cos(2t + \arg(H(j2)) \approx$$

$$1/\pi + \frac{3}{10}\sin(t - 0.628) - \frac{2}{15\pi}\cos(2t - 1.26).$$

   (b) $y[n] = y(T \cdot n)$, Fouriertransformen för $y(t)$ blir

$$Y(j\omega) =$$

$$2\delta(\omega) + \pi H(j1)\delta(\omega-1) + \pi H(-j1)\delta(\omega+1) - \frac{4}{3}H(j2)\delta(\omega-2) - \frac{4}{3}H(-j2)\delta(\omega+2).$$

Samplingstiden $T = \pi/1.2 \Rightarrow$ Nyquistfrekvensen blir $\omega_N = 1.2$. Den höga frekvensen kommer att vikas ner, aliasing. Använd vikningsformeln som relaterar den samplade signalens Fouriertransform till den kontinuerliga signalens transform. Om vi inskränker oss till intervallet $-\omega_N < \omega < \omega_N$ så ges termen för $k = 0$ nollskilt bidrag för DC-nivån och grundtonen – övertonen hamnar utanför intervallet För övertonen blir det istället $k = \pm 1$ (olika för den positiva och den negativa frekvensen) dvs $\delta(\omega + 2)$ hamnar på $\delta(\omega - 0.4)$ och $\delta(\omega - 2)$ hamnar på $\delta(\omega + 0.4)$. Låt $Y_d(e^{j\omega T})$ beteckna diskrets signalens Transform:

$$Y_d(e^{j\omega T}) =$$

$$\frac{2}{T}\delta(\omega)+\frac{\pi H(j1)}{T}\delta(\omega-1)+\frac{\pi H(-j1)}{T}\delta(\omega+1)-\frac{4H(j2)}{3T}\delta(\omega+0.4)-\frac{4H(-j2)}{3T}\delta(\omega-0.4)$$

$H(j1) = 0.6e^{-j\pi/5}$, $H(-j1) = 0.6e^{j\pi/5}$, $H(j2) = 0.2e^{-j2\pi/5}$, $H(-j2) = 0.2e^{j2\pi/5}$.

5. (a) Definition av DTFT $\Rightarrow$

$$D_h = \frac{j\frac{dX}{d\Omega}\big|_{\Omega=0}}{X(e^{j0})}$$

(b) $H(e^{j0}) = R(0)$,

$$\frac{dH}{d\Omega} = -jKe^{-j\Omega K}R(\Omega) + e^{-j\Omega K}\frac{dR(\Omega)}{d\Omega}$$

men eftersom $R(\Omega)$ är jämn så är $\frac{dR(\Omega)}{d\Omega}|_{\Omega=0} = 0$ och

$$D_h = j\frac{-jKe^{-j0}R(0)}{R(0)} = K.$$