Tentamen i Elektromagnetiska fält

2019-08-21, kl 14.00-18.00, Samhällsbyggnad – kurskod EEM 015

Hjälpmedel – teori	BETA
Hjälpmedel – räkneproblem	BETA, typgodkänd kalkylator, Formelsamling i Elektromagnetisk fält *utan* egna anteckningar
Besök	cirka kl 15.15 och 16.45
Förfrågningar	Tel. ankn. 6493, Simon Nilsson, Elektroteknik
Examinator	Thomas Rylander, Elektroteknik
Lösningar	På kurshemsidan 2019-08-21 kl 18.00
Granskning	2019-09-10 kl 12.00-13.00 i Landahlsrummet (Rakt ovanför Kajsabaren på våning 7)
Betygsgränser	Tentan 3: 25p; 4: 37p; 5: 48p. 10p/uppgift Bonuspoäng (från höstterminen 2018) får användas för uppgift 5. Max 10p per uppgift.
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

OBS! Tvådelad tentamen!

Teoriuppgift

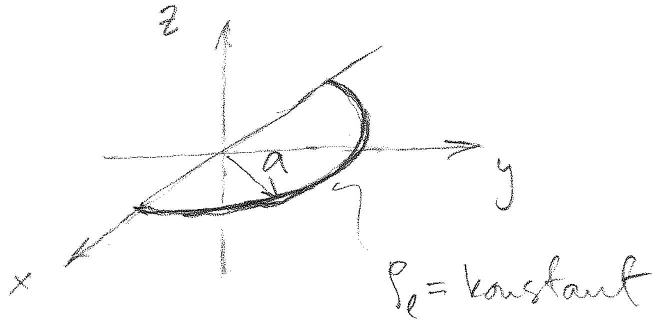
[Hjälpmedel: BETA]

1. Utgå från $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$ och $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$. Härled randvillkoren för tangentialkomponenten av $\vec{E}$-fältet och normalkomponenten av $\vec{D}$-fältet på en gränsyta mellan två olika material.

Räkneuppgifter:

[Hjälpmedel: BETA, typgodkänd kalkylator, formelsamling i Elektromagnetisk fältteori]

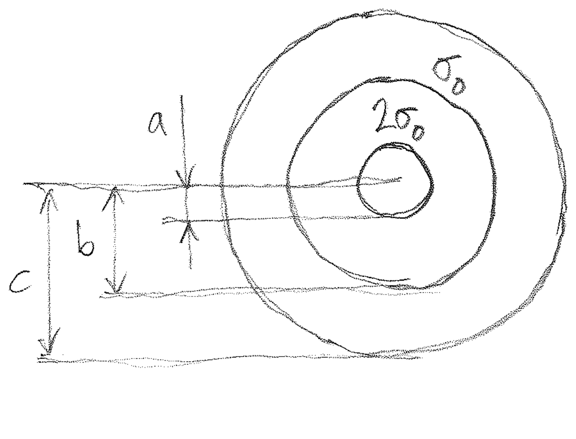
2. En linjeladdning med konstant laddningstäthet ρ_l är formad som en halvcirkelbåge med radien a så som figuren visar. Beräkna det elektriska fältet längs z-axeln.



3. En koaxialkabel med längden L har en innerledare med radien a. Ytterledarens innerradie är c, där $c > a$. Mellan innerledaren och ytterledaren finns två olika ledande material, där området $a < r < b$ har konduktiviteten $2\sigma_0$ och området $b < r < c$ har konduktiviteten σ_0.

   (a) Bestäm radien b så att det maximala elektriska fältet i området $a < r < b$ blir lika stort som det maximala elektriska fältet i området $b < r < c$. Observera att $a < b < c$. (5p)

   (b) Beräkna resistansen mellan innerledaren och ytterledaren. (5p)



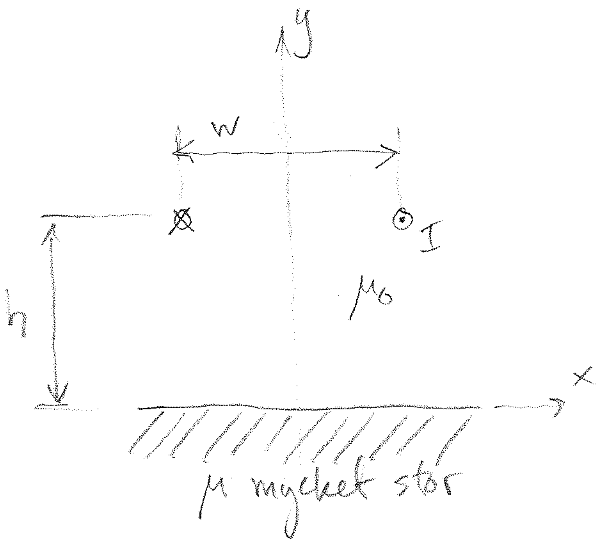
4. Två oändligt långa raka parallella strömförande ledare befinner sig på avståndet w från varandra och på höjden h över planet $y = 0$. Dessa två raka ledare för en likström I så som figuren nedan visar. Man kan tänka sig att de raka ledarnas ändar är ihopkopplade (i oändligheten) så att en sluten strömförande slinga bildas.

Området $y \leq 0$ upptas av ett magnetiskt material med mycket hög permeabilitet, vilket medför att randvillkoret för den magnetiska flödestätheten kan approximeras med $\hat{n} \times \vec{B} = \vec{0}$ på gränsytan $y = 0$. Denna situation visas i figuren nedan till vänster och motsvarande speglingsansats visas till höger.

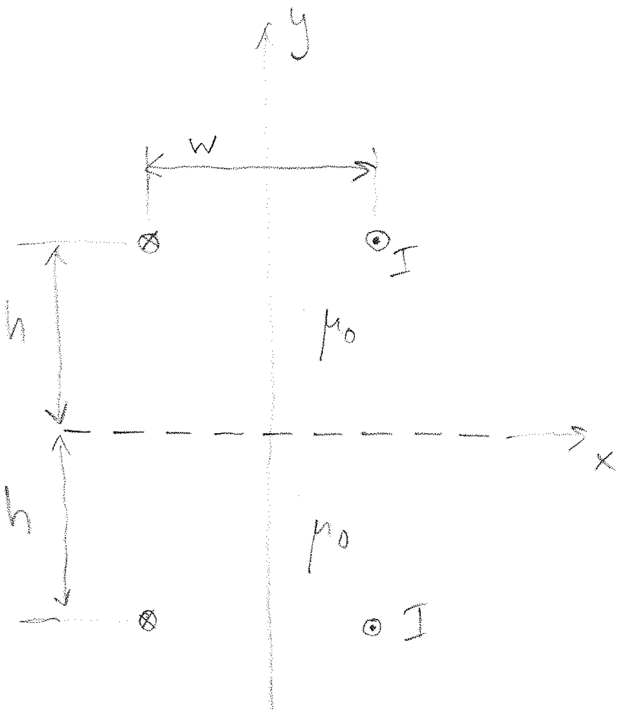
(a) Beräkna $\vec{B}(\vec{r})$ i planet $y = 0$ givet speglingsansatsen (figuren till höger). (4p)

(b) Visa att speglingsansatsen (figuren till höger) uppfyller randvillkoret $\hat{n} \times \vec{B} = \vec{0}$ på planet $y = 0$. (1p)

(c) Beräkna den totala kraften per längdenhet som verkar på den strömförande slingan (figuren till vänster). (5p)



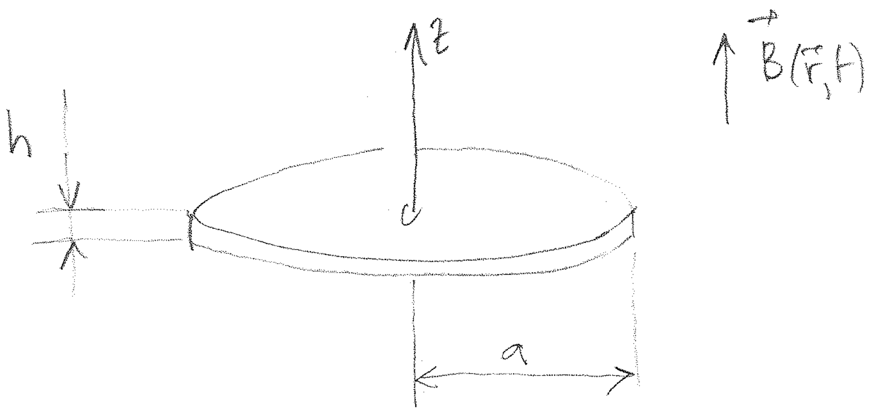
(ursprungligt problem)



(speglings-ansats)

5. En mycket tunn cirkulär skiva med radie a och tjocklek h är placerad i planet $z = 0$ så att dess mittpunkt sammanfaller med origo, vilket visas i figuren nedan. Skivan har ledningsförmågan σ och den befinner i ett område med den magnetiska flödestätheten $\vec{B}(\vec{r}, t) = \hat{z} B_0 \cos(\omega t)$, där denna flödestäthet är orsakad av en extern källa. Frekvensen ω är tillräckligt låg för att anta kvasi-stationära förhållanden och störningar i den externt orsakade flödestätheten kan anses mycket små. Beräkna tidsmedelvärdet av effektutvecklingen i den ledande skivan.

Obs! Denna uppgift är hämtad från listan över räkneproblem i kurs-PM.



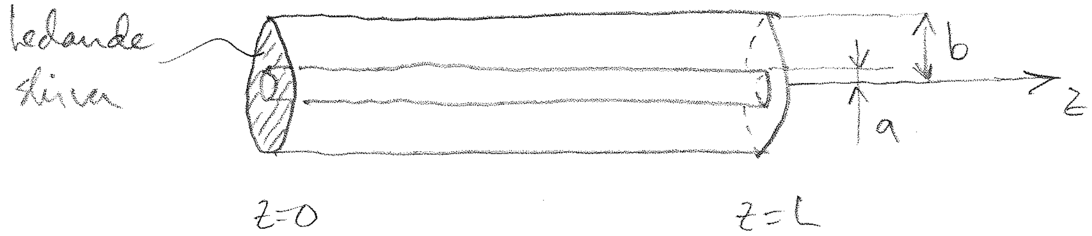
6. En koaxialkabel med längden L har en innerledare med radien a och en ytterledare med innerradien b, där $b > a$. Koaxialkabeln är kortsluten i planet $z = 0$ med en elektriskt ledande skiva. Den andra änden av koaxialkabeln är öppen och den sammanfaller med planet $z = L$. Det elektriska fältet mellan innerledare och ytterledare ges av

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{r} E_0 \frac{a}{r} \sin\left(\frac{\pi z}{2L}\right) \cos(\omega t)$$

då ändeffekter och läckfält vid $z = L$ försummas. I övrigt är det luft inuti koaxialkabeln mellan dess innerledare och ytterledare.

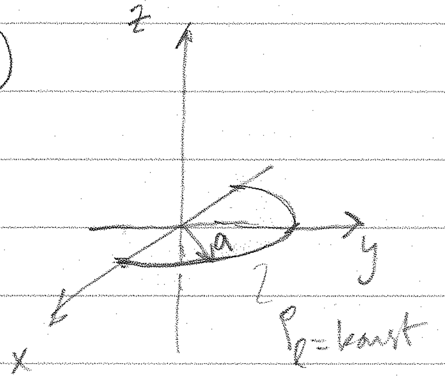
(a) Beräkna det magnetiska fältet $\vec{H}(\vec{r}, t)$ i området mellan innerledare och ytterledare, dvs det område som begränsas av $a < r < b$ och $0 < z < L$. (5p)

(b) Beräkna ytströmmen $\vec{J}_s(\vec{r}, t)$ på innerledarens yta $r = a$, ytterledarens inneryta $r = b$ och den kortslutande ledande skivan i planet $z = 0$. (5p)



ELEKTROMAGNETISKA FÄLT FÖR E2

(2)



$$\vec{r} = \hat{z}z$$

$$\vec{r}\,' = a(\hat{x}\cos\varphi' + \hat{y}\sin\varphi')$$

$$\vec{r}-\vec{r}\,' = -\hat{x}a\cos\varphi' - \hat{y}a\sin\varphi' + \hat{z}z$$

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \sqrt{(a\cos\varphi')^2 + (a\sin\varphi')^2 + z^2} = \sqrt{a^2+z^2}$$

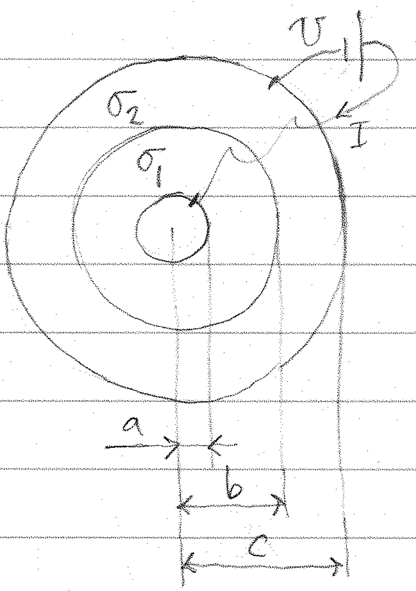
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\rho_\ell}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d\ell'$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\varphi'=0}^{\pi} \frac{\rho_\ell(-\hat{x}a\cos\varphi' - \hat{y}a\sin\varphi' + \hat{z}z)}{(a^2+z^2)^{3/2}}\,a\,d\varphi'$$

$$= \frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0(a^2+z^2)^{3/2}}\left(-\hat{x}a^2\int_{\varphi'=0}^{\pi}\cos\varphi'\,d\varphi' - \hat{y}a^2\int_{\varphi'=0}^{\pi}\sin\varphi'\,d\varphi' + \hat{z}az\int_{\varphi'=0}^{\pi}d\varphi'\right)$$

$$= \frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0(a^2+z^2)^{3/2}}\left(-\hat{y}\,2a^2 + \hat{z}\,\pi a z\right)$$

(3)



Kontinuitetsekvationen med symmetrin $\vec{J} = \hat{r}J_r(r)$ och cylindrisk integrationsyta ger

$$I = \oint_S \vec{J}\cdot d\vec{s} = J_r\,2\pi r L$$

$$\Rightarrow J_r(r) = \frac{I/L}{2\pi r}$$

Det elektriska fältet blir därmed

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{J}(\vec{r})}{\sigma(\vec{r})} = \begin{cases} \hat{r}\dfrac{I/L}{2\pi\sigma_1 r} & \text{då } a<r<b \quad (\text{omr. } 1) \\[2ex] \hat{r}\dfrac{I/L}{2\pi\sigma_2 r} & \text{då } b<r<c \quad (\text{omr. } 2) \end{cases}$$

Maximalt elektriskt fält i respektive område blir därmed

$$E_{r,max} = \begin{cases} \frac{I/L}{2\pi\sigma_1 a} & \text{för område } 1 \\ \frac{I/L}{2\pi\sigma_2 b} & \text{för område } 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E^{(1)}_{r,max} = E^{(2)}_{r,max} \Rightarrow \frac{1}{\sigma_1 a} = \frac{1}{\sigma_2 b} \Rightarrow b = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} a = 2a$$

(vilket kräver att $\sigma_1 > \sigma_2$ och $c > \sigma_1 a/\sigma_2$.)

Resistansen blir $R = U/I$ där

$$U = -\int_{L_{\ominus \to \oplus}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{r=a}^{c} \left((E_r(r)\hat{r}) \cdot (-\hat{r}\,dr) \right)$$

$$= \int_{r=a}^{b} \frac{I/L}{2\pi\sigma_1 r} dr + \int_{r=b}^{c} \frac{I/L}{2\pi\sigma_2 r} dr = \frac{I/L}{2\pi} \left(\frac{\ln(b/a)}{\sigma_1} + \frac{\ln(c/b)}{\sigma_2} \right)$$

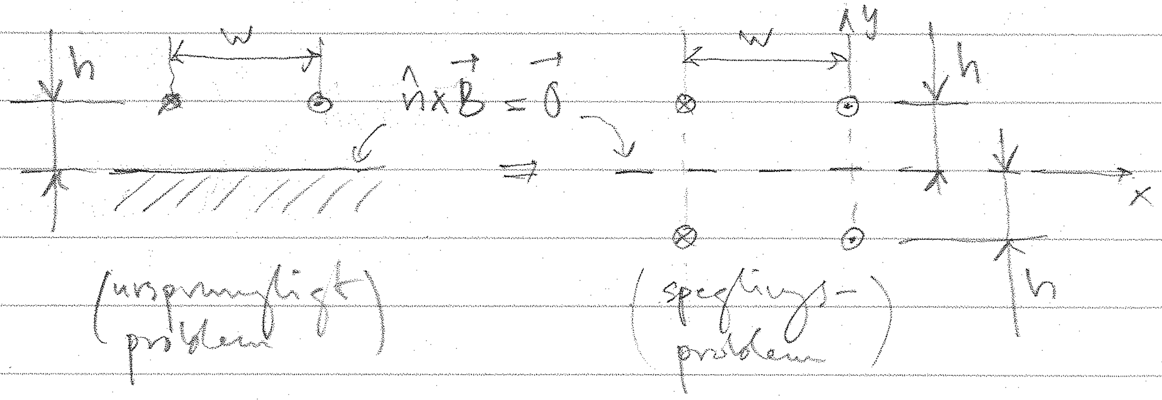
$$\Rightarrow R = \frac{1}{2\pi L} \left(\frac{\ln(b/a)}{\sigma_1} + \frac{\ln(c/b)}{\sigma_2} \right)$$

Med $\sigma_1 = 2\sigma_0$, $\sigma_2 = \sigma_0$ och $b = 2a$ så får man

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma_0 L} \ln\left(\frac{c}{\sqrt{2}a} \right)$$

där $c > 2a$.

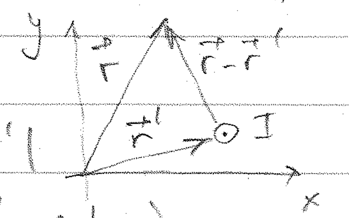
4



Magnetisk flödestäthet pga oändligt lång rak ledare ges av Ampères lag med cirkulär integrationskurva och symmetri ($\Rightarrow \vec B(\vec r) = \hat\varphi B_\varphi(r)$) enligt

$$\oint_L \vec B \cdot d\vec l = \int_{\varphi=0}^{2\pi} (\hat\varphi B_\varphi(r)) \cdot (\hat\varphi r d\varphi) = 2\pi r B_\varphi(r) = \mu_0 I_{omsl} = \mu_0 I$$

$$\Rightarrow \vec B = \hat\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\hat z \times (\vec r - \vec r')}{|\vec r - \vec r'|} \frac{\mu_0 I}{2\pi |\vec r - \vec r'|}$$



(pol. koord. m. källa i origo) (kart. koord. med godtycklig källpunkt $\vec r'$)

Kontroll av randvillkor i ansats till speglingsproblem ovan (ledarna till höger med $\vec r' = \hat y h$ och $\vec r' = -\hat y h$, samt $\vec r = \hat x x$)

$$\vec B(\vec r = \hat x x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \hat z \times \left(\frac{\hat x x - \hat y h}{x^2 + h^2} + \frac{\hat x x + \hat y h}{x^2 + h^2} \right)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\hat y 2x}{x^2 + h^2} \Rightarrow \hat n \times \vec B \Big|_{y=0} = \vec 0$$

(m. $\hat n = \hat y$)

Magnetisk kraft på högra delen av stången ges av

$$\vec{F}_{\odot} = (\hat{z}I) \times \left(\sum_{m=1}^{2} \frac{\mu_0 I_m}{2\pi} \frac{\hat{z} \times (\vec{r} - \vec{r}_m')}{|\vec{r} - \vec{r}_m'|^2} \right) L$$

(flödestäthet från spegelströmmarna)

$$= -\frac{\mu_0 I L}{2\pi} \sum_{m=1}^{2} I_m \frac{\vec{r} - \vec{r}_m'}{|\vec{r} - \vec{r}_m'|^2} = \left[\begin{array}{l} I_1 = I, \ \vec{r}_1' = -\hat{y}h \\ I_2 = -I, \ \vec{r}_2' = -\hat{x}w - \hat{y}h \\ \ \& \ \vec{r} = \hat{y}h \end{array} \right]$$

$$= -\frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi} \left(\frac{\hat{y}2h}{(2h)^2} - \frac{\hat{x}w - \hat{y}2h}{w^2 + (2h)^2} \right)$$

$$= \frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi} \frac{w}{w^2 + 4h^2} \left(\hat{x} - \hat{y} \frac{w}{2h} \right)$$

Pss blir kraften på den vänstra delen

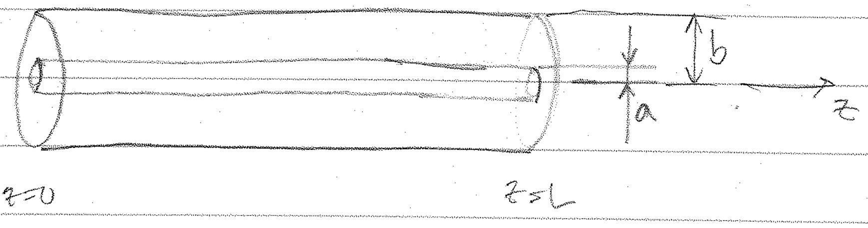
$$\vec{F}_{\otimes} = \frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi} \frac{w}{w^2 + 4h^2} \left(-\hat{x} - \hat{y} \frac{w}{2h} \right)$$

Den totala kraften är därmed

$$\vec{F} = \vec{F}_{\odot} + \vec{F}_{\otimes} = -\hat{y} \frac{\mu_0 I^2 L w^2}{2\pi (w^2 + 4h^2) h}$$

(5) Se övningsanteckningar

(6)



Det elektriska fältet i frekvensplanet är

$$\vec{E}(\vec{r}) = \hat{r} E_0 \frac{a}{r} \sin\left(\frac{\pi z}{2L}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{H} = -\frac{\nabla \times \vec{E}}{j\omega\mu_0} = -\frac{1}{j\omega\mu_0}\left(\hat{\varphi} \frac{\partial E_r}{\partial z}\right)$$

$$= \hat{\varphi}\, j \frac{E_0 a}{\omega\mu_0 r} \frac{\pi}{2L} \cos\left(\frac{\pi z}{2L}\right)$$

Ytströmmen blir därmed

$$\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H} = \begin{cases} \hat{z}\, j \frac{E_0}{\omega\mu_0} \frac{\pi}{2L} \cos\left(\frac{\pi z}{2L}\right) & \text{då } r=a \\ -\hat{r}\, j \frac{E_0 a}{\omega\mu_0 r} \frac{\pi}{2L} & \text{då } z=0 \\ -\hat{z}\, j \frac{E_0\, a}{\omega\mu_0 b\, 2L} \pi \cos\left(\frac{\pi z}{2L}\right) & \text{då } r=b \end{cases}$$

Motsvarande uttryck i tidsplanet ges av

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left\{ \vec{H}(\vec{r})\, e^{j\omega t} \right\} =$$

$$= -\hat{\varphi}\, \frac{E_0 a}{\omega \mu_0 r} \frac{\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) \sin(\omega t)$$

$$\vec{J}_s(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left\{ \vec{J}_s\, e^{j\omega t} \right\} =$$

$$= \begin{cases} -\hat{z}\, \dfrac{E_0}{\omega \mu_0} \dfrac{\pi}{L} \cos\left(\dfrac{\pi z}{L}\right) \sin(\omega t) & \text{då } r = a \\ \hat{r}\, \dfrac{E_0 a}{\omega \mu_0 r} \dfrac{\pi}{L} \sin(\omega t) & \text{då } z = 0 \\ \hat{z}\, \dfrac{E_0 a}{\omega \mu_0 b} \dfrac{\pi}{L} \cos\left(\dfrac{\pi z}{L}\right) \sin(\omega t) & \text{då } r = b \end{cases}$$