Tentamen i Elektromagnetiska fält

2019-04-26, kl 14.00-18.00, SB multisal – kurskod EEM 015

Hjälpmedel – teori	BETA
Hjälpmedel – räkneproblem	BETA, typgodkänd kalkylator, Formelsamling i Elektromagnetisk fält *utan* egna anteckningar
Besök	cirka kl 15.15 och 16.45
Förfrågningar	Tel. ankn. 6493, Simon Nilsson, Elektroteknik
Examinator	Thomas Rylander, Elektroteknik
Lösningar	På kurshemsidan 2019-04-26 kl 18.00
Granskning	2018-05-17 kl 12.00-13.00 i Landahlsrummet (Rakt ovanför Kajsabaren på våning 7)
Betygsgränser	Tentan 3: 25p; 4: 37p; 5: 48p. 10p/uppgift Bonuspoäng (från höstterminen 2018) får användas för uppgift 6. Max 10p per uppgift.
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

OBS! Tvådelad tentamen!

Teoriuppgift

[Hjälpmedel: BETA]

1. Antag ett medium som är källfritt, icke-ledande och karaktäriserat av en konstant permittivitet ϵ och konstant permeabilitet μ. Använd Maxwell's ekvationer

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{\rm v} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho_{\rm v} \quad \text{and} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0.$$

för att härleda (i) den homogena vågekvationen för det elektriska fältet och (ii) den homogena vågekvationen för det magnetiska fältet.

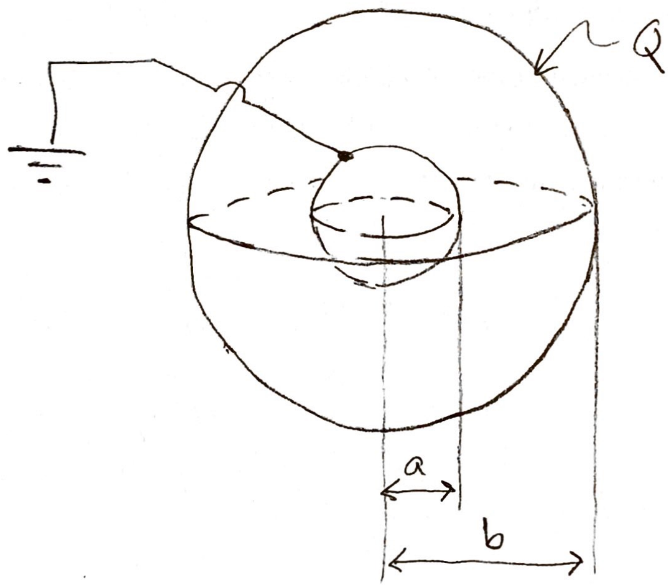
Räkneuppgifter:

[Hjälpmedel: BETA, typgodkänd kalkylator, formelsamling i Elektromagnetisk fältteori]

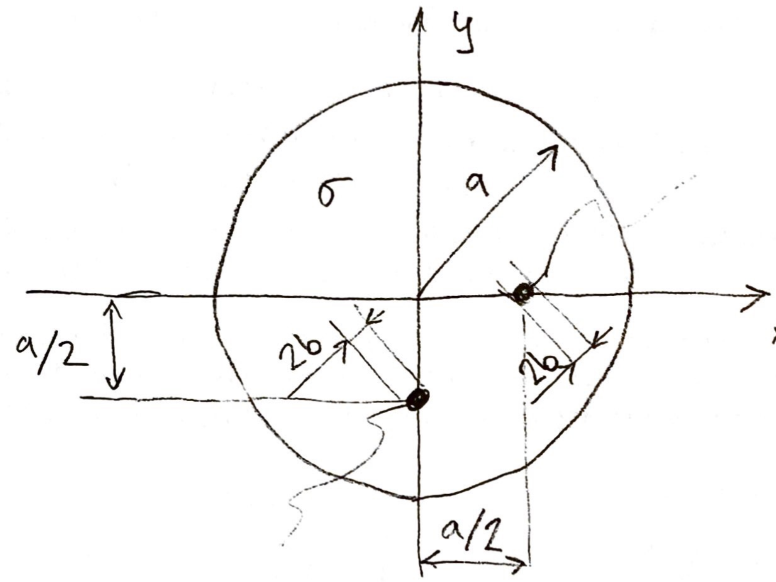
2. Två koncentriska metallskal med radie a och b (där $b > a$) befinner sig i vakuum. Det inre metallskalet är jordat. Det yttre metallskalet har den totala laddningen Q. Lös följande uppgifter:

   (a) Beräkna den totala laddningen som finns på det inre metallskalet. (6p)

   (b) Beräkna den elektriska potentialen överallt. (4p)



3. Ett metallrör har radien a och längden L. Röret ställs vertikalt och fylls med en vätska som har ledningsförmågan σ, där den nedre änden av röret täcks med en elektriskt isolerande skiva så att inte vätska rinner ut. Två tunna metalltrådar med längden L placeras inuti röret på avstånd $a/2$ från rörets mittaxel, så som figuren nedan visar. Båda metalltrådarna har radien b, där $b \ll a$. Metallröret och metalltrådarna har mycket högre ledningsförmåga än vätskan. Beräkna resistansen R mellan metalltrådarna.

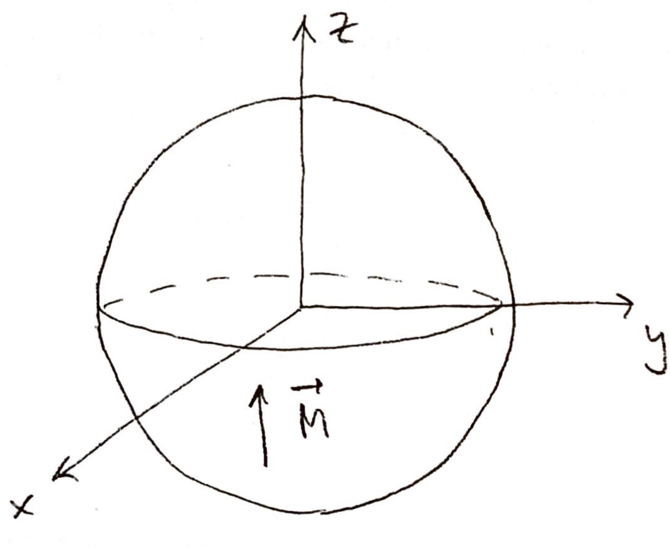


4. Ett klot med radien a är tillverkat av en permanentmagnet vars magnetiseringsvektor är konstant och ges av $\vec{M} = \hat{z}M_0$. Lös följande uppgifter:

(a) Beräkna de ekvivalenta bundna strömtätheterna $\vec{J}_{\text{mv}}$ och $\vec{J}_{\text{ms}}$. (2p)

(b) Beräkna den magnetiska flödestätheten i klotets mittpunkt. (6p)

(c) Beräkna det magnetiska fältet i klotets mittpunkt. (2p)



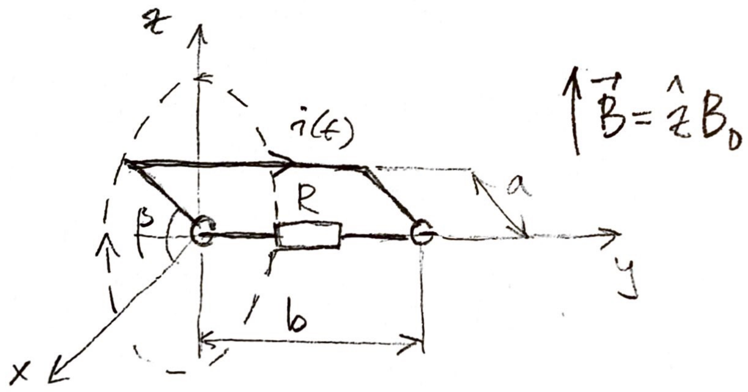
5. En rak ledare med en resistor sammanfaller med y-axeln och den upptar intervallet $0 \leq y \leq b$, där b betecknar ledarens längd. En trådslinga med släpkontakter tillverkas så att den utgör de tre resterande sidorna i en rektangel med längden b och bredden a, så som figuren visar. Resistorn har resistansen R. Resistansen för den raka ledaren och trådslingan kan anses försumbara. Trådslingan med släpkontakter snurrar runt y-axeln med konstant vinkelfrekvens ω så att slingans vinkel i förhållande till x-axeln ges av $\beta = \omega t$, så som figuren visar. I området för den roterande trådslingan finns en konstant magnetisk flödestäthet $\vec{B} = \hat{z}B_0$. Vinkelfrekvensen ω är tillräckligt låg för att anta kvasistationära förhållanden. Dessutom kan trådslingan tillsammans med den raka ledaren antas ha en försumbar induktans. Lös följande uppgifter:

   (a) Beräkna den inducerade strömmen $i(t)$. (5p)

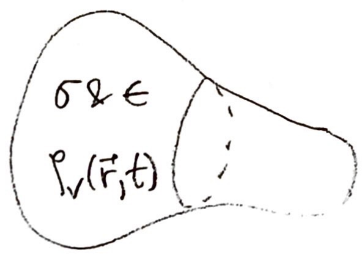
   (b) Beräkna den kraft på trådslingan som motverkar den roterande rörelsen. Beräkna också kraftens angreppspunkt. (3p)

   (c) Beräkna vridmomentet på trådslingan som motverkar den roterande rörelsen, där vridmoment beskrivs av ledningen nedan. (2p)

   Ledning! Vridmomentet ges av produkten av (i) kraften och (ii) hävarmens längd. Här ges hävarmens längd av det vinkelräta avståndet från vridaxeln (dvs y-axeln) till den linje som är parallell med kraften och går igenom kraftens angreppspunkt.



6. En ledande dielektrisk kropp har konduktiviteten σ och permittiviteten ϵ. Den befinner sig i vakuum. Vid $t = 0$ är volymladdningstätheten känd för alla punkter $\vec{r}$ inuti kroppen och den ges då av $\rho_v(\vec{r}, t = 0) = \rho_0(\vec{r})$. Beräkna volymladdningstätheten $\rho_v(\vec{r}, t)$ för alla tidpunkter $t > 0$.

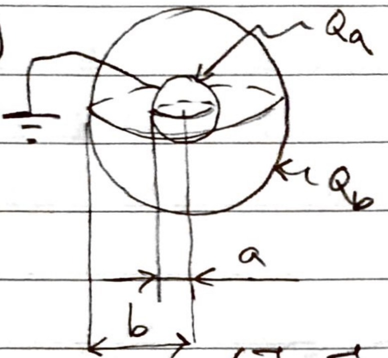


Obs! Denna uppgift är hämtad från listan över räkneproblem i kurs-PM.

2019.04.26

EEM015 – ELEKTROMAGNETISKA FÄLT

2



Sfärisk symmetri ger $\vec{E}(\vec{r}) = \hat{R} E_R(R)$ och Gauss lag med sfärisk Gaussyta (med radie R) medför att

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = 4\pi R^2 E_R(R) = \frac{Q_{inne}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\begin{cases} 0 & \text{då } R<a \\ Q_a & \text{då } a<R<b \\ Q_a+Q_b & \text{då } R>b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{0} & \text{då } R<a \\ \hat{R} Q_a/(4\pi\varepsilon_0 R^2) & \text{då } a<R<b \\ \hat{R}(Q_a+Q_b)/(4\pi\varepsilon_0 R^2) & \text{då } R>b \end{cases}$$

Då $R>b$ blir potentialen

$$V(\vec{r}) = -\int_{L_{\infty\to\vec{r}}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{\xi=R}^{\infty} \left(\hat{R}\frac{Q_a+Q_b}{4\pi\varepsilon_0 \xi^2}\right)\cdot\left(-\hat{R}\,d\xi\right) = \frac{Q_a+Q_b}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

och för $a<R<b$ fås på samma sätt

$$V(\vec{r}) = -\int_{\xi=R}^{b} \left(\hat{R}\frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0 \xi^2}\right)\cdot\left(-\hat{R}\,d\xi\right) + \frac{Q_a+Q_b}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

$$= \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{b}\right) + \frac{Q_a+Q_b}{4\pi\varepsilon_0 b} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_a}{R}+\frac{Q_b}{b}\right)$$

och då $R<a$ blir potentialen konstant (pga att $\vec{E}=\vec{0}$) vilket ger medför att

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_a}{a}+\frac{Q_b}{b}\right)$$

då $R<a$.

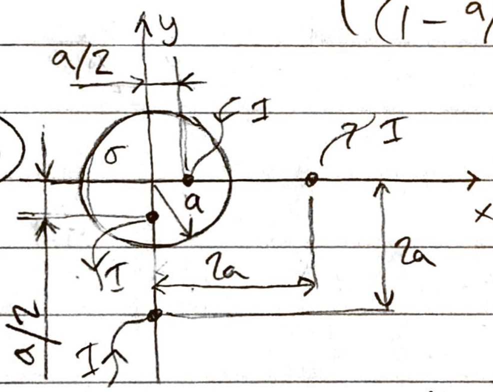
Skalet med radien $R=b$ har laddningen $Q_b = Q$. Laddningen Q_a finns på det jordade skalet med radien $R=a$ och den ges av

$$V(R=a) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_a}{a} + \frac{Q}{b}\right) = 0 \Rightarrow Q_a = -\frac{a}{b}Q$$

vilket ger potentialen (överallt) enligt

$$V(\bar{r}) = \begin{cases} 0 & \text{då } R<a \\ (1-a/R)\,Q/(4\pi\varepsilon_0 b) & \text{då } a<R<b \\ (1-a/b)\,Q/(4\pi\varepsilon_0 R) & \text{då } R>b \end{cases}$$

3



Metallrör med radien $r=a$ och spegling ger följande potential på den positiva elektroden

$$V_{\oplus} = \frac{I/L}{2\pi\sigma}\ln\left(\frac{2a-a/2}{b}\cdot\frac{a/\sqrt{2}}{\sqrt{17}\,a/2}\right) = \frac{I/L}{2\pi\sigma}\ln\left(\frac{3a}{\sqrt{34}\,b}\right)$$

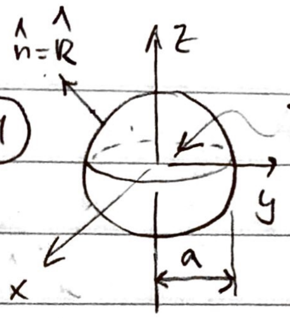
och på samma sätt blir potentialen på den negativa elektroden

$$V_{\ominus} = \frac{I/L}{2\pi\sigma}\ln\left(\frac{b}{2a-a/2}\cdot\frac{\sqrt{17}\,a/2}{a/\sqrt{2}}\right) = \frac{I/L}{2\pi\sigma}\ln\left(\frac{\sqrt{34}\,b}{3a}\right)$$

vilket ger resistansen

$$R = \frac{V_{\oplus}-V_{\ominus}}{I} = \frac{1}{\pi\sigma L}\ln\left(\frac{3a}{\sqrt{34}\,b}\right)$$

4



$\vec{M} = \hat{z} M_0 \Rightarrow \vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \hat{n} = (\hat{z} M_0) \times \hat{R} = \hat{\varphi} M_0 \sin\theta$

$\vec{J}_{mv} = \nabla \times \vec{M} = \vec{0}$ (då $\vec{M}$ = konst.)

Beräkna magnetisk flödestäthet i kulans mittpunkt mha Biot-Savarts lag:

$$\vec{B}(\vec{r}=\vec{0}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\vec{J}_{ms} \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \, ds' =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Obs! } \vec{r}=0,\ \vec{r}\,' = \hat{R}a,\ \vec{r}-\vec{r}\,' = -\hat{R}a,\ |\vec{r}-\vec{r}\,'| = a \\ \Rightarrow \vec{J}_{ms} \times (\vec{r}-\vec{r}\,') = -\hat{\theta}\, a M_0 \sin\theta' \quad (ds' = a^2 \sin\theta' \, d\theta' \, d\varphi') \end{array} \right\}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=0}^{\pi} \frac{-\hat{\theta}\, a M_0 \sin\theta'}{a^3} \, a^2 \sin\theta' \, d\theta' \, d\varphi'$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Obs! } \hat{\theta} = \hat{r}\cos\theta' - \hat{z}\sin\theta' \\ \qquad = (\hat{x}\cos\varphi' + \hat{y}\sin\varphi')\cos\theta' - \hat{z}\sin\theta' \end{array} \right\}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi \, \hat{z} M_0 \int_{\theta'=0}^{\pi} \sin^3\theta' \, d\theta' = \left\{ \begin{array}{l} \text{Subs! } u = \cos\theta' \\ du = -\sin\theta' \, d\theta' \\ \sin^2\theta' = 1 - u^2 \end{array} \right\}$$

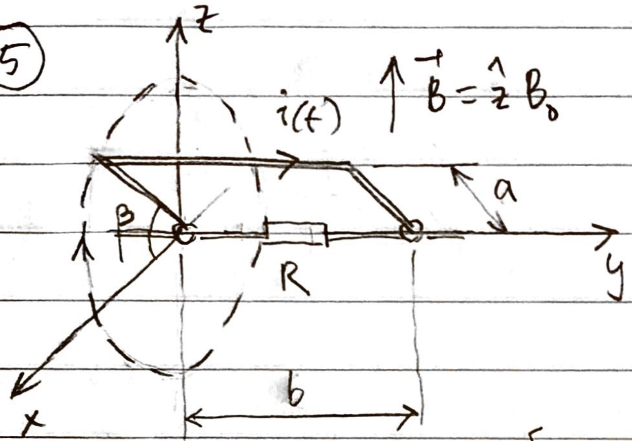
$$= \hat{z} \frac{\mu_0 M_0}{2} \int_{u=+1}^{-1} (1-u^2)(-du) = \hat{z} \frac{\mu_0 M_0}{2} \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_{u=-1}^{+1}$$

$$= \hat{z} \frac{\mu_0 M_0}{2} \underbrace{\left(2 - \frac{2}{3} \right)}_{=4/3} = \hat{z} \frac{2\mu_0 M_0}{3}$$

Det magnetiska fältet i kulans mittpunkt ges av

$$\vec{H}(\vec{r}=\vec{0}) = \frac{\vec{B}(\vec{r}=\vec{0})}{\mu_0} - \vec{M} = -\hat{z}\frac{M_0}{3}$$

(5)



Det magnetiska flödet genom slingan ges av

$$\phi = \int_S \vec{B}\cdot\vec{ds} =$$

$$= \left[\text{Obs! } \vec{ds} = \hat{n}\,ds \text{ med } \hat{n} = -\hat{x}\sin\beta + \hat{z}\cos\beta \right]$$

$$= \int_S (\hat{z}B_0)\cdot(-\hat{x}\sin\beta + \hat{z}\cos\beta)\,ds = B_0 ab\cos\beta$$

Inducerad spänning blir (då $\beta = \omega t$)

$$\mathcal{V}(t) = -d\phi/dt = -\frac{d}{dt}\left(B_0 ab\cos(\omega t)\right) = \omega B_0 ab\sin(\omega t)$$

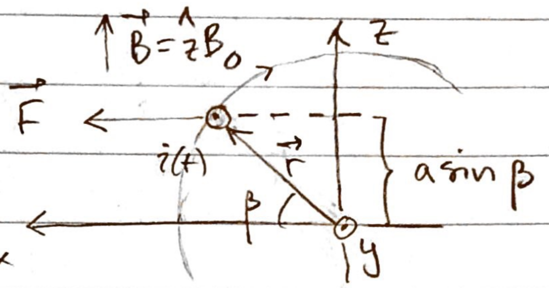
och motsvarande ström

$$i(t) = \mathcal{V}(t)/R = \frac{\omega B_0 ab}{R}\cdot\sin(\omega t)$$

Kraften på slingan ges av den del som är parallell med y-axeln och roterar. (De radiella trådarnas krafter är riktade längs y-axeln och summerar till noll.) Därmed blir kraften på slingan (parallell m. y-axeln och roterar)

$$\vec{F} = \int_L \vec{i} \times \vec{B}\, dl = \int_{y=0}^{b} \left(\hat{y}\,\frac{\omega B_0 a b}{R}\sin(\omega t)\right) \times (\hat{z} B_0)\, dl$$

$$= \hat{x}\,\frac{\omega B_0^2 a b^2}{R}\sin(\omega t)$$



Vridmomentet blir

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Obs! } \vec{r} = a(\hat{x}\cos\beta + \hat{z}\sin\beta) \\ \text{med } \beta = \omega t \end{array} \right\}$$

$$= a\left(\hat{x}\cos(\omega t) + \hat{z}\sin(\omega t)\right) \times \left(\hat{x}\,\frac{\omega B_0^2 a b^2}{R}\sin(\omega t)\right)$$

$$= \hat{y}\,\frac{\omega B_0^2 a^2 b^2}{R}\sin^2(\omega t)$$

6 Se övningsanteckningar