Tentamen i Elektromagnetiska fält

2019-01-17, kl 08.30-12.30, Lindholmen-salar – kurskod EEM 015

Hjälpmedel – teori	BETA
Hjälpmedel – räkneproblem	BETA, typgodkänd kalkylator, Formelsamling i Elektromagnetisk fält *utan* egna anteckningar
Besök	cirka kl 09.15 och 11.45
Förfrågningar	Tel. ankn. 6493, Simon Nilsson, Elektroteknik
Examinator	Tel. ankn. 1735, Thomas Rylander, Elektroteknik
Lösningar	På kurshemsidan 2019-01-17 kl 12.30
Granskning	2018-02-06 kl 12.00-13.00 i Landahlsrummet (Rakt ovanför Kajsabaren på våning 7)
Betygsgränser	Tentan 3: 25p; 4: 37p; 5: 48p. 10p/uppgift Bonuspoäng (från höstterminen 2018) får användas för uppgift 2. Max 10p per uppgift.
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

OBS! Tvådelad tentamen!

Teoriuppgift

[Hjälpmedel: BETA]

1. Definera makroskopisk volymladdningstäthet ρ_v, ytladdningstäthet ρ_s och linjeladdningstäthet ρ_l. Skriv upp integraluttrycken för fälten $V(\vec{r})$ och $\vec{E}(\vec{r})$ från kända laddningsfördelningar $\rho_\mathrm{v}(\vec{r}\,')$, $\rho_\mathrm{s}(\vec{r}\,')$ och $\rho_\mathrm{l}(\vec{r}\,')$. Beskriv i ord integralernas samband med de så kallade Coulomb-fälten från en punktladdning, det vill säga

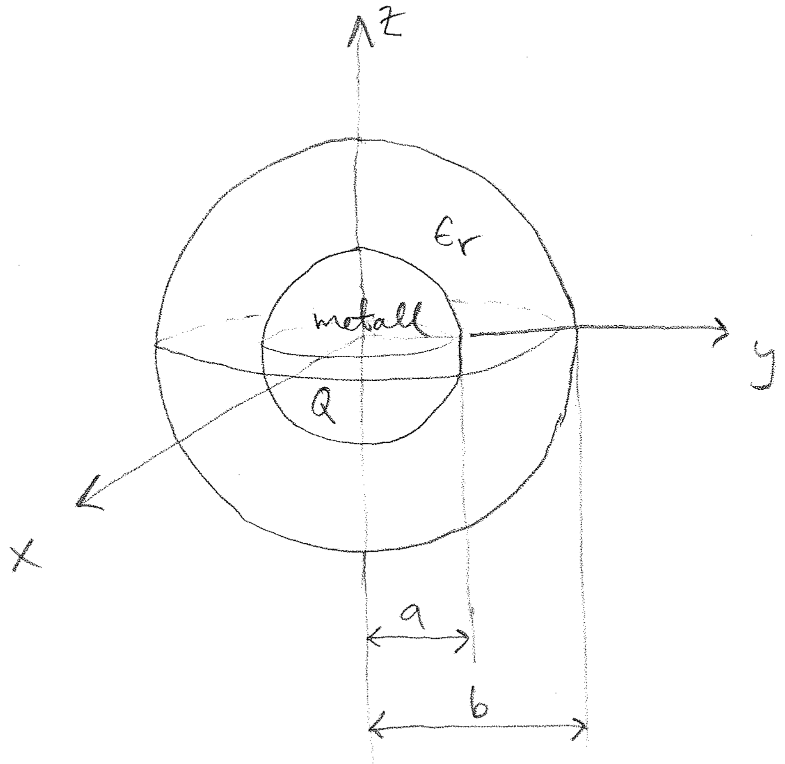
$$
\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \\
V(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}
\end{aligned}
$$

Räkneuppgifter:

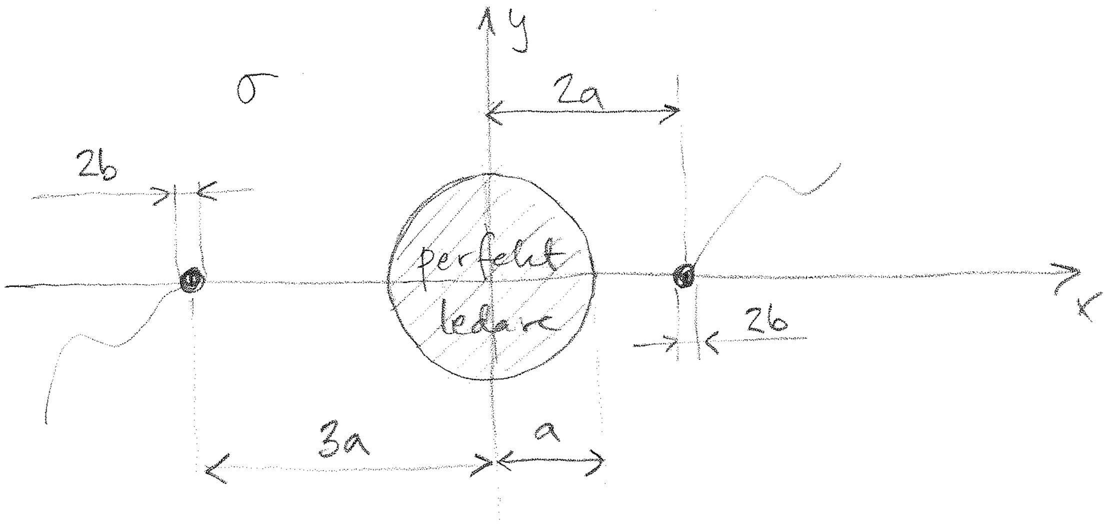
[Hjälpmedel: BETA, typgodkänd kalkylator, formelsamling i Elektromagnetisk fältteori]

2. En metallsfär med radien a och den totala laddningen Q är placerad med sin mittpunkt i origo för ett sfäriskt koordinatsystem. Metallsfären har ett dielektriskt skal med den relativa permittiviteten ϵ_r och det upptar området $a < R < b$. Beräkna den elektriska potentialen överallt.

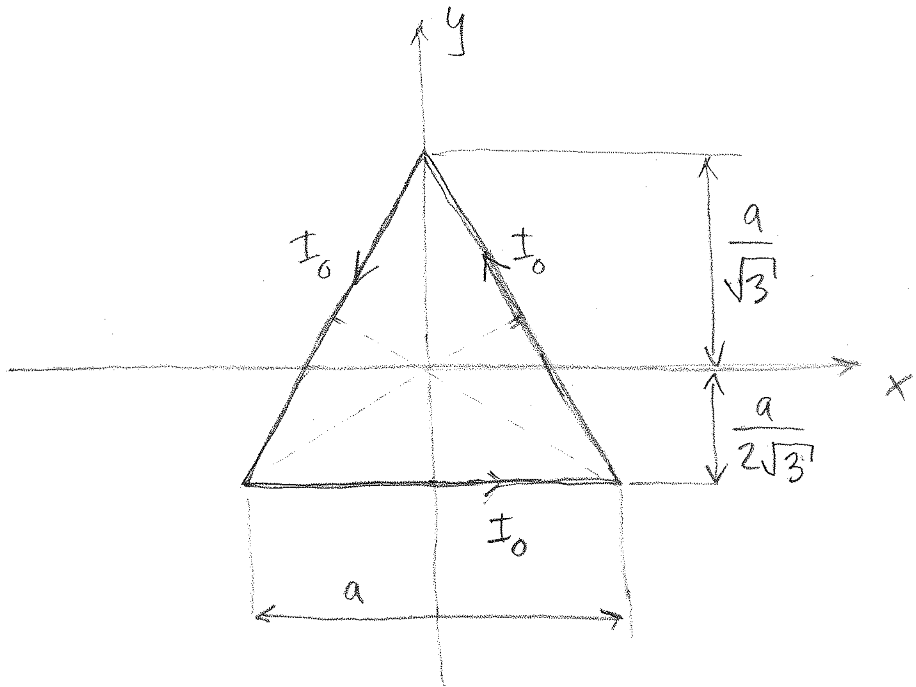
   Obs! Denna uppgift är hämtad från listan över räkneproblem i kurs-PM.



3. En mycket stor ledande skiva har konduktiviteten σ och tjockleken h. Mycket långt från skivans kanter finns ett hål med radien a som är borrat genom skivan. I hålet placeras en perfekt ledande metallcylinder med radien a och höjden h så att den är i mycket god elektrisk kontakt med den ledande skivan. Två tunna elektroder ansluts till den ledande skivan på motsvarande sätt och de placeras på avstånd $2a$ och $3a$ från metallcylinderns mittpunkt, så som figuren nedan visar. Båda elektroderna har radien b, där $b \ll a$. Beräkna resistansen R mellan elektroderna.

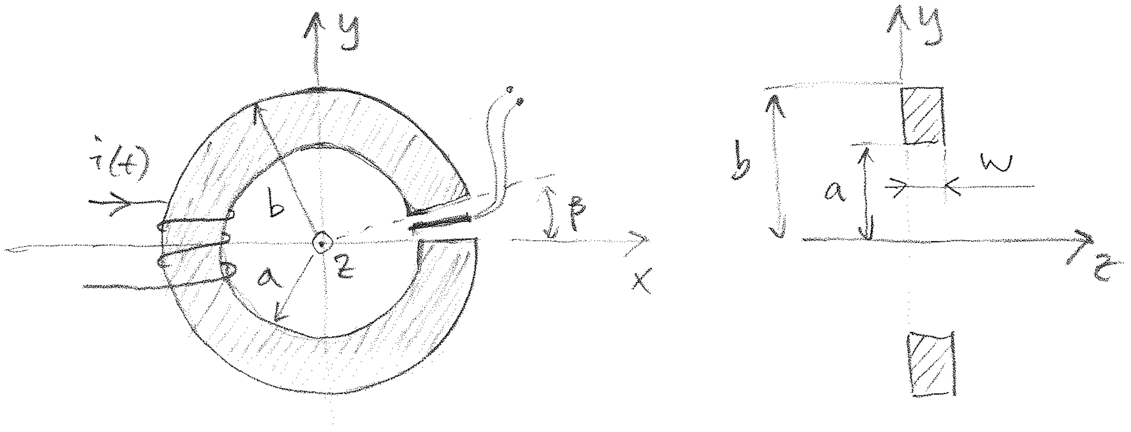


4. En ledare är formad som en liksidig triangel med sidlängden a. Den triangelformade ledaren är placerad i planet $z = 0$ så att triangelns mittpunkt sammanfaller med origo, så som visas i figuren nedan. Ledaren för likströmmen I_0. Beräkna den magnetiska flödestätheten i origo.



5. Ett magnetiskt material med den relativa permeabiliteten μ_r är format som en ring med ett luftgap så som figuren visar. Det magnetiska materialet upptar därmed området $a < r < b$, $\beta < \varphi < 2\pi$ och $0 < z < w$ i cylindriska koordinater. En spole med N varv är lindad runt det magnetiska materialet och den leder växelströmmen $i(t) = i_0 \cos(\omega t)$. I luftgapet placeras en rektangulär slinga så att den sammanfaller med randen till ytområdet $a < r < b$ och $0 < z < w$, där $\varphi = \beta/2$. Beräkna effektivvärdet för den spänning som induceras i den rektangulära slingan. (Läckfälten kan försummas.)

Ledning: I området $a < r < b$ och $0 < z < w$ kan man använda den magnetiska flödestätheten $\vec{B}(\vec{r},t) = \hat{\varphi} B_\varphi(r,t)$ och det magnetiska fältet $\vec{H}(\vec{r},t) = \hat{\varphi} H_\varphi(r,\varphi,t)$.



6. En planvåg faller in mot ett oändligt stort metallplan som sammanfaller med $y = 0$, vilket ger upphov till en reflekterad planvåg. Det totala elektriska fältet i området $y > 0$ ges därmed av

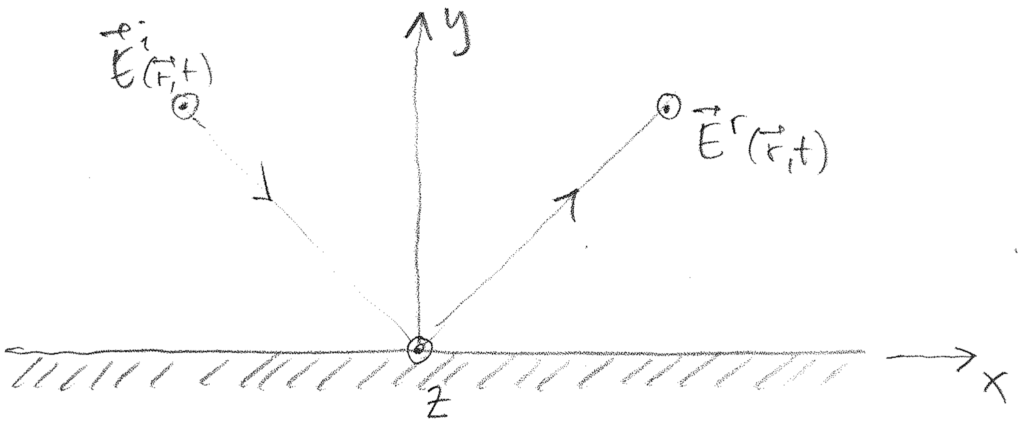
$$\vec{E}(\vec{r},t) = \hat{z} E_0 \left[\cos(\omega t - k_0(x-y)/\sqrt{2}) - \cos(\omega t - k_0(x+y)/\sqrt{2}) \right]$$

Lös följande uppgifter:

(a) Beräkna det elektriska fältet i frekvensdomän och uttryck svaret så att det innehåller produkten av (i) endast en exponentialfunktion som beror av x och (ii) endast en trigonometrisk funktion som beror av y. (3p)

(b) Beräkna det tillhörande magnetiska fältet i frekvensdomän. (5p)

(c) Beräkna den tillhörande ytströmmen på metallplanet i tidsdomän. (2p)

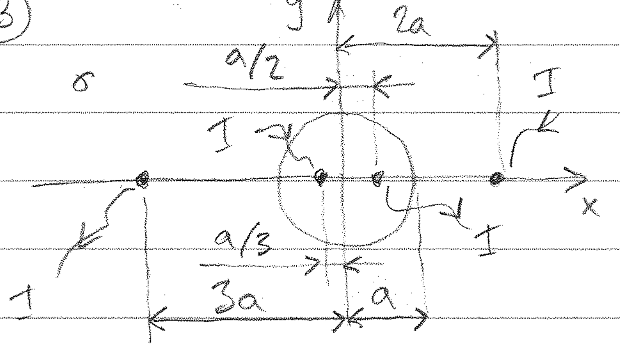


2019.01.17

EEM015 – ELEKTROMAGNETISKA FÄLT

(2) Se lösningsförslag från övning

(3)



Spegling i cylinder (radie a) av linje placerad i $x_a = x_0$ ger spegellinje med samma styrka placerad i $x_s = a^2/x_0$

Potentialen på elektroden till höger är

$$V_{\oplus} = \frac{I/h}{2\pi\sigma} \ln\left(\frac{\overbrace{2a - a/2}^{3a/2}}{b} \cdot \frac{\overbrace{2a + 3a}^{5a}}{\underbrace{2a + a/3}_{= 7a/3}}\right) = \frac{I/h}{2\pi\sigma} \ln\left(\frac{45a}{14b}\right)$$

och motsvarande på elektroden till vänster är

$$V_{\ominus} = \frac{I/h}{2\pi\sigma} \ln\left(\frac{\overbrace{3a + a/2}^{7a/2}}{\underbrace{3a + 2a}_{5a}} \cdot \frac{b}{\underbrace{3a - a/3}_{8a/3}}\right) = \frac{I/h}{2\pi\sigma} \ln\left(\frac{21b}{80a}\right)$$

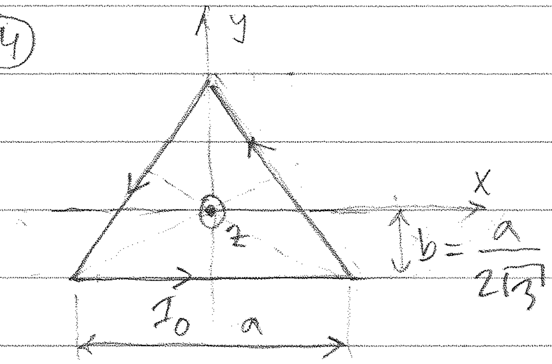
Spänningen blir därmed

$$U = V_{\oplus} - V_{\ominus} = \frac{I/h}{2\pi\sigma} \ln\left(\frac{600\,a^2}{49\,b^2}\right)$$

och resistansen

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma h} \ln\left(\frac{600\,a^2}{49\,b^2}\right)$$

(4)



Biot-Savarts lag ger för den nedersta ledaren att $\vec{I} = \hat{x} I_0$, $\vec{r}\,' = \hat{x}x' - \hat{y}b$ samt $\vec{r} - \vec{r}\,' = -\hat{x}x' + \hat{y}b$ för $\vec{r} = \vec{0}$ och $-a/2 < x' < a/2$.

$$\vec{B}_{\rightarrow}(\vec{r}=\vec{0}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{L_{\rightarrow}} \frac{\vec{I} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \, dl'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{x'=-a/2}^{a/2} \frac{(\hat{x} I_0) \times (-\hat{x}x' + \hat{y} b)}{[(x')^2 + b^2]^{3/2}} \, dx'$$

$$= \hat{z} \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} b \int_{x'=-a/2}^{a/2} \frac{dx'}{[(x')^2 + b^2]^{3/2}}$$

$$= \hat{z} \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} b \left[\frac{x'}{b^2 \sqrt{(x')^2 + b^2}} \right]_{x'=-a/2}^{a/2}$$

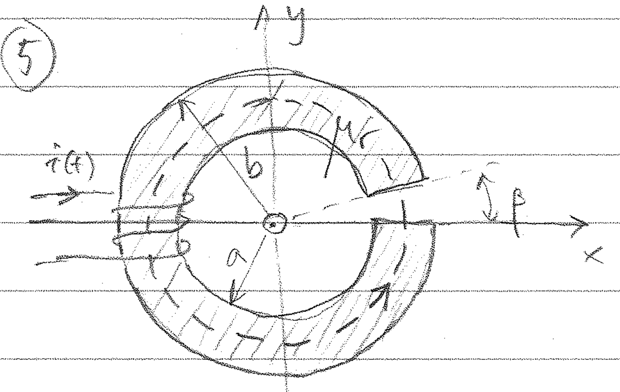
$$= \hat{z} \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \frac{1}{b} \frac{a}{\sqrt{(a/2)^2 + b^2}} = \left\{ b = \frac{a}{2\sqrt{3}} \right\}$$

$$= \hat{z} \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \frac{2\sqrt{3}}{a} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2/4 + a^2/12}} = \hat{z} \frac{3\mu_0 I_0}{2\pi a}$$

Symmetri ger att

$$\vec{B}(\vec{r}=\vec{0}) = 3\vec{B}_{\rightarrow}(\vec{r}=\vec{0}) = \hat{z} \frac{9\mu_0 I_0}{2\pi a}$$

(5)



~~mm = magnetiskt material~~
lg = luftgap

Strömmen $i(t) = i_0 \cos(\omega t)$ ger $\mathring{I} = i_0$ uttryckt i frekvensdomänen.

Ampères lag med $\vec{H} = \hat{\varphi} H_\varphi$ och en cirkulär integrationskurva (radie r) ger

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \mathring{I}_{\text{innesl}} \Rightarrow (2\pi - \beta) r H_\varphi^{mm}(r) + \beta r H_\varphi^{lg}(r) = N \mathring{I}$$

där $H_\varphi^{mm} = B_\varphi / (\mu_0 \mu_r)$ och $H_\varphi^{lg} = B_\varphi / \mu_0$ vilket ger

$$\left[\frac{2\pi - \beta}{\mu_r} + \beta\right] r \frac{B_\varphi}{\mu_0} = N \mathring{I} \Rightarrow \vec{B} = \hat{\varphi} \frac{\mu_0 N \mathring{I}}{[(2\pi - \beta)/\mu_r + \beta] r}$$

Den inducerade spänning blir

$$\mathring{V} = -j\omega \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = -j\omega \int_{r=a}^{b} \left(\frac{\mu_0 N \mathring{I}}{[(2\pi - \beta)/\mu_r + \beta] r} \hat{\varphi}\right) \cdot (\hat{\varphi} h \, dr)$$

$$= -j\omega \frac{\mu_0 N \mathring{I} h}{[(2\pi - \beta)/\mu_r + \beta]} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

och motsvarande effektivvärde är

$$V_{\text{effektivvärde}} = \frac{|\mathring{V}|}{\sqrt{2}} = \frac{\omega \mu_0 N i_0 h}{\sqrt{2} [(2\pi - \beta)/\mu_r + \beta]} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

(6) Identifikation med planvåg $\hat{\mathbf{E}}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$
ger $\vec{\mathbf{E}}_0^i = \hat{z}E_0$, $\vec{k}^i = k_0(\hat{x}-\hat{y})/\sqrt{2}$, $\vec{\mathbf{E}}_0^r = -\hat{z}E_0$
och $\vec{k}^r = k_0(\hat{x}+\hat{y})/\sqrt{2}$.

(a) Det elektriska fältet i frekvensdomän är

$$\vec{\mathbf{E}} = \hat{z}E_0\left[e^{-jk_0(x-y)/\sqrt{2}} - e^{-jk_0(x+y)/\sqrt{2}}\right]$$

$$= \hat{z}E_0\left[e^{+jk_0 y/\sqrt{2}} - e^{-jk_0 y/\sqrt{2}}\right]e^{-jk_0 x/\sqrt{2}}$$

$$= \hat{z}E_0\, 2j\sin(k_0 y/\sqrt{2})\, e^{-jk_0 x/\sqrt{2}}$$

(b) Det magnetiska fältet är

$$\vec{\mathbf{H}} = \frac{\nabla\times\vec{\mathbf{E}}}{-j\omega\mu_0} = j\frac{1}{\omega\mu_0}\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & \mathbf{E}_z(x,y)\end{vmatrix}$$

$$= j\frac{1}{\omega\mu_0}\left(\hat{x}\,\partial\mathbf{E}_z/\partial y - \hat{y}\,\partial\mathbf{E}_z/\partial x\right)$$

$$= -\frac{2E_0}{\omega\mu_0}\left[\hat{x}\frac{k_0}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{k_0 y}{\sqrt{2}}\right) - \hat{y}\left(-j\frac{k_0}{\sqrt{2}}\right)\sin\left(\frac{k_0 y}{\sqrt{2}}\right)\right]e^{-jk_0 x/\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}E_0 k_0}{\omega\mu_0}\left[\hat{x}\cos\left(\frac{k_0 y}{\sqrt{2}}\right) + \hat{y}j\sin\left(\frac{k_0 y}{\sqrt{2}}\right)\right]e^{-jk_0 x/\sqrt{2}}$$

(c) Ytströmmen blir

$$\vec{\mathcal{J}}_s = \hat{n}\times\vec{\mathbf{H}}\Big|_{y=0} = \hat{y}\times\vec{\mathbf{H}}\Big|_{y=0} = \hat{z}\frac{\sqrt{2}E_0 k_0}{\omega\mu_0}e^{-jk_0 x/\sqrt{2}}$$

Motsvarande uttryck i tidsplanet är

$$\vec{J}_s = \mathrm{Re}\left\{\vec{\mathcal{J}}_s e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\hat{z}\frac{\sqrt{2}\,E_0 k_0}{\omega\mu_0} e^{-jk_0 x/\sqrt{2}} e^{j\omega t}\right\}$$

$$= \hat{z}\frac{\sqrt{2}\,E_0 k_0}{\omega\mu_0}\cos\left(\omega t - k_0 x/\sqrt{2}\right)$$

(I uttrycken ovan kan man ersätta faktorn $k_0/(\omega\mu_0) = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}/(\omega\mu_0) = 1/\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 1/Z_0$ där $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ är vågimpedansen för vakuum.)