Tentamen i Elektromagnetiska fält

2018-08-22, kl 14.00-18.00, SB-multisal – kurskod EEM 015

Hjälpmedel – teori	BETA
Hjälpmedel – räkneproblem	BETA, typgodkänd kalkylator, Formelsamling i Elektromagnetisk fält *utan* egna anteckningar
Besök	cirka kl 15.15 och 16.45
Förfrågningar	Tel. ankn. 1735 Thomas Rylander, Elektroteknik
Granskning	2018-09-12 kl 12.00-13.00 i Landahlsrummet (7430)
Betygsgränser	Tentan 3: 25p; 4: 37p; 5: 48p. 10p/uppgift Bonuspoäng (från höstterminen 2017) får användas för uppgift 6. Max 10p per uppgift.
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

OBS! Tvådelad tentamen!

Teoriuppgift

[Hjälpmedel: BETA]

1. Visa att ömsesidiga elektrostatiska energin i ett system av N st punktladdningar blir

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i V_i$$

Generalisera resultatet till att gälla den totala elektrostatiska energin hos en i rummet begränsad, kontinuerlig laddningsfördelning $\rho_\mathrm{v}(\vec{r})$.

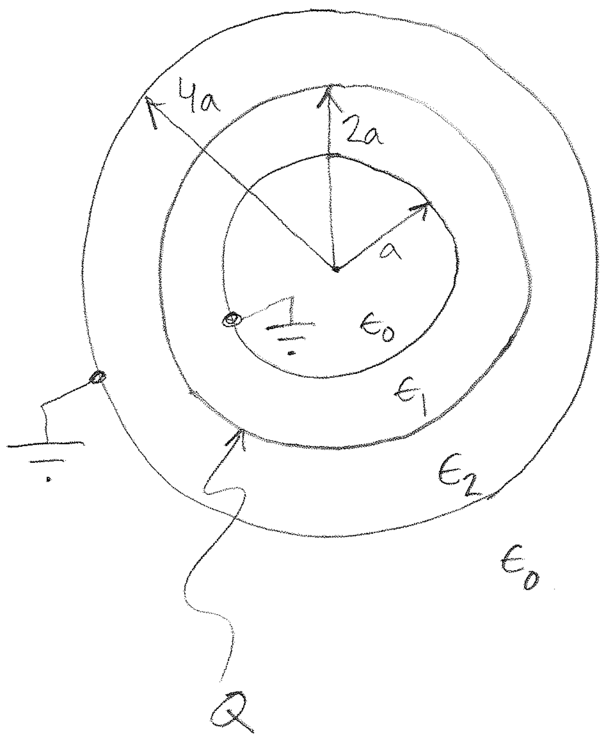
Räkneuppgifter:

[Hjälpmedel: BETA, typgodkänd kalkylator, formelsamling i Elektromagnetisk fältteori]

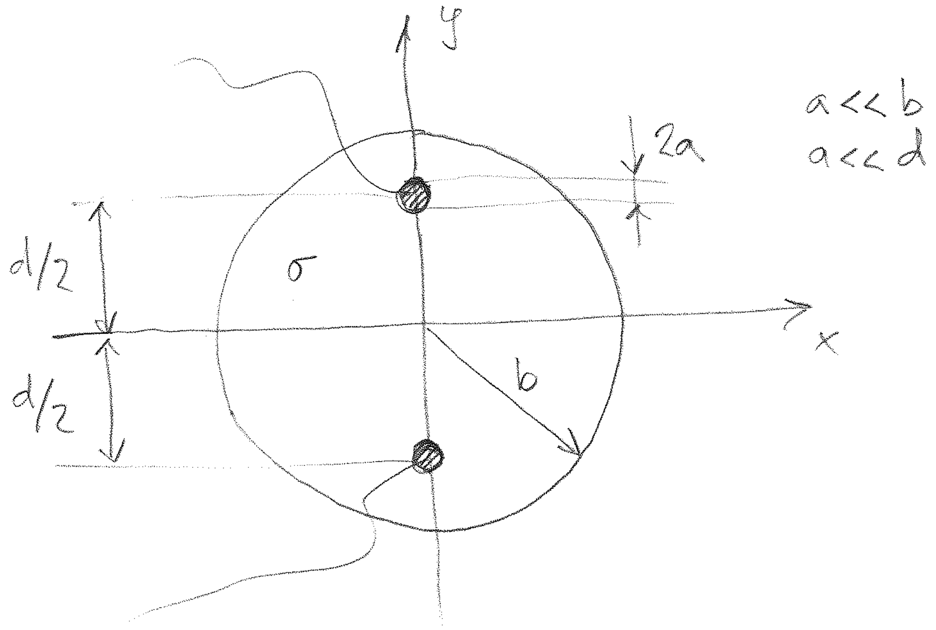
2. Tre koncentriska metallskal har radierna a, $2a$ och $4a$. Permittiviteten är ϵ_1 för $a < R < 2a$ och ϵ_2 för $2a < R < 4a$. Metallskalet med radien $2a$ har laddningen Q.

   (a) Beräkna den elektriska potentialen överallt genom att ansätta laddningen Q_i på metallskalet med radien a och laddningen Q_y på metallskalet med radien $4a$. (6p)

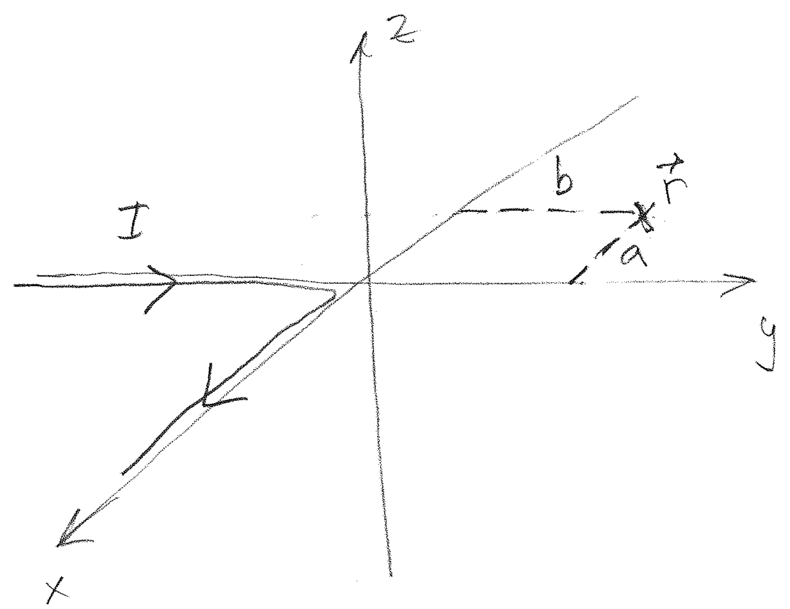
   (b) Bestäm Q_i och Q_y så att metallskalen med radie a och $4a$ får potentialen noll, det vill säga att de är jordade. (4p)



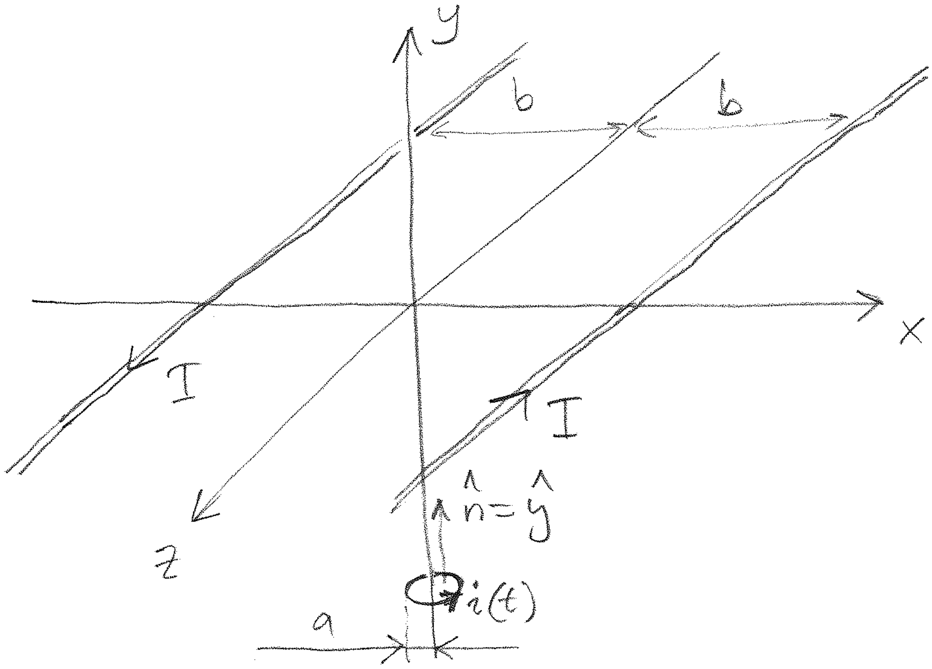
3. En cirkulär skiva med ledningsförmågan σ har radien b och tjockleken w. I skivan finns två hål som båda har radien a och de är placerade längs y-axeln i punkterna $y = \pm d/2$ så som figuren visar. Man utrustar de två hålen med varsin elektrod. Beräkna resistansen R mellan de två elektroderna.



4. En tråd är placerad längs den positiva x-axeln och den negativa y-axeln så som figuren visar. Tråden för en likström I. Beräkna den magnetiska flödestätheten i punkten $\vec{r} = -\hat{x}a + \hat{y}b$, där både a och b är positiva.



5. En mycket liten cirkulär metallslinga med radien a och resistansen R rör sig längs den räta linjen $\vec{r}(t) = \hat{y}v_0 t$, så som figuren visar. Den cirkulära slingan är orienterad så att dess ytnormal i varje ögonblick är riktad i $\hat{y}$-riktning. I planet $y = 0$ finns två raka trådar som sammanfaller med de räta linjerna som beskrivs av $x = \pm b$ och $y = 0$. Den vänstra tråden för likströmmen $\vec{\imath} = +I\hat{z}$ och den högra tråden för likströmmen $\vec{\imath} = -I\hat{z}$. Slingans hastighet v_0 är konstant och tillräckligt liten för att anta kvasi-magnetostatik. Beräkna den inducerade strömmen $i(t)$ i den cirkulära slingan.



6. En tidsharmonisk elektromagnetisk våg skapas av en källa med vinkelfrekvensen ω. Vågen utbreder sig i vakuum och beskrivs av det elektriska fältet

$$\vec{\boldsymbol{E}}(x, z) = \hat{y}E_0 \exp(-\alpha z) \exp(-j\beta x)$$

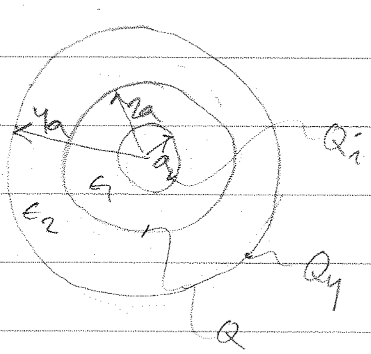
där α och β är reella konstanter. Bestäm relationen mellan α, β och ω så att vågekvationen i vakuum är uppfylld.

Obs! Denna uppgift är hämtad från listan över räkneproblem i kurs-PM.

2018.08.22

ELEKTROMAGNETISKA FÄLT (EEM015)

(2)



Gauss lag och sfärisk symmetri ger $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = 4\pi R^2 D_R = Q_{inne}$

$$D_R = \begin{cases} \vec{0} & R<a \\ Q_i/4\pi R^2 & a<R<2a \\ (Q+Q_i)/4\pi R^2 & 2a<R<4a \\ (Q_y+Q+Q_i)/4\pi R^2 & R>4a \end{cases}$$

$\vec{E} = \vec{D}/\epsilon$ och $V = -\int_L \vec{E}\cdot d\vec{l}$ ger
$L: \infty \to \vec{r}$

för $R>4a$:

$$V(\vec{r}) = \frac{Q_y+Q+Q_i}{4\pi\epsilon_0}\int_R^\infty \frac{\hat{R}}{\xi^2}\cdot(-\hat{R}\,dR) = \frac{Q_y+Q+Q_i}{4\pi\epsilon_0 R}$$

och för de andra områdena fås

$$V(\vec{r}) = \frac{Q+Q_i}{4\pi\epsilon_2}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{4a}\right) + \frac{Q_y+Q+Q_i}{4\pi\epsilon_0\cdot 4a} \quad \text{då } 2a<R<4a$$

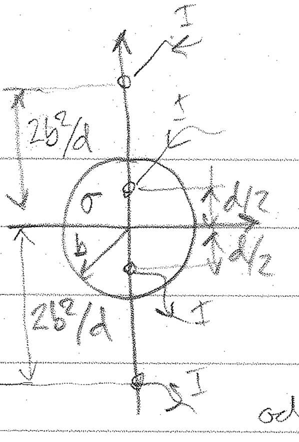
$$V(\vec{r}) = \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_1}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{2a}\right) + \frac{Q+Q_i}{4\pi\epsilon_2\cdot 4a} + \frac{Q_y+Q+Q_i}{4\pi\epsilon_0\cdot 4a} \quad \text{då } a<R<2a$$

$$V(\vec{r}) = \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_1\cdot 2a} + \frac{Q+Q_i}{4\pi\epsilon_2\cdot 4a} + \frac{Q_y+Q+Q_i}{4\pi\epsilon_0\cdot 4a} \quad \text{då } R<a$$

Då det yttre skalet är jordat måste $Q_y+Q+Q_i=0$. Pss gäller att $Q_i/\epsilon_1 + (Q+Q_i)/2\epsilon_2 = 0$ då det inre skalet är jordat. Man får

$$Q_i\left(\frac{1}{\epsilon_1}+\frac{1}{2\epsilon_2}\right) = -\frac{Q}{2\epsilon_2} \Rightarrow Q_i = -\frac{1}{2\epsilon_2/\epsilon_1+1}Q$$

$$\Rightarrow Q_y = -Q-Q_i = \left[\frac{1}{2\epsilon_2/\epsilon_1+1}-1\right]Q = -\frac{2\epsilon_2/\epsilon_1}{2\epsilon_2/\epsilon_1+1}Q$$

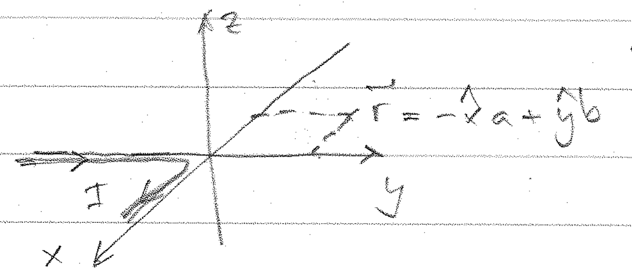
3) 

Potentialen på positiv elektrod

$$V_{\oplus} = \frac{I/w}{2\pi\sigma}\left[\ln\left(\frac{d}{a}\right) + \ln\left(\frac{2b^2/d + d/2}{2b^2/d - d/2}\right)\right]$$

och pss blir $V_{\ominus} = -V_{\oplus}$, vilket ger

$$R = \frac{U}{I} = \frac{V_{\oplus} - V_{\ominus}}{I} = \frac{1}{\pi\sigma w}\ln\left(\frac{(4b^2+d^2)\,d}{(4b^2-d^2)\,a}\right)$$

4) 

Tråd längs pos. x-axel ger

$$\vec{r}\,' = \hat{x}x' \quad \text{m.} \quad 0 \le x' \le \infty$$

$$\vec{r} - \vec{r}\,' = -\hat{x}(a+x') + \hat{y}b$$

$$|\vec{r} - \vec{r}\,'| = \sqrt{(a+x')^2 + b^2}$$

Biot-Savarts lag ger därmed

$$\vec{B}_{x>0}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^\infty \frac{(I\hat{x}) \times (-\hat{x}(a+x') + \hat{y}b)}{\left[(a+x')^2 + b^2\right]^{3/2}}\,dx'$$

$$= \hat{z}\frac{\mu_0 I b}{4\pi}\int_0^\infty \frac{dx'}{\left[(a+x')^2 + b^2\right]^{3/2}} = \left[\begin{array}{l}\text{Subs. } \xi = a + x' \Rightarrow d\xi = dx' \\ x' = 0 \Rightarrow \xi = a,\ x' = \infty \Rightarrow \xi = \infty\end{array}\right]$$

$$= \hat{z}\frac{\mu_0 I b}{4\pi}\int_a^\infty \frac{d\xi}{\left[\xi^2 + b^2\right]^{3/2}} = \hat{z}\frac{\mu_0 I b}{4\pi}\left[\frac{\xi}{b^2\sqrt{\xi^2 + b^2}}\right]_a^\infty$$

$$= \hat{z}\frac{\mu_0 I}{4\pi b}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

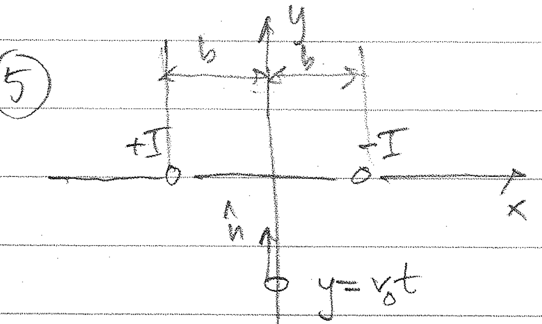
Tråd längs neg. y-axel hanteras pss, vilket ger

$$\vec{B}_{y<0}(\vec{r}) = \hat{z}\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(1 - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

Superposition ger det totala fältet

$$\vec{B}(\vec{r}) = \hat{z}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{a/b + b/a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

(5)



Ampères lag för den vänstra tråden ger (map $\vec{r}\,'_{\oplus} = -\hat{x}b$)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \hat{\phi}\,\frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \hat{z}\times\hat{r}\,\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Med $\vec{r} = \hat{y}v_0 t$ och $\vec{r}\,'_{\oplus} = -\hat{x}b$ samt $\vec{r}\,'_{\ominus} = +\hat{x}b$ fås

$$\hat{r}_{\oplus} = \frac{+\hat{x}b + \hat{y}v_0 t}{\sqrt{b^2 + (v_0 t)^2}} \quad \& \quad r_{\oplus} = \sqrt{b^2 + (v_0 t)^2}$$

$$\hat{r}_{\ominus} = \frac{-\hat{x}b + \hat{y}v_0 t}{\sqrt{b^2 + (v_0 t)^2}} \quad \& \quad r_{\ominus} = \sqrt{b^2 + (v_0 t)^2}$$

vilket ger den totala magnetiska flödestätheten

$$\vec{B}(\vec{r}) = \hat{z}\times\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{+\hat{x}b + \cancel{\hat{y}v_0 t}}{b^2 + (v_0 t)^2} + \frac{-\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{-\hat{x}b + \cancel{\hat{y}v_0 t}}{b^2 + (v_0 t)^2}\right)$$

$$= +\hat{y}\,\frac{\mu_0 I}{\pi}\,\frac{b}{b^2 + (v_0 t)^2}$$

Den inducerade strömmen blir

$$i(t) = \frac{V}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{R}\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{s}$$

$$\simeq -\frac{1}{R}\frac{d}{dt}\left(+\frac{\mu_0 I}{\pi}\,\frac{b}{b^2 + (v_0 t)^2}\,\pi a^2\right)$$

$$= +\frac{\mu_0 I a^2 b}{R}\cdot\frac{2v_0^2 t}{(b^2 + (v_0 t)^2)^2}$$