Tentamen i Elektromagnetiska fält

2018-04-06, kl 14.00-18.00, "Maskin"-salar – kurskod EEM 015

Hjälpmedel – teori	BETA
Hjälpmedel – räkneproblem	BETA, typgodkänd kalkylator, Formelsamling i Elektromagnetisk fält *utan* egna anteckningar
Besök	cirka kl 14.45 och 17.00
Förfrågningar	Tel. ankn. 1735, Thomas Rylander, Elektroteknik
Lösningar	På kurshemsidan 2018-04-06 kl 18.00
Granskning	2018-04-25 kl 12.00-13.00
Betygsgränser	Tentan 3: 25p; 4: 37p; 5: 48p. 10p/uppgift Bonuspoäng (från höstterminen 2017) får användas för uppgift 2. Max 10p per uppgift.
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

OBS! Tvådelad tentamen!

Teoriuppgift
[Hjälpmedel: BETA]

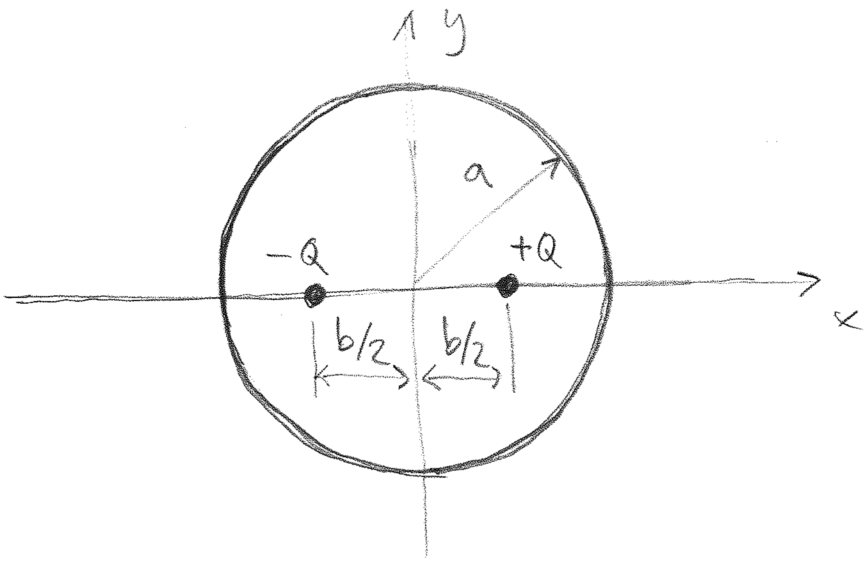
1. Visa att den ömsesidiga elektrostatiska energin i ett system av N st punktladdningar blir

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i V_i$$

Generalisera resultatet till att gälla den totala elektrostatiska energin hos en i rummet begränsad, kontinuerlig laddningsfördelning $\rho_v(\vec{r})$.

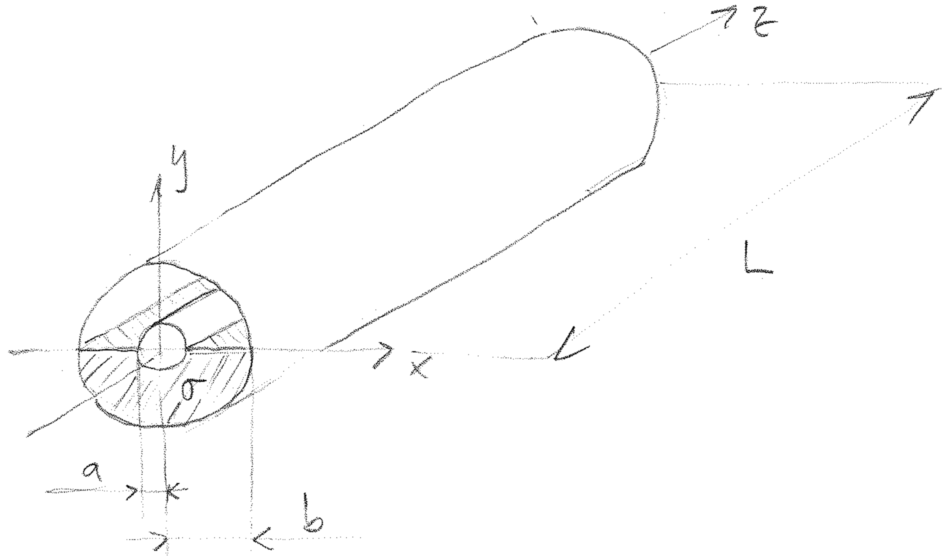
Räkneuppgifter:
[Hjälpmedel: BETA, typgodkänd kalkylator, formelsamling i Elektromagnetisk fältteori]

2. Två raka, parallella, mycket tunna och mycket långa ledare är symmetriskt placerade inuti ett metallrör så som figuren nedan visar, där både metallröret och de två ledarna har längden L vinkelrätt mot papprets plan. Metallröret är cirkulärt med innerradien a (där $a \ll L$) och dess cylinderaxel är parallell med de två raka ledarna. De två raka ledarna har den totala laddningen $+Q$ och $-Q$ som figuren visar. Metallrörets totala laddning är noll. Bestäm avståndet b mellan de två raka ledarna så att den kraft som verkar på respektive ledare är noll.

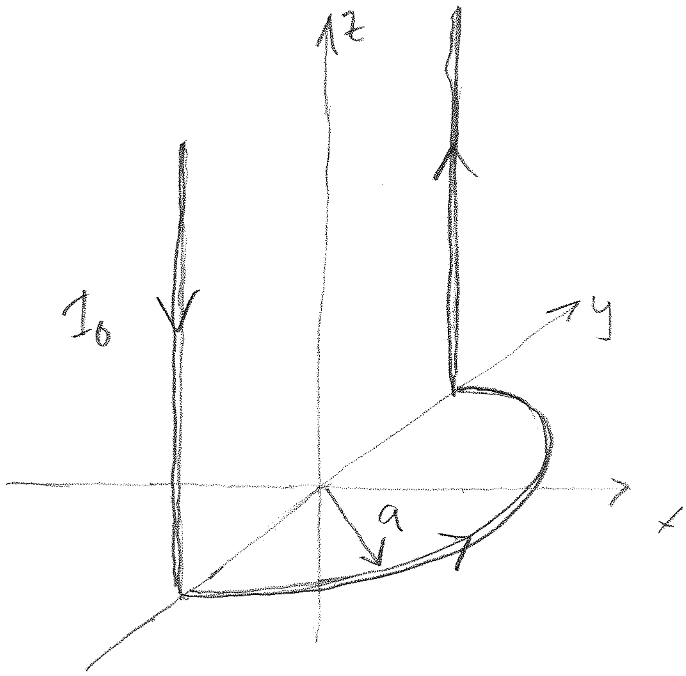


Obs! Denna uppgift är hämtad från listan över räkneproblem i kurs-PM.

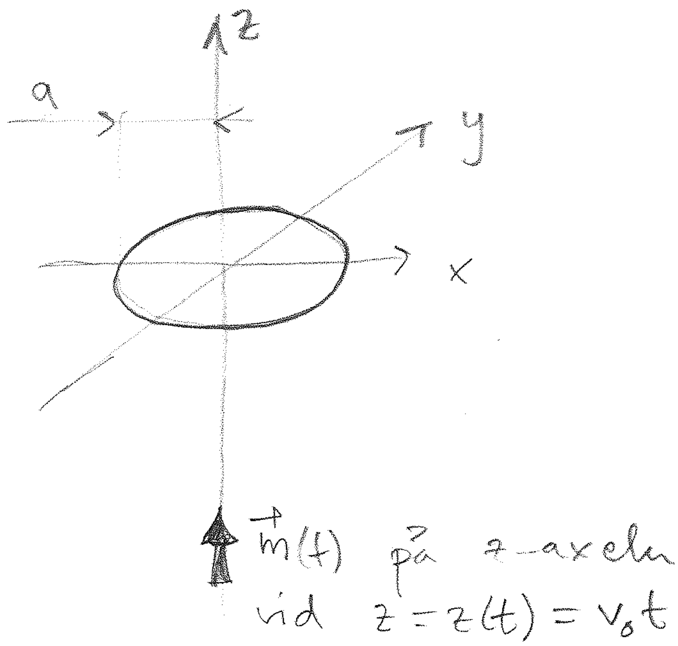
3. En koaxialkabel med innerradien a och ytterradien b har längden L. Så som figuren nedan visar så finns ett ledande material mellan innerledare och ytterledare i det område som begränsas av $a < r < b$, $y < 0$ och $0 < z < L$. Konduktiviteten för det ledande området ges av $\sigma(r) = \sigma_0(r/a)^2$ i cylindriska koordinater där σ_0 är en positiv konstant. Området som beskrivs av $a < r < b$, $y > 0$ och $0 < z < L$ är luft. Beräkna resistansen R mellan innerledare och ytterledare för koaxialkabeln.



4. En lång rak tråd som för en likström I_0 är formad så som figuren visar, där de två halvoändliga raka ledarna går längs z-axeln och de sammanbinds av en krökt ledare med formen av en cirkelbåge med radien a. Beräkna den magnetiska flödestätheten $\vec{B}$ i origo.



5. En magnetisk dipol har dipolmomentet $\vec{m}(t) = \hat{z}m_0\cos(\omega t)$ och den rör sig längs z-axeln så att dess placering ges av $z(t) = v_0 t$ som funktion av tiden t. En cirkulär slinga med radien a är placerad i planet $z = 0$ så att dess mittpunkt sammanfaller med origo. Den cirkulära slingan har resistansen R och försumbar induktans. Beräkna den inducerade strömmen $i(t)$ i den cirkulära slingan för $-\infty < t < \infty$. Både ω och v_0 är tillräckligt små för att anta kvasi-stationära förhållanden.



6. En elementardipol (dvs en mycket kort och rak trådantenn) befinner sig i vakuum med oändlig utsträckning åt alla håll. Elementardipolen har längden L och den för växelströmmen I_0 längs z-axeln. Problemet är tidsharmoniskt och växelströmmens vinkelfrekvens betecknas ω. Den magnetiska vektorpotentialen i sfäriska koordinater (där origo sammanfaller med elementardipolen) ges av

$$\vec{A}(\vec{r},t) = (\hat{R}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta)\,\frac{\mu_0 I_0 L}{4\pi R}\cos(\omega t - k_0 R)$$

Lös följande uppgifter:

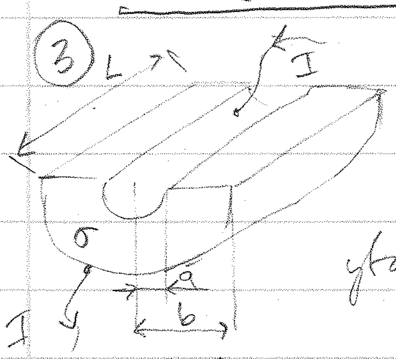
(a) Beräkna den magnetiska flödestätheten $\vec{B}(\vec{r},t)$ då $k_0 R \gg 1$. (5p)

(b) Beräkan det elektriska fältet $\vec{E}(\vec{r},t)$ då $k_0 R \gg 1$. (5p)

2018.04.06

ELEKTROMAGNETISKA FÄLT – EEM015

(3)



I området mellan elektroderna så ger symmetri att $\vec{J}_v = \hat{r} J_r(r)$.
Kontinuitetsekvationen för sluten yta S som omsluter elektroden $r=a$:

$$\oint_S \vec{J}_v \cdot d\vec{s} = \pi r L J_r(r) - I = 0 \Rightarrow J_r(r) = \frac{I/L}{\pi r}$$

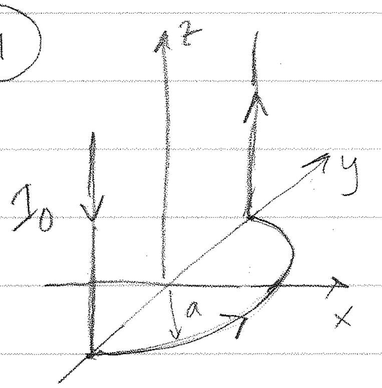
$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{J}_v}{\sigma} = \hat{r}\,\frac{I/L}{\pi r}\cdot\frac{a^2}{\sigma_0 r^2} \Rightarrow U = V_a - V_b = -\int_{L_{\vec{r}_b \to \vec{r}_a}} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$= -\int_a^b \left(\hat{r}\,\frac{I a^2}{\pi \sigma_0 L r^3}\right)\cdot\left(-\hat{r}\,dr\right)$$

$$= \frac{I a^2}{\pi \sigma_0 L}\left[-\frac{1}{2r^2}\right]_a^b = \frac{I}{2\pi\sigma_0 L}\left(1-\left(\frac{a}{b}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow R_{ab} = U/I = \frac{1}{2\pi\sigma_0 L}\left(1-\left(\frac{a}{b}\right)^2\right)$$

(4)



Biot-Savarts lag för cirkelbågen ger

$$\vec{B}(\vec{r}=\vec{0}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_L \frac{\vec{I}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2}\times\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dl'$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \vec{r}=\vec{0},\ \vec{r}\,' = \hat{r}(\varphi')a \text{ där } \varphi': -\pi/2 \to \pi/2 \\ \vec{r}-\vec{r}\,' = -\hat{r}(\varphi')a,\ |\vec{r}-\vec{r}\,'| = a, \\ \vec{I} = \hat{\varphi} I_0,\ \vec{I}\times(\vec{r}-\vec{r}\,') = \hat{z} I_0 a \\ dl' = a\,d\varphi' \end{array}\right\}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\hat{z} I_0 a}{a^3} \, a \, d\varphi' = \hat{z} \frac{\mu_0 I_0}{4a}$$

På motsvarande sätt ger den raka ledaren som leder frånströmmen

$$\vec{B}(\vec{r}=\vec{0}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{\vec{I}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \, dl'$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \vec{r}=\vec{0}, \ \vec{r}' = \hat{y} a + \hat{z} z' \quad \text{där } z' : 0 \to \infty \\ \vec{r}-\vec{r}' = -\hat{y} a - \hat{z} z', \ |\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{a^2+(z')^2} \\ \vec{I} = \hat{z} I_0, \ \vec{I} \times (\vec{r}-\vec{r}') = \hat{x} I_0 a \\ dl' = dz' \end{array} \right\}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{\hat{x} I_0 a}{(a^2+(z')^2)^{3/2}} \, dz'$$

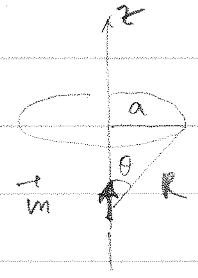
$$= \hat{x} \frac{\mu_0 I_0 a}{4\pi} \left[\frac{z'}{a^2 \sqrt{a^2+(z')^2}} \right]_0^{\infty} = \hat{x} \frac{\mu_0 I_0}{4\pi a}$$

På samma sätt fås för den raka ledaren som leder tillströmmen

$$\vec{B}(\vec{r}=\vec{0}) = \ldots = \hat{x} \frac{\mu_0 I_0}{4\pi a}$$

$$\left(\text{ty } \vec{r}-\vec{r}' = \hat{y} a - \hat{z} z' \ \& \ \vec{I} = -\hat{z} I_0 \right.$$
$$\left. \Rightarrow \vec{I} \times (\vec{r}-\vec{r}') = \hat{x} I_0 a \right)$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}=0) = \frac{\mu_0 I}{2a}\left(\hat{x}\frac{1}{\pi} + \hat{z}\frac{1}{2}\right)$$

5 

Det magnetiska flödet genom slingan ges av ($\vec{m} = \hat{z} m_z$)

$$\Phi = \oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l} = \left\{ \vec{A} = \hat{\varphi}\,\frac{\mu_0 m_z a}{4\pi R^3} \right\}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\hat{\varphi}\,\frac{\mu_0 m_z a}{4\pi (a^2+z^2)^{3/2}}\right)\cdot\left(\hat{\varphi}\, a\, d\varphi\right) = \frac{\mu_0 m_z a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}$$

Den inducerade spänningen blir då

$$\mathcal{V} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial m_z}\frac{dm_z}{dt} - \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$= -\frac{\mu_0 a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}\frac{dm_z}{dt} + \frac{3}{2}\,\frac{\mu_0 m_z a^2\cdot 2z}{2(a^2+z^2)^{5/2}}\frac{dz}{dt}$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} m_z = m_0\cos(\omega t), & z = v_0 t \\ dm_z/dt = -m_0\omega\sin(\omega t), & dz/dt = v_0 \end{array} \right\}$$

$$= \frac{\mu_0 a^2 m_0}{2(a^2+(v_0t)^2)^{5/2}}\left((a^2+(v_0t)^2)\,\omega\sin(\omega t) + 3v_0^2 t\cos(\omega t)\right)$$

och den inducerade strömmen blir

$$i(t) = \frac{\mathcal{V}}{R} = \frac{\mu_0 a^2 m_0}{2R(a^2+(v_0t)^2)^{5/2}}\left[(a^2+(v_0t)^2)\,\omega\sin(\omega t) + 3v_0^2 t\cos(\omega t)\right]$$

(6) Den magnetiska flödestätheten ges av

$$\vec{\mathbb{B}}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{\mathbb{A}} = \hat{\varphi} \frac{1}{R} \left[\frac{\partial (R \mathbb{A}_\theta)}{\partial R} - \frac{\partial \mathbb{A}_R}{\partial \theta} \right]$$

$$= \hat{\varphi}\, jk_0 \frac{\mu_0 I_0 L}{4\pi R} \left(1 + \frac{1}{jk_0 R}\right) \sin\theta\, e^{-jk_0 R}$$

$$\xrightarrow[k_0 R \gg 1]{} \hat{\varphi}\, jk_0 \frac{\mu_0 I_0 L}{4\pi R} \sin\theta\, e^{-jk_0 R}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}, t) = \mathrm{Re}\left\{ \vec{\mathbb{B}}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right\} = -\hat{\varphi} \frac{k_0 \mu_0 I_0 L}{4\pi R} \sin\theta \sin(\omega t - k_0 R)$$

Det elektriska fältet fås ur Ampères lag

$$\vec{\mathbb{E}}(\vec{r}) = \frac{\nabla \times (\vec{\mathbb{B}}/\mu_0)}{j\omega \epsilon_0} = \frac{1}{j\omega\epsilon_0\mu_0} \nabla \times \vec{\mathbb{B}}$$

$$= \frac{1}{j\omega\epsilon_0\mu_0} \left[\hat{R} \frac{1}{R\sin\theta} \frac{\partial(\sin\theta\, \mathbb{B}_\varphi)}{\partial\theta} - \hat{\theta} \frac{1}{R} \frac{\partial (R \mathbb{B}_\varphi)}{\partial R} \right]$$

$$= jk_0 \frac{k_0}{\epsilon_0 \omega} \cdot \frac{I_0 L}{4\pi R} \left[\hat{R} \frac{\cos\theta}{jk_0 R} + \hat{\theta} \sin\theta \right] e^{-jk_0 R}$$

$$\xrightarrow[k_0 R \gg 1]{} \hat{\theta}\, jk_0 \underbrace{\frac{k_0}{\epsilon_0 \omega}}_{Z_0} \cdot \frac{I_0 L}{4\pi R} \sin\theta\, e^{-jk_0 R}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}, t) = \mathrm{Re}\left\{ \vec{\mathbb{E}}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right\} = -\hat{\theta} \frac{k_0 Z_0 I_0 L}{4\pi R} \sin\theta \sin(\omega t - k_0 R)$$