Tentamen i Elektromagnetiska fält

2018-01-11, kl 08.30-12.30, SB Multisal – kurskod EEM 015

Hjälpmedel – teori	BETA
Hjälpmedel – räkneproblem	BETA, typgodkänd kalkylator, Formelsamling i Elektromagnetisk fält *utan* egna anteckningar
Besök	cirka kl 09.15 och 11.45
Förfrågningar	Tel. ankn. 1735, Thomas Rylander, Elektroteknik
Lösningar	På kurshemsidan 2018-01-11 kl 12.30
Granskning	2018-02-01 kl 12.00-13.00
Betygsgränser	Tentan 3: 25p; 4: 37p; 5: 48p. 10p/uppgift Bonuspoäng (från höstterminen 2017) får användas för uppgift 2. Max 10p per uppgift.
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

OBS! Tvådelad tentamen!

Teoriuppgift

[Hjälpmedel: BETA]

1. Skriv ned de koordinatoberoende definitionerna av nedanstående deriveringsoperationer på fält och beskriv dem också i ord!

   (a) Gradienten

   (b) Divergensen

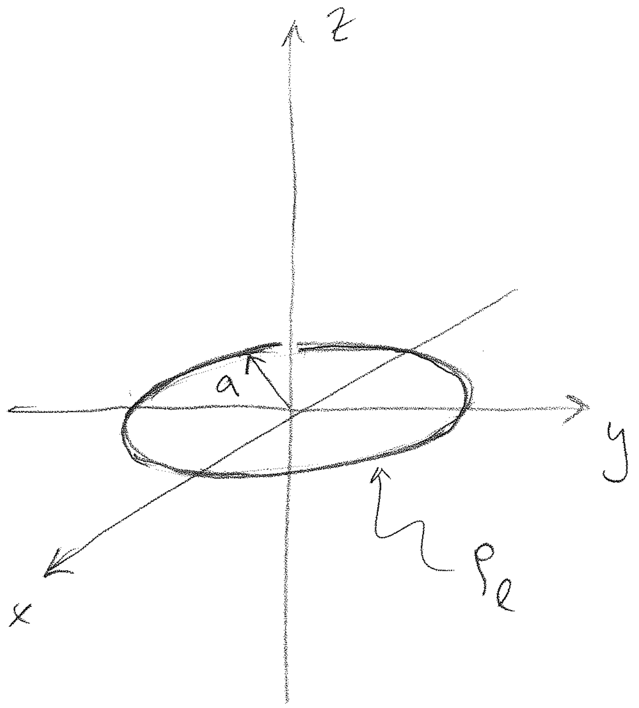
   (c) Rotationen

Räkneuppgifter:

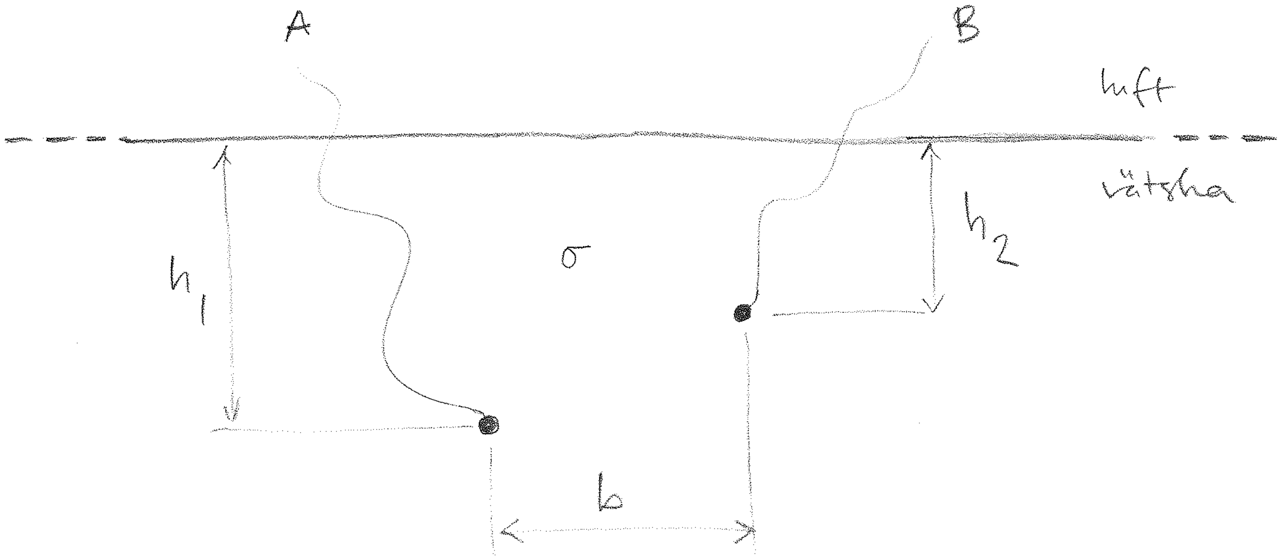
[Hjälpmedel: BETA, typgodkänd kalkylator, formelsamling i Elektromagnetisk fältteori]

2. En linjeladdning med den konstanta linjeladdningstätheten ρ_l är formad som en cirkel med radien a. Cirkeln är placerad i planet $z = 0$ så att dess mittpunkt sammanfaller med origo, så som figuren visar. Beräkna det elektriska fältet $\vec{E}$ längs hela z-axeln.

   Obs! Denna uppgift är hämtad från listan över räkneproblem i kurs-PM.



3. Två mycket tunna, långa, raka och parallella ledare med radien a har längden L och de är placerade i en ledande vätska med konduktiviteten σ enligt figuren nedan. Det horisontella avståndet mellan ledarna betecknas b och de befinner sig på djupet h_1 och h_2 från vätskans yta, vilken gränsar mot luft. Här är radien a mycket mindre än avstånden b, h_1 och h_2, vilka i sin tur är mycket mindre än ledarnas längd L. Beräkna resistansen R mellan inkopplingspunkterna A och B.

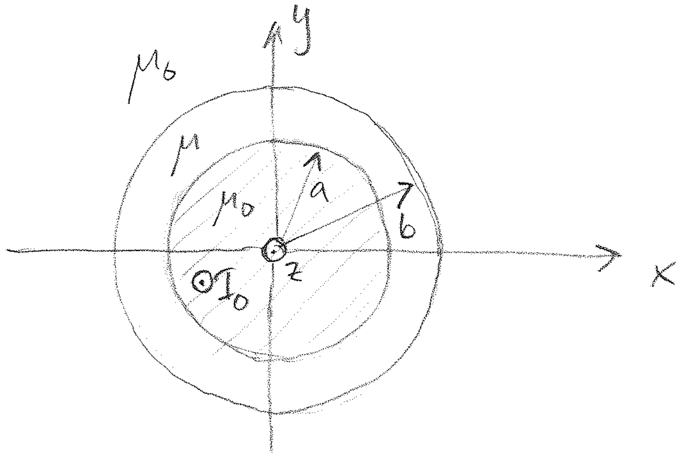


4. En oändligt lång rak tråd med radien a för en likström I_0. Den strömförande tråden är omagnetisk, dvs den har permeabiliteten μ_0. I området $a < r < b$ utanför den strömförande tråden finns ett magnetiskt material med permeabiliteten μ så som figuren visar. Den strömförande tråden med det magnetiska höljet är placerad i vakuum. Lös följande uppgifter:

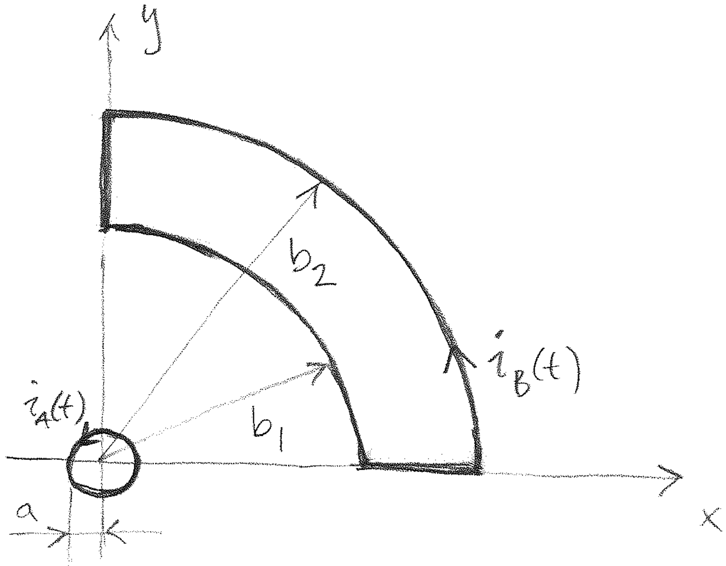
(a) Beräkna det magnetiska fältet $\vec{H}$ överallt. (4p)

(b) Beräkna den magnetiska flödestätheten $\vec{B}$ överallt. (3p)

(a) Beräkna magnetiseringsvektorn $\vec{M}$ överallt. (3p)



5. En mycket liten cirkulär metallslinga med radien a för strömmen $i_A(t) = i_0 \cos(\omega t)$. Den cirkulära slingan är placerad i planet $z = 0$ och dess mittpunkt sammanfaller med origo så som figuren visar. I planet $z = 0$ befinner sig också en annan metallslinga som är formad så som figuren visar. Denna slinga har resistansen R_B och dess induktans är försumbar. Antag att frekvensen ω är tillräckligt låg för att kvasi-stationära förhållanden ska gälla. Beräkna den inducerade strömmen $i_B(t)$.



6. En linjärpolariserad elektromagnetisk planvåg utbreder sig i vakuum och det elektriska fältet ges av

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{x} E_0 \sin\left(\omega t + \frac{k_0}{\sqrt{10}} y + \frac{3k_0}{\sqrt{10}} z + \frac{\pi}{4}\right)$$

Lös följande problem:

(a) Bestäm vågens utbredningsriktning $\hat{k}$. (3p)

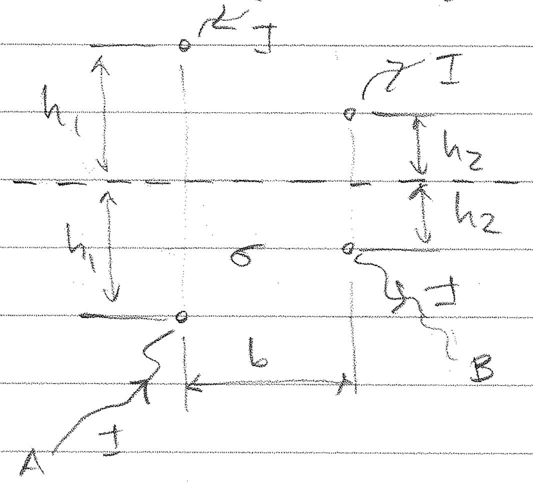
(b) Beräkna det magnetiska fältet $\vec{H}(\vec{r}, t)$ överallt. (7p)

2018.01.11

EEM015 – ELEKTROMAGNETISKA FÄLT

(2) Se lösningsförslag från övning

(3)



Spegling enligt figuren med potential från par av ledare

$$V(\vec r) = \frac{I/L}{2\pi\sigma}\ln\left(\frac{|\vec r - \vec r'_{\ominus}|}{|\vec r - \vec r'_{\oplus}|}\right)$$

$$V_{A} = \frac{I/L}{2\pi\sigma}\ln\left(\frac{\sqrt{b^2+(h_1+h_2)^2}}{a}\cdot\frac{\sqrt{b^2+(h_1-h_2)^2}}{2h_1}\right)$$

$$V_{B} = \frac{I/L}{2\pi\sigma}\ln\left(\frac{a}{\sqrt{b^2+(h_1+h_2)^2}}\cdot\frac{2h_2}{\sqrt{b^2+(h_1-h_2)^2}}\right)$$

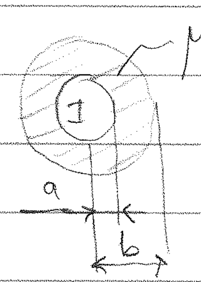
Spänningen $U = V_A - V_B$ är

$$U = \frac{I/L}{2\pi\sigma}\ln\left(\frac{[b^2+(h_1+h_2)^2][b^2+(h_1-h_2)^2]}{4a^2h_1h_2}\right)$$

vilket ger resistansen

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma L}\ln\left(\frac{[b^2+(h_1+h_2)^2][b^2+(h_1-h_2)^2]}{4a^2h_1h_2}\right)$$

(4)



Symmetri ger att $\vec H = \hat\varphi H_\varphi(r)$ överallt och Ampères lag med cirkulär integrationskurva L (radie r) ger

$$\oint_L \vec H\cdot d\vec l = H_\varphi(r)\,2\pi r = I_{omsl} = \begin{cases} I_0 (r/a)^2 & \text{då } r<a \\ I_0 & \text{då } r>a \end{cases}$$

Detta ger det magnetiska fältet

$$\vec{H}(\vec{r}) = \begin{cases} \hat{\varphi}\,\dfrac{I_0 r}{2\pi a^2} & \text{då } r<a \\ \hat{\varphi}\,\dfrac{I_0}{2\pi r} & \text{då } r>a \end{cases}$$

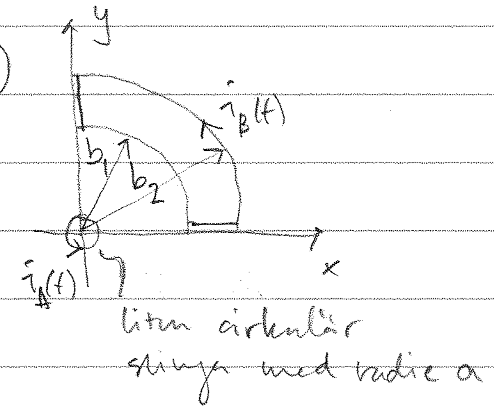
och den magnetiska flödestätheten

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu(\vec{r})\,\vec{H}(\vec{r}) = \begin{cases} \hat{\varphi}\,\dfrac{\mu_0 I_0 r}{2\pi a^2} & \text{då } r<a \\ \hat{\varphi}\,\dfrac{\mu_0 \mu_r I_0}{2\pi r} & \text{då } a<r<b \\ \hat{\varphi}\,\dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi r} & \text{då } r>b \end{cases}$$

och magnetiseringsvektorn

$$\vec{M}(\vec{r}) = \frac{\vec{B}(\vec{r})}{\mu_0} - \vec{H}(\vec{r}) = \begin{cases} \hat{\varphi}\,\dfrac{(\mu_r - 1) I_0}{2\pi r} & \text{då } a<r<b \\ \vec{0} & \text{då } r<a \text{ och } r>b \end{cases}$$

5



Vektorpotentialen från den lilla slingan ges av

$$\vec{A}(\vec{r}) = \hat{\varphi}\,\frac{\mu_0 (i_0 \pi a^2) \sin\theta}{4\pi R^2}$$

Flödet genom den stora slingan blir

$$\Phi = \oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 i_0 a^2}{4}\left(\frac{1}{b_2^2}\frac{\pi}{2}b_2 - \frac{1}{b_1^2}\frac{\pi}{2}b_1\right)$$

$$= \frac{\mu_0 \hat{i}_0 \pi a^2}{8}\left(\frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_1}\right)$$

Den inducerande strömmen $\hat{i}_B$ ges då av

$$\hat{i}_B = \frac{\mathcal{V}}{R_B} = -\frac{1}{R_B} j\omega \Phi = -\frac{j\omega \mu_0 \hat{i}_0 \pi a^2}{8R_B}\left(\frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_1}\right)$$

och i tidsplanet fås

$$i_B(t) = \mathrm{Re}\left\{\hat{i}_B e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{-\frac{j\omega \mu_0 \hat{i}_0 \pi a^2}{8R_B}\left(\frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_1}\right)e^{j\omega t}\right\}$$

$$= \frac{\omega \mu_0 \hat{i}_0 \pi a^2}{8R_B}\left(\frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_1}\right)\sin(\omega t)$$

6 I frekvensplanet ges det elektriska fältet av

$$\vec{E} = \hat{x} E_0 (-j) \exp\left[j\left(\frac{k_0}{\sqrt{10}} y + \frac{3k_0}{\sqrt{10}} z + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \hat{x}(-jE_0) \exp\left[-jk_0 \underbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\hat{y} - \frac{3}{\sqrt{10}}\hat{z}\right)}_{=\hat{k}} \cdot \vec{r} + j\frac{\pi}{4}\right]$$

Det magnetiska fältet ges av

$$\vec{H} = \frac{k_0}{\omega\mu_0}\hat{k}\times\vec{E} = \frac{1}{\eta_0}\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & -1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ & $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$

$$= \frac{1}{\eta_0}\left(\hat{y}\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) + \hat{z}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right) E_x$$

$$= \frac{-3\hat{y}+\hat{z}}{\sqrt{10}} \cdot \frac{-jE_0}{\eta_0} \exp\left[j\left(\frac{k_0}{\sqrt{10}}y + \frac{3k_0}{\sqrt{10}} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

och i tidsplanet fås

$$\vec{H}(\vec{r},t) = Re\left\{\vec{H} e^{j\omega t}\right\}$$

$$= \frac{-3\hat{y}+\hat{z}}{\sqrt{10}} \cdot \frac{E_0}{\eta_0} \sin\left(\omega t + \frac{k_0}{\sqrt{10}}y + \frac{3k_0}{\sqrt{10}} + \frac{\pi}{4}\right)$$