Tentamen i Elektromagnetiska fält

2017-08-16, kl 14.00-18.00, "Maskin"-salar – kurskod EEM 015

Hjälpmedel – teori	BETA
Hjälpmedel – räkneproblem	BETA, typgodkänd kalkylator, Formelsamling i Elektromagnetisk fält *utan* egna anteckningar
Besök	Cirka kl 15.15 och kl 16.45
Förfrågningar	Tel. ankn. 1735 Thomas Rylander, Elektroteknik
Granskning	2017-09-06 kl 12.00-13.00 i Landahlsrummet (våning 7 "rakt ovanför Kajsabaren")
Betygsgränser	Tentan 3: 25p; 4: 37p; 5: 48p. 10p/uppgift Bonuspoäng (från höstterminen 2016) får användas för uppgift 6. Max 10p per uppgift.
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

OBS! Tvådelad tentamen!

Teoriuppgift

[Hjälpmedel: BETA]

1. Visa att ömsesidiga elektrostatiska energin i ett system av N st punktladdningar blir

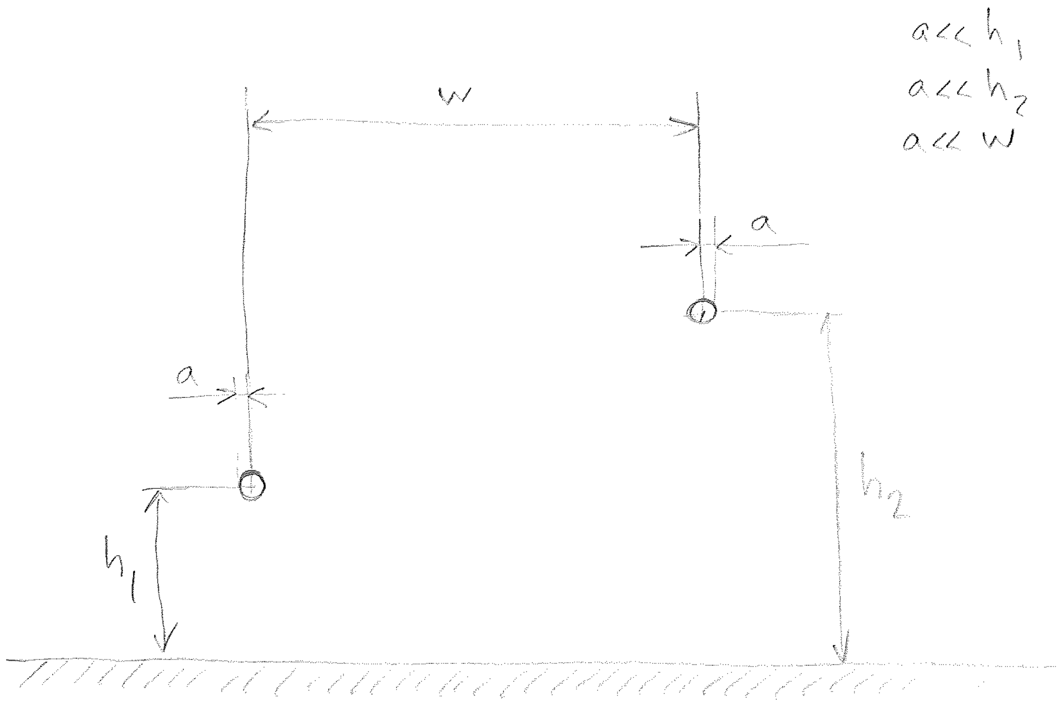
$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i V_i$$

Generalisera resultatet till att gälla den totala elektrostatiska energin hos en i rummet begränsad, kontinuerlig laddningsfördelning $\rho_{\mathrm{v}}(\vec{r})$.

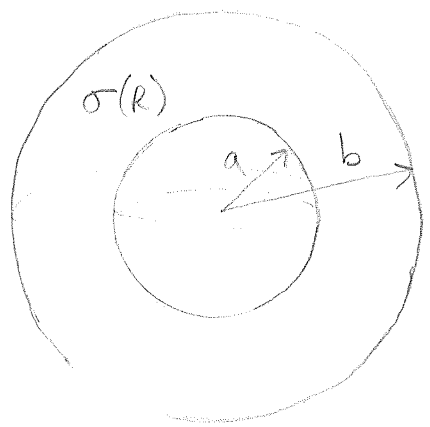
Räkneuppgifter:

[Hjälpmedel: BETA, typgodkänd kalkylator, formelsamling i Elektromagnetisk fältteori]

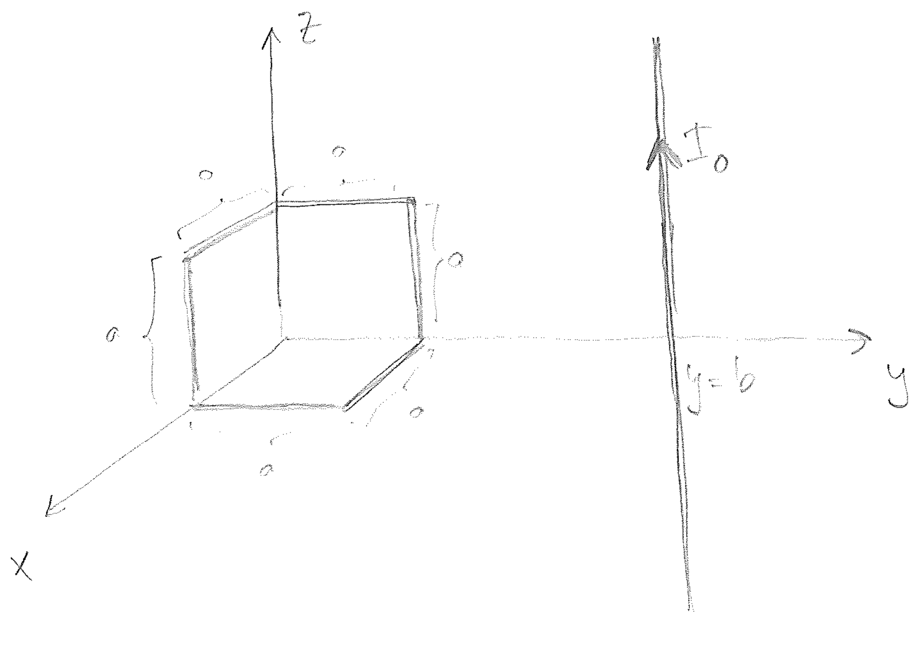
2. Två oändligt långa parallella trådar med radien a är placerade över ett jordplan så som figuren visar. Båda trådarna är parallella med jordplanet. Beräkna kapacitansen per längdenhet mellan trådarna.



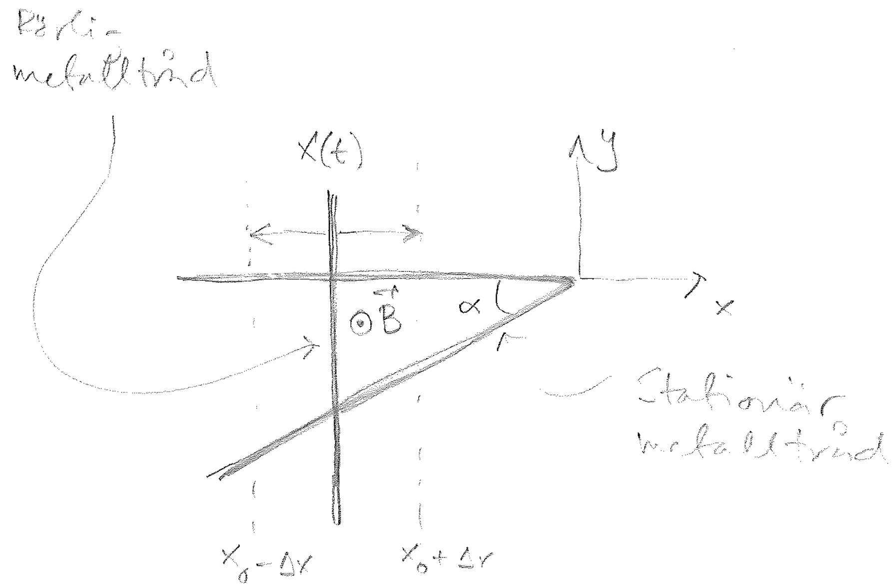
3. Två elektroder är konstruerade med hjälp av två koncentriska sfäriska metallskal med radierna a och b, där $a < b$. I området $a < R < b$ mellan elektroder så finns ett ledande material med konduktiviteten $\sigma(R) = \sigma_0(R/a)^2$. Beräkna resistansen mellan elektroderna.



4. En sluten metallslinga är uppbyggd av sex stycken raka metalltrådar som var och en har längden a så som figuren visar. En oändligt lång rak strömförande ledare är parallell med z-axeln och placerad så att den skär planet $z = 0$ i punkten $x = 0$ och $y = b > a$. Beräkna beloppet av det magnetiska flödet genom den slutna metallslingan på grund av en likström I_0 som flyter genom den raka tråden.



5. En metalltråd är formad så att den består av två långa raka trådar som tillsammans bildar en vinkel $\alpha > 0$. Denna konstruktion är stationär och placerad i förhållande till ett koordinatsystem så som figuren visar. En annan rak metalltråd kan röra sig så att den hela tiden är i kontakt med den stationära tråden, vilket ger en sluten krets i varje ögonblick. Den rörliga tråden är parallell med y-axeln och har den tidsberoende x-koordinaten $x(t) = x_0 + \Delta x \cos(\omega t)$ där $x_0 < 0$ och $0 < \Delta x < |x_0|$. I området där denna slutna krets befinner sig finns en konstant magnetisk flödestäthet $\vec{B} = \hat{z} B_0$. Den slutna kretsens totala resistans är R och dess självinduktans är försumbar. Med andra ord är ω är tillräckligt liten för att anta kvasi-magnetostatik. Beräkna den inducerade strömmen $i(t)$ som flyter i den slutna kretsen.



6. En tidsharmonisk elektromagnetisk våg skapas av en källa med vinkelfrekvensen ω. Vågen utbreder sig i vakuum och beskrivs av det elektriska fältet

$$\vec{\boldsymbol{E}}(x, z) = \hat{y} E_0 \exp(-\alpha z) \exp(-j\beta x)$$

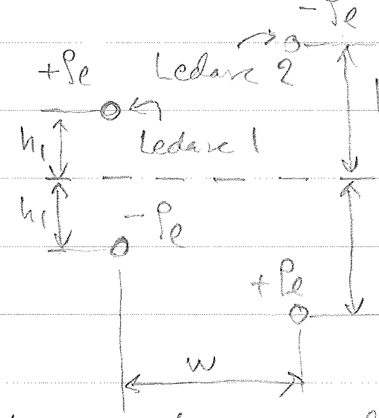
där α och β är reella konstanter. Bestäm relationen mellan α, β och ω så att vågekvationen i vakuum är uppfylld.

Obs! Denna uppgift är hämtad från listan över räkneproblem i kurs-PM.

2017.08.16

ELEKTROMAGNETISKA FÄLT - EEM015

(2)



Potential på ledare 1 ges av

$$V_1 = \frac{\rho_e}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{2h_1}{a} \cdot \frac{\sqrt{(h_2-h_1)^2+w^2}}{\sqrt{(h_2+h_1)^2+w^2}}\right)$$

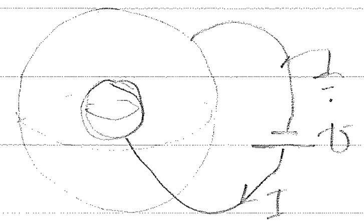
och motsvarande för ledare 2 ges av

$$V_2 = \frac{\rho_e}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{a}{2h_2} \cdot \frac{\sqrt{(h_2+h_1)^2+w^2}}{\sqrt{(h_2-h_1)^2+w^2}}\right)$$

Kapacitansen per längdenhet blir

$$\frac{C}{L} = \frac{\overbrace{q/L}^{\rho_e}}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{4h_1h_2}{a^2} \cdot \frac{(h_2-h_1)^2+w^2}{(h_2+h_1)^2+w^2}\right)}$$

(3)



$$\vec{J}_v = \hat{R}\frac{I}{4\pi R^2} \Rightarrow \vec{E} = \hat{R}\frac{I}{4\pi\sigma(R)R^2}$$

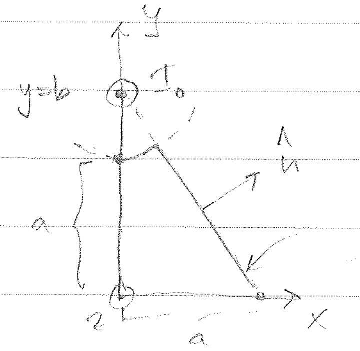
med $\sigma(R) = \sigma_0\left(\frac{R}{a}\right)^2$

Spänningen blir därmed

$$U = -\int_{R=a}^{b}\left(\hat{R}\frac{Ia^2}{4\pi\sigma_0 R^4}\right)\cdot\left(-\hat{R}\,dR\right) = \frac{Ia^2}{4\pi\sigma_0}\left[-\frac{1}{3R^3}\right]_{R=a}^{b} = \frac{Ia^2}{12\pi\sigma_0}\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}\right)$$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{12\pi\sigma_0 a}\left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^3\right)$$

(4)



Ampères lag $\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{omsl}$ med symmetri ger att

$$\vec{H}(r) = \hat{\varphi}\,\frac{I_0}{2\pi r}$$

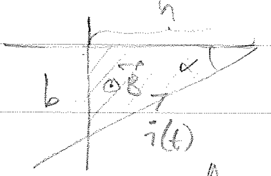
(m.a.p. origo i vale ledare!)

Flödet genom den öppna ytan S blir

$$\Phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_{r=b-a}^{\sqrt{a^2+b^2}} \left(\hat{\varphi}\,\frac{I_0}{2\pi r}\right)\cdot\left(\hat{\varphi}\, a\, dr\right)$$

$$= \frac{I_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b-a}\right) = \frac{I_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{\sqrt{(b/a)^2+1}}{b/a-1}\right)$$

(5)



Area av triangeln är

$$A = \frac{1}{2}bh = \left\{b = h\tan\alpha\right\} = \frac{\tan\alpha}{2}h^2$$

$$= \left\{h = x_0 + \Delta x\cos(\omega t)\right\} = \frac{\tan\alpha}{2}\left(x_0^2 + 2x_0\Delta x\cos(\omega t) + \Delta x^2\cos^2(\omega t)\right)$$

Den inducerade strömmen blir

$$i(t) = \frac{\mathcal{V}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{R}\frac{d}{dt}\left(\int_{S(t)}\vec{B}\cdot d\vec{S}\right) = -\frac{B_0}{R}\frac{dA}{dt}$$

$$= -\frac{B_0\tan\alpha}{2R}\left(-2x_0\Delta x\,\omega\sin(\omega t) + \Delta x^2\, 2\cos(\omega t)(-\omega\sin(\omega t))\right)$$

$$= \frac{B_0\tan\alpha}{2R}\, 2\Delta x^2\left(\frac{x_0}{\Delta x} + \cos(\omega t)\right)\omega\sin(\omega t)$$

$$= \frac{\omega B_0\,\Delta x^2\tan\alpha}{R}\left(\frac{x_0}{\Delta x} + \cos(\omega t)\right)\sin(\omega t)$$