Tentamen i Elektromagnetiska fält

2017-04-12, kl 14.00-18.00, "Maskin"-salar – kurskod EEM 015

Hjälpmedel – teori	BETA
Hjälpmedel – räkneproblem	BETA, typgodkänd kalkylator, Formelsamling i Elektromagnetisk fält *utan* egna anteckningar
Besök	cirka 14.45 och 16.45
Förfrågningar	Tel. ankn. 1735 Thomas Rylander, Signaler och system
Lösningar	På kurshemsidan 2017-04-12 kl 18.00
Granskning	2017-05-02 kl 12.00-13.00
Betygsgränser	Tentan 3: 25p; 4: 37p; 5: 48p. 10p/uppgift Bonuspoäng (från höstterminen 2016) får användas för uppgift 2. Max 10p per uppgift.
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

OBS! Tvådelad tentamen!

Teoriuppgift
[Hjälpmedel: BETA]

1. Visa att den ömsesidiga elektrostatiska energin i ett system av N stycken punktladdningar är

$$W_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i V_i$$

Generalisera resultatet så att det ger den totala elektrostatiska energin för en kontinuerlig laddningsfördelning $\rho_\mathrm{v}(\vec{r}')$ som befinner sig i ett ändligt område i rummet.

Räkneuppgifter:

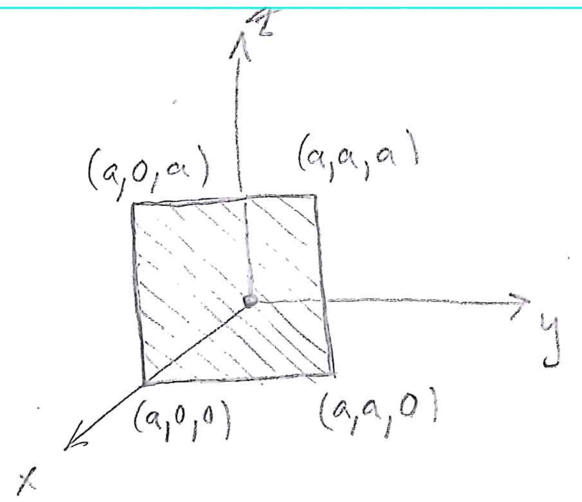
[Hjälpmedel: BETA, typgodkänd kalkylator, formelsamling i Elektromagnetisk fältteori]

2. En punktladdning q befinner sig i origo. Beräkna den elektriska fluxen

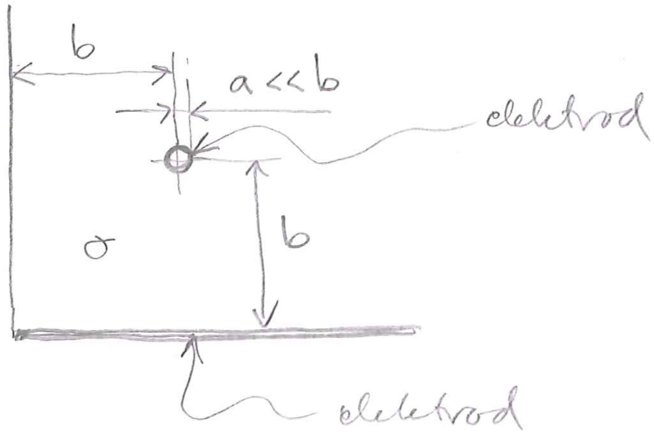
$$\Psi = \int_S \epsilon_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

genom ytan S som är kvadratisk med hörnen i punkterna $(a, 0, 0)$, $(a, a, 0)$, (a, a, a) och $(a, 0, a)$.

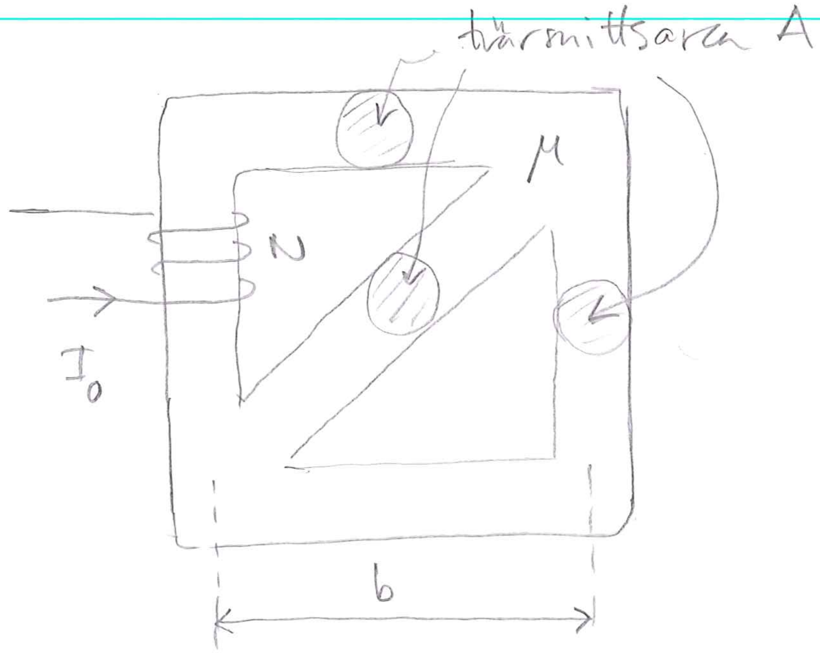
Obs! Denna uppgift är hämtad från listan över räkneproblem i kurs-PM.



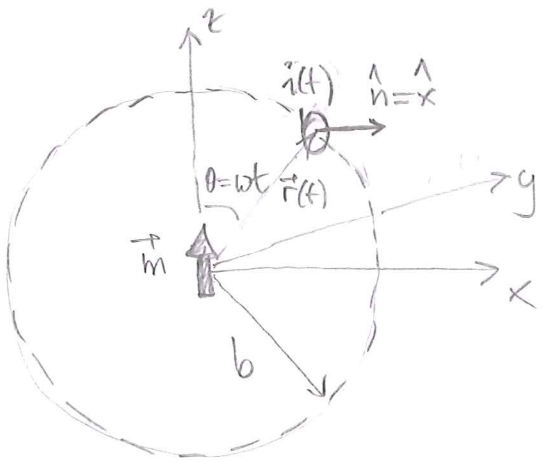
3. En mycket stor skiva med ledningsförmågan σ och tjockleken w är utrustad med ett hål nära ett av hörnen, så som figuren visar. En elektrod placeras i hålet som har radien a och en annan elektrod kopplas längs skivans ena kant. Beräkna resistansen mellan de två elektroderna.



4. En magnetisk krets består av en kvadratisk kärna med en diagonal brygga, så som figuren visar. Den diagonala bryggan och alla sidor på den kvadratiska kärnan har tvärsnittsarean A och permeabiliteten μ. Längs ena sidan av den kvadratiska kärnan lindas en spole med N varv och spolen för likströmmen I_0. Bestäm det magnetiska flödet till storlek och riktning i den diagonala bryggan.



5. En mycket liten cirkulär metallslinga med radien a och resistansen R rör sig runt en magnetisk dipol $\vec{m} = \hat{z}m_0$ placerad i origo, så som figuren visar. Den cirkulära slingan rör sig i en cirkelbana som beskrivs av ortsvektorn $\vec{r}(t) = b(\hat{x}\cos(\omega t) + \hat{z}\sin(\omega t))$, där ω är tillräckligt liten för att anta kvasi-magnetostatik. Den cirkulära slingan är orienterad så att dess ytnormal i varje ögonblick är riktad i $\hat{x}$-riktning. Beräkna den inducerade strömmen $i(t)$ i den cirkulära slingan.



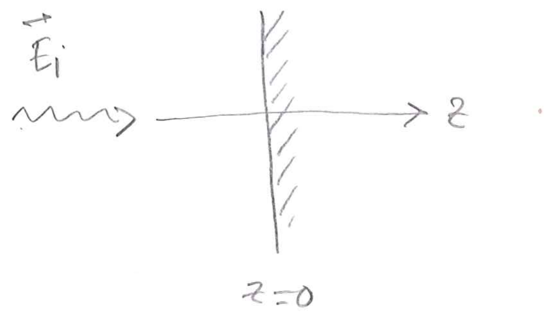
6. En cikulärpolariserad planvåg träffar en oändligt stor skiva som är perfekt elektriskt ledande. Skivan sammanfaller med planet $z = 0$ och planvågen propagerar i positiv z-riktning. Det infallande elektriska fältet ges av

$$\vec{E}_i(\vec{r}, t) = E_0(\hat{x}\cos(\omega t - k_0 z) + \hat{y}\sin(\omega t - k_0 z))$$

där E_0 är en konstant amplitud.

(a) Beräkna det reflekterade elektriska fältet. (5p)

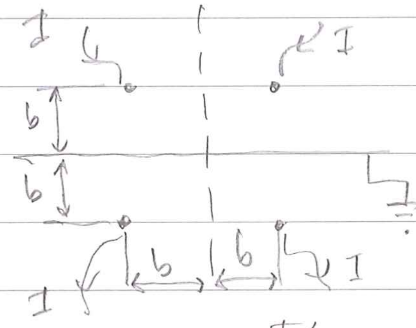
(b) Beräkna det totala magnetiska fältet. (5p)



2017.04.12

ELEKTROMAGNETISKA FÄLT – EEM015

(3) Spegling mha linjekällor, där ett par ger potentialen



$$V(\vec r) = \frac{I/w}{2\pi\sigma}\ln\left(\frac{|\vec r - \vec r\,'_{\ominus}|}{|\vec r - \vec r\,'_{\oplus}|}\right)$$

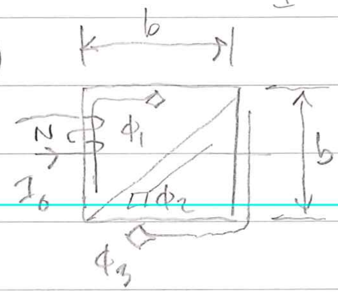
$\Rightarrow$ Potentialen på den cirkulära elektroden blir därmed

$$V_{\oplus} = \frac{I/w}{2\pi\sigma}\ln\left(\frac{\sqrt{2}\,2b}{2b}\cdot\frac{2b}{a}\right)$$

vilket ger resistansen

$$R = \frac{V_{\oplus} - 0}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma w}\ln\left(\frac{2\sqrt{2}\,b}{a}\right)$$

(4)



Ampères lag $\oint_L \vec H\cdot d\vec \ell = I_{omsl}$

$$\begin{cases} H_1 2b + H_2\sqrt{2}\,b = NI_0 \\ H_2\sqrt{2}\,b - H_3 2b = 0 \end{cases}$$

Flödet $\Phi_i = B_i A = \mu H_i A \Rightarrow H_i = \Phi_i/\mu A$, vilket ger

$$\begin{cases} \frac{2b}{\mu A}\Phi_1 + \frac{\sqrt{2}\,b}{\mu A}\Phi_2 = NI_0 \quad (1) \\ \underbrace{\frac{\sqrt{2}\,b}{\mu A}}_{\mathcal{R}_2}\Phi_2 - \underbrace{\frac{2b}{\mu A}}_{\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_3}\Phi_3 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

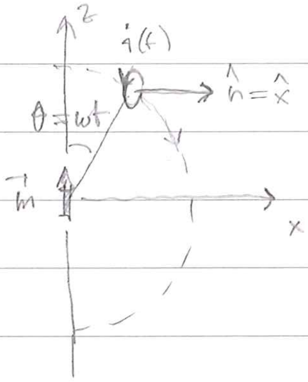
Inga magn. monopoler $\oint_S \vec B\cdot d\vec S = 0$ ger att

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3 \quad (3)$$

Lösning av ekvationssystem (1)–(3) ger

$$\Phi_2 = \frac{NI_0}{\mathcal{R}_1 + 2\mathcal{R}_2} = \frac{\mu A N I_0}{2b(1+\sqrt{2})}$$ (se figuren för riktning)

(5)



Magnetisk flödestäthet ges av

$$\vec B = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi b^3}\left(\hat R\, 2\cos\theta + \hat\theta \sin\theta\right)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \hat R = \hat z\cos\theta + \hat x\sin\theta \\ \hat\theta = \hat y\times\hat R = \hat x\cos\theta - \hat z\sin\theta \end{array} \right\}$$

$$= \frac{\mu_0 m_0}{4\pi b^3}\left((\hat x\sin\theta + \hat z\cos\theta)2\cos\theta + (\hat x\cos\theta - \hat z\sin\theta)\sin\theta\right)$$

$$= \frac{\mu_0 m_0}{4\pi b^3}\left(\hat x \underbrace{3\cos\theta\sin\theta}_{=\frac{3}{2}\sin(2\theta)} + \hat z\left(2\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\right)$$

Den inducerade strömmen ges av

$$i(t) = \frac{V(t)}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{R}\frac{d}{dt}\int_S \vec B\cdot\hat n\, dS$$

$$= -\frac{1}{R}\frac{d}{dt}\left(\frac{3\mu_0 m_0}{8\pi b^3}\sin(2\omega t)\,\pi a^2\right) = -\frac{3\mu_0 m_0 \omega a^2}{4 b^3 R}\cos(2\omega t)$$

(6) (a) $\vec E_i = E_0(\hat x - j\hat y)e^{-jk_0 z}$ och den reflekterade vågens elektriska fält $\vec E_r = \vec E_{r,0}e^{+jk_0 z}$ (där $\hat z\cdot\vec E_{r,0} = 0$) ger

$$\underbrace{\hat n}_{-\hat z}\times\left(\vec E_i + \vec E_r\right)\Big|_{z=0} = \vec 0 \Rightarrow E_0(\hat x - j\hat y) + \vec E_{r,0} = \vec 0 \Rightarrow \vec E_{r,0} = -E_0(\hat x - j\hat y)$$

och det reflekterade elektriska fältet blir

$$\vec E_r = \mathrm{Re}\left\{-E_0(\hat x - j\hat y)e^{j(\omega t + k_0 z)}\right\} = -E_0\left(\hat x\cos(\omega t + k_0 z) + \hat y\sin(\omega t + k_0 z)\right)$$

(b) $\vec H = (\nabla\times\vec E)/(-j\omega\mu_0) = \{\text{Beta}\} = \frac{2E_0 k_0}{\omega\mu_0}(j\hat x + \hat y)\cos(k_0 z)$

och i tidsplanet blir detta

$$\vec H = \mathrm{Re}\left\{\frac{2E_0 k_0}{\omega\mu_0}(j\hat x + \hat y)\cos(k_0 z)\, e^{j\omega t}\right\}$$

$$= \frac{2E_0 k_0}{\omega\mu_0}\left(-\hat x\sin(\omega t) + \hat y\cos(\omega t)\right)\cos(k_0 z)$$