Tentamen i Elektromagnetiska fält

2016-08-17, kl 14.00-18.00, "Maskin"-salar – kurskod EEM015

Hjälpmedel – teori	BETA
Hjälpmedel – räkneproblem	BETA, typgodkänd kalkylator, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori *utan* egna anteckningar
Besök	cirka 15.15 och 16.45
Förfrågningar	Tel. ankn. 1735 Thomas Rylander, Signaler och system
Lösningar	Anslås på kursens hemsida 2016-08-17 kl 18.00
Granskning	2016-09-14 kl 12.00-13.00
Betygsgränser	Tentan 3: 25p; 4: 37p; 5: 48p. 10p/uppgift
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

OBS! Tvådelad tentamen!

Teoriuppgift

[Hjälpmedel: BETA]

1. Antag en situation med ett medium som är källfritt och ickeledande med permittiviteten ϵ och permeabiliteten μ. Använd Maxwells ekvationer

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{\mathrm{v}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho_{\mathrm{v}}, \quad \text{och} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

för att härleda den homogena vågekvationen för

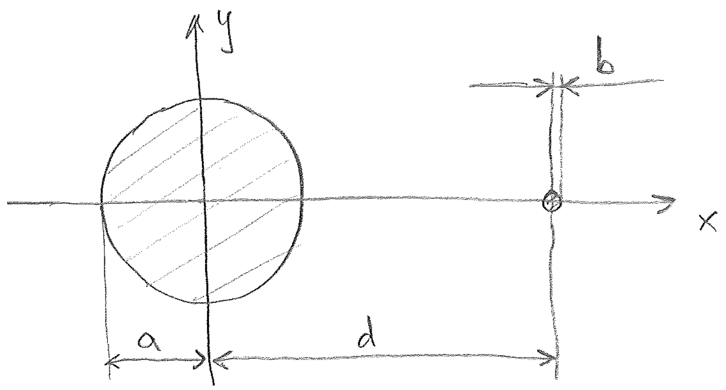
(a) det elektriska fältet och

(b) det magnetiska fältet.

Räkneuppgifter:

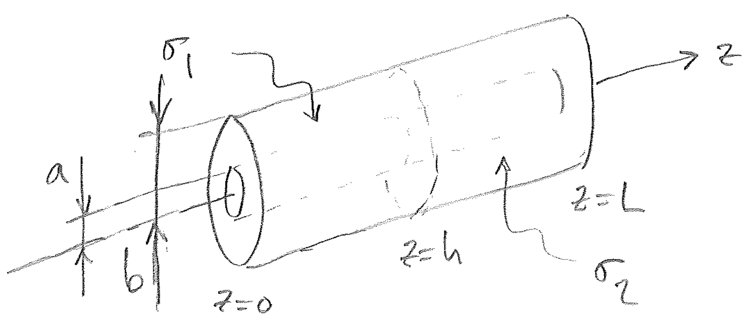
[Hjälpmedel: BETA, typgodkänd kalkylator, formelsamling i Elektromagnetisk fältteori]

2. Två oändligt långa metallcylindrar med radierna a och b (där $b \ll a$) är parallella med varandra och placerade så som figuren visar. Avståndet mellan cylindrarnas centrum är d och de är placerade i luft. Beräkna kapacitansen per längdenhet mellan cylindrarna.

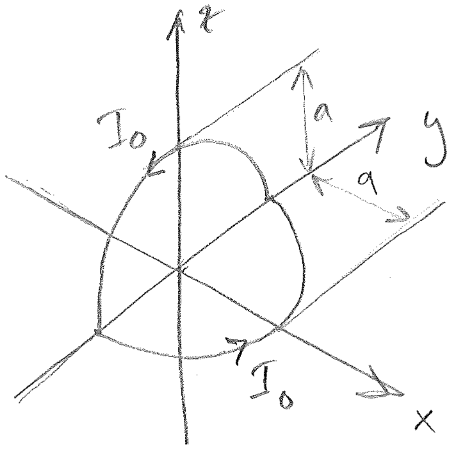


Obs! Denna uppgift är hämtad från exempelsamlingen.

3. Två metallrör med radierna a och b (där $b > a$) är placerade så som figuren visar. De två metallrören har båda längden L. I området $0 < z < h$ finns ett material med ledningsförmågan σ_1 och i området $h < z < L$ finns ett annat material med ledningsförmågan σ_2. Bestäm resistansen R mellan det inre metallröret med radie a och det yttre metallröret med radie b.



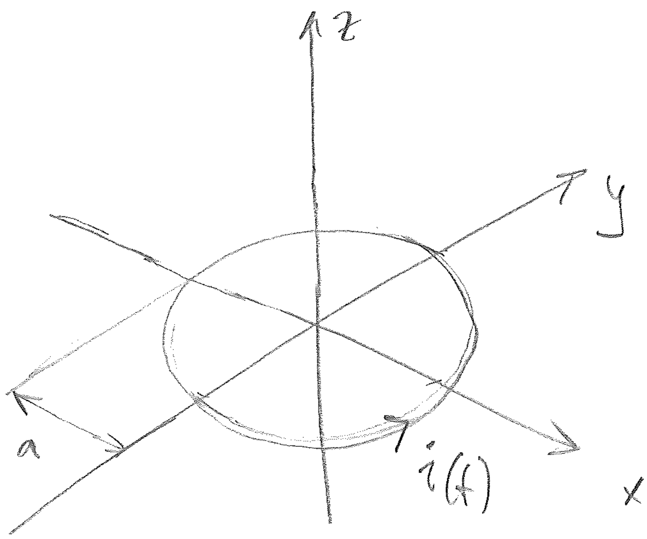
4. En metalltråd är formad som två halvcirkelbågar så som figuren visar. Halvcirkelbågarna har radien a och slingan för likströmmen I_0. Beräkna den magnetiska flödestätheten i origo.



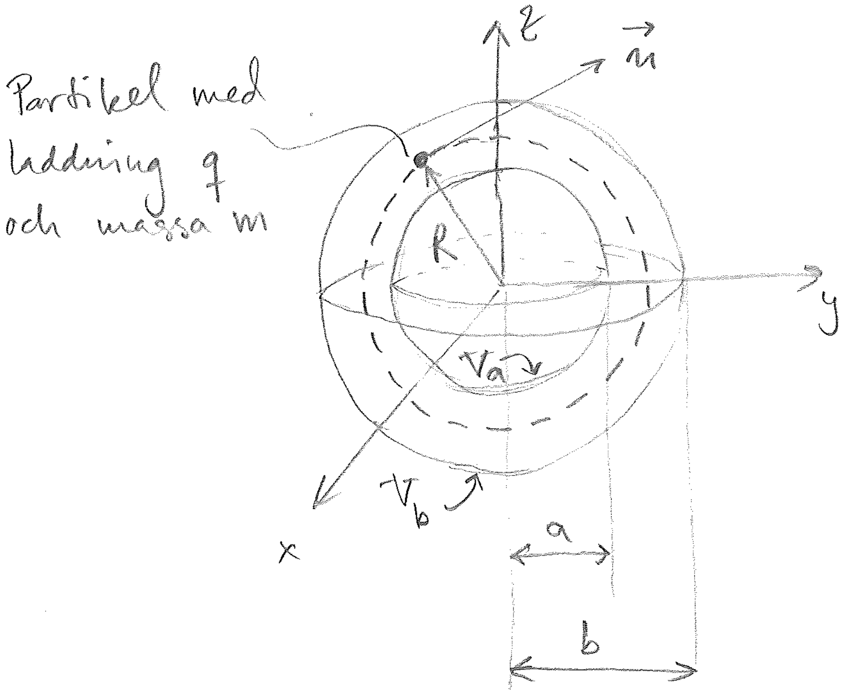
5. En tunn metalltråd är formad som en plan cirkulär slinga med radien a och den ligger i planet $z = 0$ så som figuren visar. Slingan befinner sig i ett område med ett roterande magnetfält enligt

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = B_0(\hat{x}\sin(\omega t) + \hat{z}\cos(\omega t)) \tag{1}$$

där B_0 och ω är konstanter. Beräkna den inducerade strömmen $i(t)$ i slingan givet att slingans resistans är R och att dess självinduktans är L. Problemet är kvasimagnetostatiskt men slingans självinduktans får *inte* försummas.



6. Två metallsfärer med radierna a och b (där $b > a$) är placerade så som figuren visar. Mellan sfärerna rör sig en laddad partikel med laddning $q > 0$ och massan m längs en cirkelformad bana med radien R. Centrifugalkraften på den laddade partikeln är därmed $\vec{F}_c = \hat{R}mu^2/R$, där u är partikelns hastighet. Det inre metallsfären har potentialen V_a och det yttre metallsfären har potentialen V_b, där $V_a < V_b$. Vid vilken hastighet u kommer den laddade partikeln röra sig längs en cirkelbana med radien $R = (a+b)/2$? (Tyngdkraft och luftmotstånd kan försummas.)

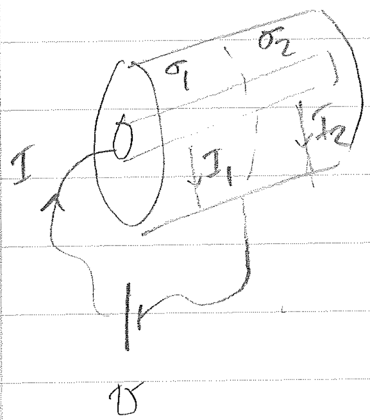


2016-08-17

ELEKTROMAGNETISKA FÄLT FÖR E2

(2) Se övningsanteckningar

(3) Cylindrisk symmetri ger $\vec{J}_i = \hat{r} J_{r,i}(r)$ för $i=1,2$.
Randvillkor $\hat{n}_2 \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = \vec{0}$ för $z=h$.



$$I = I_1 + I_2 = \int_{S_1} \vec{J}_1 \cdot d\vec{s} + \int_{S_2} \vec{J}_2 \cdot d\vec{s}$$

$$= 2\pi r h \, J_{r,1}(r) + 2\pi r (L-h) J_{r,2}(r)$$

$$= 2\pi r \left(h \sigma_1 E_{r,1}(r) + (L-h) \sigma_2 E_{r,2}(r) \right)$$

$$= \left\{ E_r = E_{r,1} = E_{r,2} \text{ pga randvillkor för } z=h \right\}$$

$$= 2\pi r (h\sigma_1 + (L-h)\sigma_2) E_r(r)$$

$$\Rightarrow E_r(r) = \frac{I}{2\pi (h\sigma_1 + (L-h)\sigma_2) r}$$

$$U = -\int_{L_{\ominus\to\oplus}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{r=a}^{b} \left(\frac{I}{2\pi (h\sigma_1 + (L-h)\sigma_2) r} \hat{r} \right) \cdot (-\hat{r} \, dr)$$

$$= \frac{I \ln(b/a)}{2\pi (h\sigma_1 + (L-h)\sigma_2)} \Rightarrow R = \frac{U}{I} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi (h\sigma_1 + (L-h)\sigma_2)}$$

(4) Använd Biot-Savarts lag med superposition av slingan i planet $z=0$ med slingan i planet $x=0$.

$$\vec{B}_{z=0}(\vec{r}=\vec{0}) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int_{L_{z=0}} \frac{\vec{dl}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \vec{r}=\vec{0} \;\;\&\;\; \vec{r}' = \hat{r}(\varphi')a = a(\hat{x}\cos\varphi' + \hat{y}\sin\varphi') \\ \vec{r}-\vec{r}' = -\hat{r}a, \;\; |\vec{r}-\vec{r}'| = a \;\;\&\;\; \vec{dl}' = \hat{\varphi}\, a\, d\varphi' \end{array} \right\}$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int_{\varphi'=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(\hat{\varphi}\, a\, d\varphi')}{a^2} \times \frac{-\hat{r}a}{a}$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi a} \int_{\varphi'=-\pi/2}^{\pi/2} \hat{z}\, d\varphi' = \hat{z}\, \frac{\mu_0 I_0}{4a}$$

På samma sätt (med 90° rotation) fås

$$\vec{B}_{x=0}(\vec{r}=\vec{0}) = \hat{x}\, \frac{\mu_0 I_0}{4a}$$

Superposition ger därmed

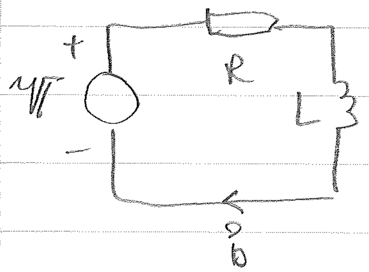
$$\vec{B}(\vec{r}=\vec{0}) = (\hat{x}+\hat{z})\, \frac{\mu_0 I_0}{4a}$$

(5) Flödet genom slingan är

$$\Phi(t) = \int_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = \int_S B_0(\hat{x}\sin(\omega t) + \hat{z}\cos(\omega t)) \cdot (\hat{z}\, dS)$$

$$= B_0 \cos(\omega t) \underbrace{\int_S dS}_{=\text{arean av slingan} = \pi a^2} = \pi a^2 B_0 \cos(\omega t)$$

I frekvensplanet blir detta flödet $\Phi = \pi a^2 B_0$, vilket ger den inducerade spänningen $\mathcal{V} = -j\omega\Phi = -j\omega\pi a^2 B_0$.
Kretsen nedan ger motsvarande ström



$$\hat{i} = \frac{\mathcal{V}}{R+j\omega L} = \frac{-j\omega\pi a^2 B_0}{R} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+j\omega L/R}}_{= \frac{1-j\omega L/R}{1+(\omega L/R)^2}}$$

I tidsplanet blir detta

$$i(t) = \mathrm{Re}\left\{ \frac{-j\omega\pi a^2 B_0}{R} \cdot \frac{e^{-j\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)}}{\sqrt{1+(\omega L/R)^2}}\, e^{j\omega t} \right\}$$

$$= \frac{\omega\pi a^2 B_0}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(\omega L/R)^2}} \cos\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right) - \frac{\pi}{2}\right)$$

(Fallet då L är försumbar svarar mot $\omega L/R \to 0$)

6. Mellan metallsfärerna finns ett elektriskt fält som är radiellt riktat och endast beroende av R (dvs oberoende av φ & θ), $\Rightarrow$ det elektriska fältet (och motsvarande kraft $\vec{F} = q\vec{E}$) är motriktad centrifugalkraften och vinkelrät mot partikelns rörelsebana (dvs. ändrar ej dess hastighet).

Det elektriska fältet bestäms ur Laplace ekvation för V (med randvillkor)

$$\nabla^2 V = 0 \Rightarrow \frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2 \frac{dV}{dR}\right) = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dR} = \frac{C_1}{R^2}$$

$$\Rightarrow V = -\frac{C_1}{R} + C_2 \quad \text{med} \quad V(a) = V_a \ \& \ V(b) = V_b$$

$$\Rightarrow V(b) - V(a) = -\frac{C_1}{b} + \frac{C_1}{a} = V_b - V_a$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{V_b - V_a}{1/a - 1/b} \Rightarrow \vec{E} = -\hat{R}\frac{dV}{dR} = -\hat{R}\frac{V_b - V_a}{(1/a - 1/b)R^2}$$

Kraftjämvikt ger

$$\vec{F}_e + \vec{F}_c = q\vec{E} + \hat{R}\, m u^2 / R$$

$$= \hat{R}\left[-q\frac{V_b - V_a}{(1/a - 1/b)R^2} + \frac{m u^2}{R}\right] = \vec{0}$$

$$\Rightarrow u = \sqrt{\frac{q}{m} \cdot \frac{V_b - V_a}{1/a - 1/b} \cdot \frac{1}{R}} = \left\{ R = \frac{a+b}{2} \right\}$$

$$= \sqrt{\frac{q}{m} \cdot \frac{2ab\,(V_b - V_a)}{(b-a)\,(b+a)}}$$

$$= \sqrt{\frac{q}{m} \cdot \frac{2ab}{b^2 - a^2} \cdot (V_b - V_a)}$$