Tentamen i Elektromagnetiska fält

2016-04-08, kl 14.00-18.00, "Maskin"-salar – kurskod EEM015

Hjälpmedel – teori	BETA
Hjälpmedel – räkneproblem	BETA, typgodkänd kalkylator, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori *utan* egna anteckningar
Besök	cirka 09.15 och 11.15
Förfrågningar	Tel. ankn. 1710 Johan Nohlert, Signaler och system
Lösningar	Anslås på kursens hemsida 2016-01-14 kl 12.30
Granskning	2016-04-22 kl 12.00-13.00
Betygsgränser	Tentan 3: 25p; 4: 37p; 5: 48p. 10p/uppgift
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

OBS! Tvådelad tentamen!

Teoriuppgift

[Hjälpmedel: BETA]

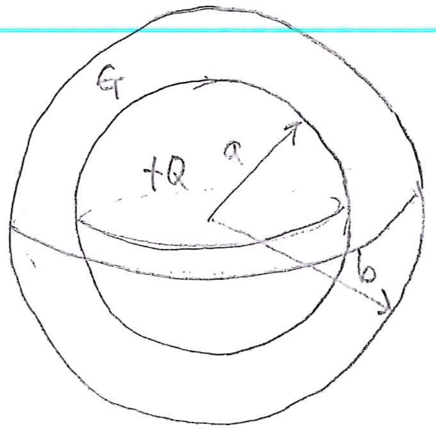
1. Definiera den makroskopiska strömtätheten $\vec{J}_{\rm v}$. Härled ur den elektriska laddningens oförstörbarhet den så kallade kontinuitetsekvationen

$$\nabla \cdot \vec{J}_{\rm v} = -\frac{\partial \rho_{\rm v}}{\partial t}.$$

Räkneuppgifter:

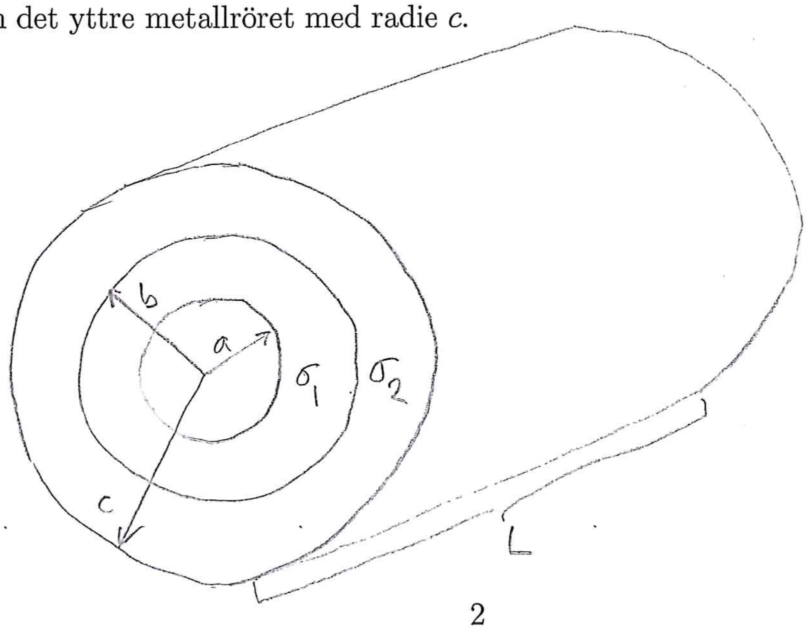
[Hjälpmedel: BETA, typgodkänd kalkylator, formelsamling i Elektromagnetisk fältteori]

2. En metallsfär med radien a har ett dielektriskt skal som upptar området $a < R < b$. Den relativa permittiviteten för det dielektriska skalet är $\epsilon_{\rm r}$ och metallsfären har den totala laddning Q. Beräkna den elektriska potentialen överallt.

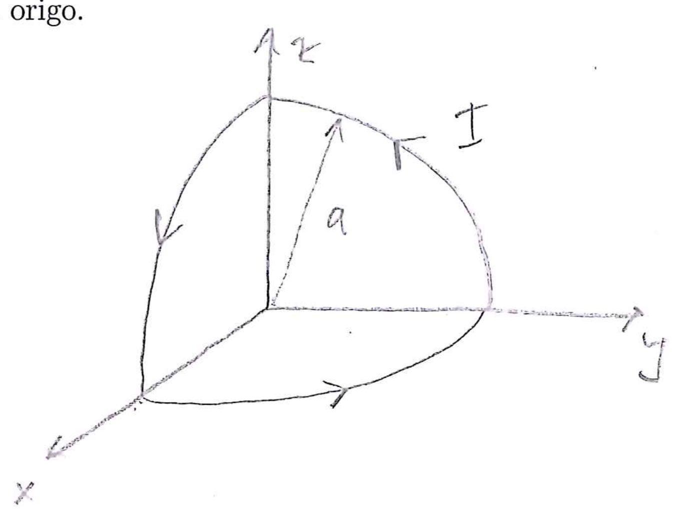


Obs! Denna uppgift är hämtad från exempelsamlingen.

3. Tre tunna metallrör med radierna $a < b < c$ är placerade så som figuren visar. De tre metallrören har alla längden L. I området $a < r < b$ finns ett material med ledningsförmågan σ_1 och i området $b < r < c$ finns ett annat material med ledningsförmågan σ_2. Bestäm resistansen mellan det inre metallröret med radie a och det yttre metallröret med radie c.



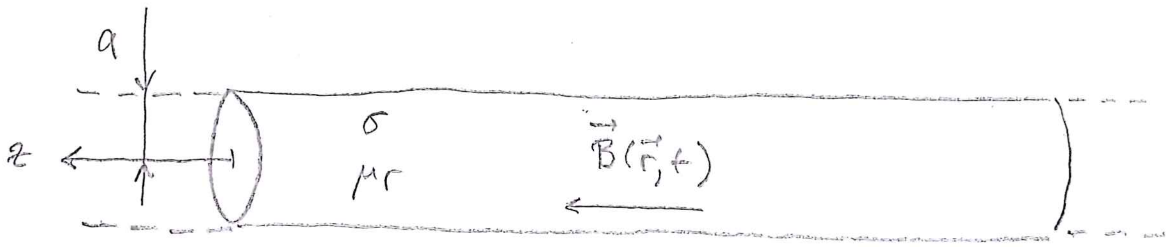
4. En metalltråd är formad som tre kvartcirkelbågar så som figuren visar. Kvartcirkelbågarna har radien a och slingan för likströmmen I. Beräkna den magnetiska flödestätheten i origo.



5. En ledande cirkulär cylinder med radien a har ledningsförmågan σ och den relativa permeabiliteten μ_r. En spole är lindad runt cylindern och i spolen flyter en växelström så att den magnetiska flödestätheten inuti den cirkulära cylindern (området $r \leq a$) blir

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \hat{z} B_0 \cos(\omega t).$$

Frekvensen ω är mycket låg och problemet antas vara kvasi-stationärt. Bestäm den aktiva ohmska effektutvecklingen per längdenhet i cylindern.



6. En mycket kort trådantenn med längden l är placerad i fri rymd. På antennen flyter en växelström med amplituden $\boldsymbol{i}_0$, där strömmen är konstant längs trådantennen. Frekvensen ω för växelströmmen är tillräckligt hög för att trådantennen ska stråla ett elektromagnetiskt fält och dess vektorpotential ges av

$$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{r}) = (\hat{R}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta)\mu_0 \frac{e^{-jk_0R}}{4\pi R}\boldsymbol{i}_0 l$$

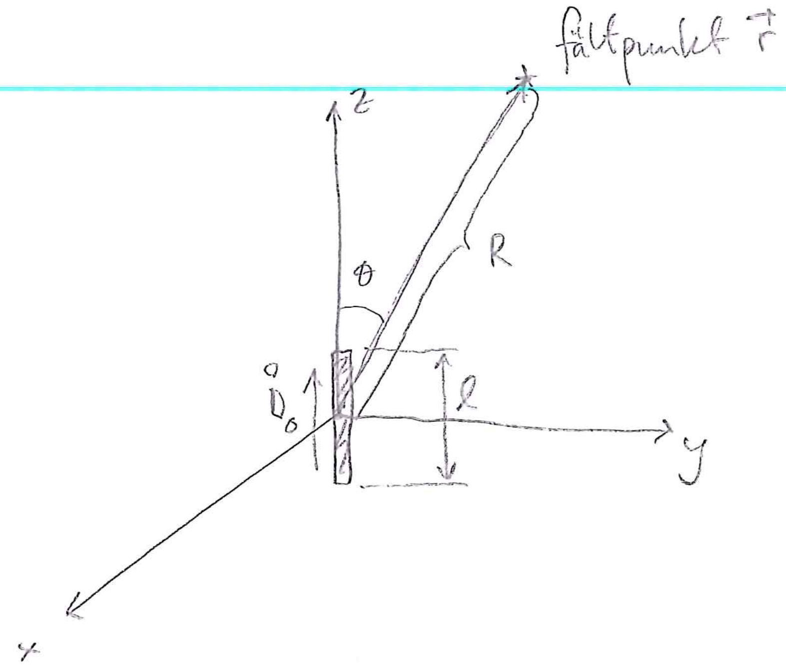
i sfäriska koordinater. Här är $k_0 = \omega/c_0$ där c_0 är ljushastigheten i vakuum.

Lös följande uppgifter i frekvensplanet:

(a) Bestäm det magnetiska fältet överallt. (4p)

(b) Bestäm det elektriska fältet överallt. (4p)

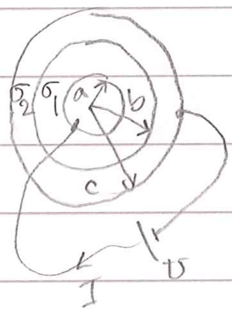
(c) Bestäm Poyntingvektorn i området där $k_0R \gg 1$. (2p)



ELEKTROMAGNETISKA FÄLT FÖR E2 (2016.04.08)

(2) Se övningsanteckningar

(3)



Cylindrisk symmetri ger $\vec{J} = \hat{r} J_r(r)$ och

$$I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 2\pi r L J_r(r) \Rightarrow J_r(r) = \frac{I/L}{2\pi r}$$

Konstitutiv rel. $\vec{J} = \sigma_i \vec{E}_i$ för $i = 1, 2$.

Det elektriska fältet blir

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{I/L}{2\pi\sigma_1 r}\hat{r} & \text{för } a<r<b \\[2ex] \dfrac{I/L}{2\pi\sigma_2 r}\hat{r} & \text{för } b<r<c \end{cases}$$

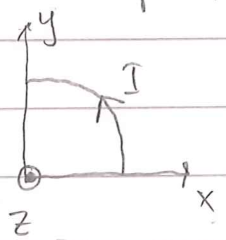
och spänningen U ges av

$$U = -\int_{L_{a\to c}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{r=a}^{b}\left(\frac{I/L}{2\pi\sigma_1 r}\hat{r}\right)\cdot(-\hat{r}\,dr) - \int_{r=b}^{c}\left(\frac{I/L}{2\pi\sigma_2 r}\hat{r}\right)\cdot(-\hat{r}\,dr)$$

$$= \frac{I/L}{2\pi}\left(\frac{\ln(b/a)}{\sigma_1} + \frac{\ln(c/b)}{\sigma_2}\right)$$

$$\Rightarrow R = \frac{U}{I} = \frac{1}{2\pi L}\left(\frac{\ln(b/a)}{\sigma_1} + \frac{\ln(c/b)}{\sigma_2}\right)$$

(4) Beräkna $\vec{B}$ från en kvartcirkelbåge och använd superposition enligt



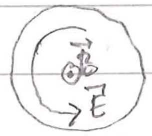
$$\vec{B}_{xy}(\vec{r}=0) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{L_{xy}} \frac{\vec{I}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, dl$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Obs! } \vec{r}=0,\ \vec{r}'=\hat{r}a,\ \vec{I}=\hat{\varphi} I \ \&\ dl = a\,d\varphi \\ \Rightarrow \vec{r}-\vec{r}' = -\hat{r}a \Rightarrow |\vec{r}-\vec{r}'| = a \\ \Rightarrow \hat{\varphi} \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \hat{\varphi}\times(-\hat{r}) = \hat{z} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \frac{I}{a^2}\,\hat{z}\, a\, d\varphi = \hat{z}\,\frac{\mu_0 I}{8a}$$

$$\vec{B}(\vec{r}=\vec{0}) = (\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})\,\frac{\mu_0 I}{8a}$$

(5)



Faradays lag $\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s}$ med cylindrisk symmetri $\vec{E} = \hat{\varphi}E_\varphi(r)$ ger

$$2\cancel{\pi}\cancel{r}\, E_\varphi(r) = -\pi r^2 \frac{\partial B_z}{\partial t} = \cancel{\pi} r^{\cancel{2}} B_0\, \omega \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \hat{\varphi}\, r\, \frac{B_0 \omega}{2} \sin(\omega t) \ \&\ \vec{J}_v = \sigma \vec{E}$$

Aktiv ohmsk effektutveckling ger

$$P = \int_V \vec{E}\cdot\vec{J}_v\, dv = \int_V \sigma |\vec{E}|^2\, dv$$

$$= \int_{r=0}^{a} \sigma \left(\frac{r B_0 \omega}{2} \sin(\omega t) \right)^2 2\pi r L \, dr$$

$$= \frac{\pi \sigma B_0^2 \omega^2 L}{2} \sin^2(\omega t) \int_{r=0}^{a} r^3 \, dr$$

$$= \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_{r=0}^{a} = \frac{a^4}{4}$$

$$= \frac{\pi \sigma B_0^2 \omega^2 L a^4}{8} \sin^2(\omega t)$$

$$\frac{P}{L} = \frac{\pi \sigma B_0^2 \omega^2 a^4}{8} \sin^2(\omega t)$$

(6) $$\vec{A} = \hat{R} \underbrace{\left(\mu_0 \mathring{I}_0 l \frac{e^{-jk_0 R}}{4\pi R} \cos\theta \right)}_{= A_R(R,\theta)} + \hat{\theta} \underbrace{\left(-\mu_0 \mathring{I}_0 l \frac{e^{-jk_0 R}}{4\pi R} \sin\theta \right)}_{= A_\theta(R,\theta)}$$

(a) $$\vec{H} = \mu_0^{-1} \vec{B} = \mu_0^{-1} \nabla \times \vec{A}$$

$$= \hat{\varphi} \frac{1}{\mu_0 R} \left[\frac{\partial (R A_\theta)}{\partial R} - \frac{\partial A_R}{\partial \theta} \right]$$

$$= -\hat{\varphi} \frac{\mathring{I}_0 l}{4\pi} k_0^2 \left[\frac{1}{jk_0 R} + \frac{1}{(jk_0 R)^2} \right] e^{-jk_0 R} \sin\theta = \hat{\varphi} H_\varphi(R,\theta)$$

(b) $$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0} \nabla \times \vec{H}$$

$$= \frac{1}{j\omega\varepsilon_0} \left[\hat{R} \frac{1}{R \sin\theta} \frac{\partial (\sin\theta H_\varphi)}{\partial \theta} - \hat{\theta} \frac{1}{R} \frac{\partial (R H_\varphi)}{\partial R} \right]$$

$$= -\frac{\mathring{I}_0 \ell}{4\pi} \eta_0 k_0^2 \left[\hat{R} \left(\frac{1}{(jk_0R)^2} + \frac{1}{(jk_0R)^3} \right) e^{-jk_0R}\, 2\cos\theta \right.$$
$$\left. + \hat{\theta} \left(\frac{1}{jk_0R} + \frac{1}{(jk_0R)^2} + \frac{1}{(jk_0R)^3} \right) e^{-jk_0R} \sin\theta \right]$$

(c) Då $k_0R \gg 1$ blir fälten

$$\vec{H} = \hat{\varphi}\, j \frac{\mathring{I}_0 \ell}{4\pi} k_0 \frac{e^{-jk_0R}}{R} \sin\theta$$

$$\vec{E} = \hat{\theta}\, j \frac{\mathring{I}_0 \ell}{4\pi} \eta_0 k_0 \frac{e^{-jk_0R}}{R} \sin\theta$$

vilket ger Poyntingvektorn

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^* = \hat{R} \frac{|\mathring{I}_0|^2 \ell^2 k_0^2}{(4\pi)^2} \eta_0 \frac{1}{R^2} \sin^2\theta$$