Tentamen i Elektromagnetiska fält

2016-01-14, kl 08.30-12.30, "Maskin"-salar – kurskod EEM015

Hjälpmedel – teori	BETA
Hjälpmedel – räkneproblem	BETA, typgodkänd kalkylator, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori *utan* egna anteckningar
Besök	cirka 09.15 och 11.15
Förfrågningar	Tel. ankn. 1710 Johan Nohlert, Signaler och system
Lösningar	Anslås på kursens hemsida 2016-01-14 kl 12.30
Granskning	2016-02-08 kl 12.00-13.00
Betygsgränser	Tentan 3: 25p; 4: 37p; 5: 48p. 10p/uppgift
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

OBS! Tvådelad tentamen!

Teoriuppgift
[Hjälpmedel: BETA]

1. Utgå från $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ och $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_\mathrm{v}$. Härled

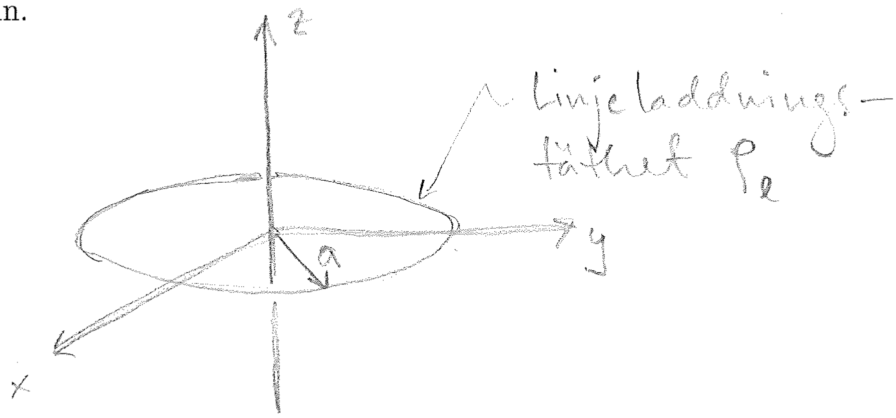
   (a) sambandet mellan normalkomponenterna av $\vec{B}$ och (5p)

   (b) sambandet mellan tangentialkomponenterna av $\vec{H}$ (5p)

   på ömse sidor om en gränsyta mellan två olika material!

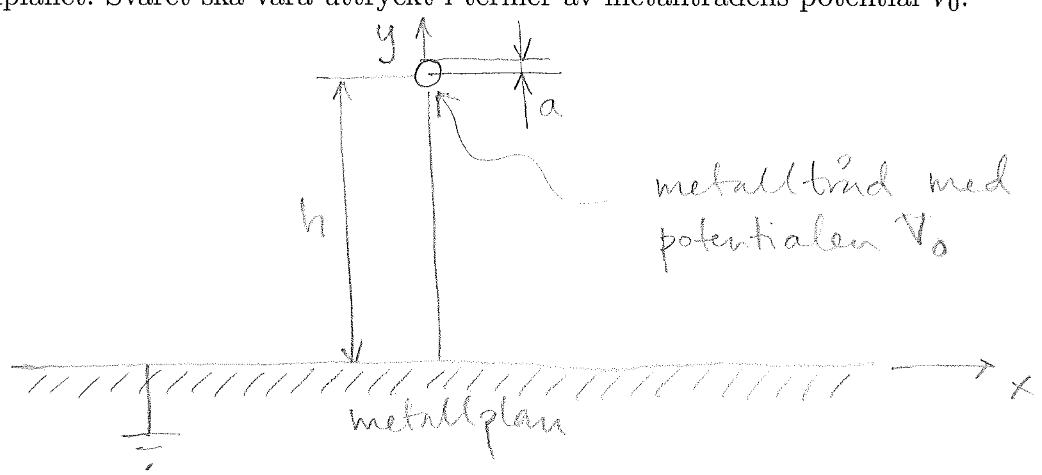
Räkneuppgifter:
[Hjälpmedel: BETA, typgodkänd kalkylator, formelsamling i Elektromagnetisk fältteori]

2. En linjeladdning är formad som en cirkel med radien a och dess linjeladdningstäthet ρ_l är konstant. Den cirkelformade linjeladdningen sammanfaller med planet $z = 0$ och dess mittpunkt är placerad i origo, så som figuren visar. Beräkna det elektriska fältet längs z-axeln.

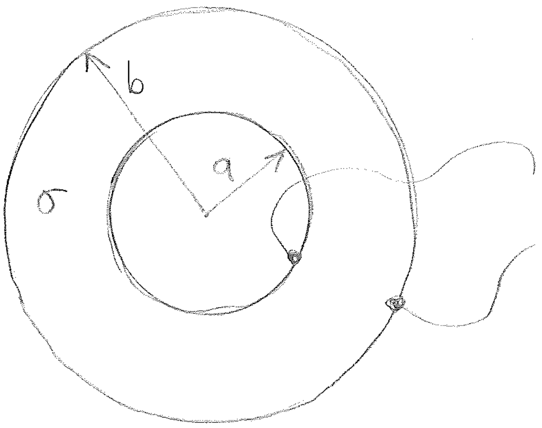


Obs! Denna uppgift är hämtad från exempelsamlingen.

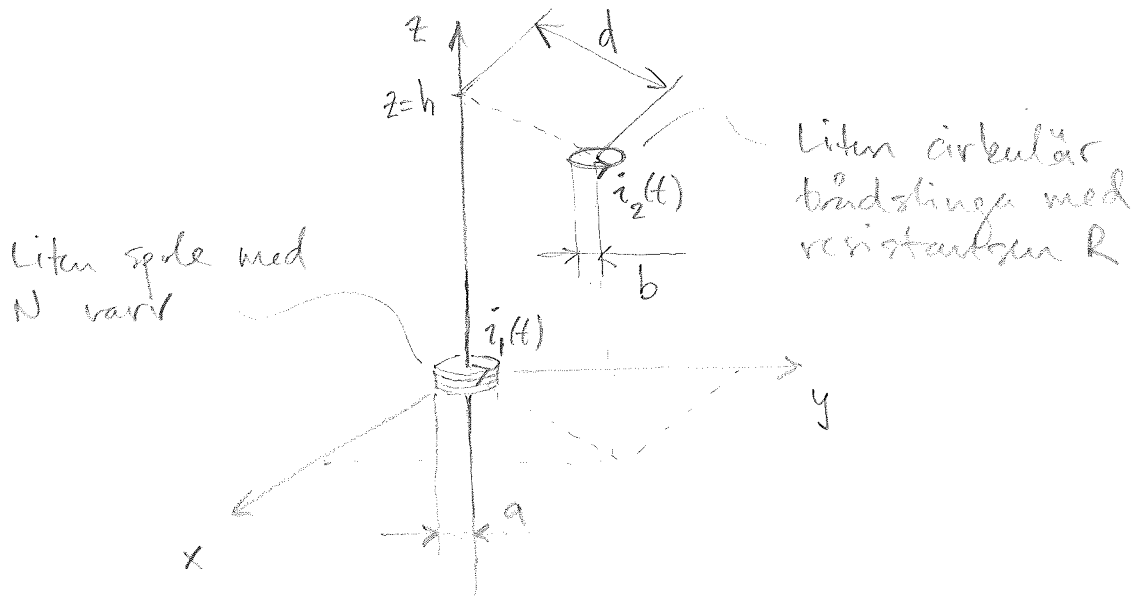
3. En oändligt lång rak metalltråd med radien a är placerad på höjden h ovanför ett oändligt stort metallplan som är jordat. Höjden h är mycket större än radien a. Metalltråden har potentialen V_0. Förutom metalltråden med potentialen V_0 finns endast luft ovanför metallplanet. Beräkna den inducerade laddningstätheten ρ_s på metallplanet. Svaret ska vara uttryckt i termer av metalltrådens potential V_0.



4. En skiva med tjockleken h har innerradien a och ytterradien b enligt figuren nedan. Skivans konduktivitet är σ. Skivan är utrustad med en elektrod som är i god kontakt med ytan som beskrivs av $r = a$ och en annan elektrod som är i god kontakt med ytan som beskrivs av $r = b$. Beräkna resistansen mellan de två elektroderna.



5. En mycket liten spole är placerad i origo och orienterad så att dess magnetiska dipolmoment är vinkelrätt mot planet $z = 0$. Spolen har N stycken cirkulära varv med radien a. I spolen flyter strömmen $i_1(t) = i_0 \cos(\omega t)$. En mycket liten cirkulär trådslinga med radien b är sammanfaller med planet $z = h$ och den är placerad med dess mittpunkt på avståndet $r = d$ från z-axeln. Den cirkulära slingan har resistansen R och dess självinduktans kan försummas. Beräkna den inducerade strömmen $i_2(t)$ i den cirkulära trådslingan. Frekvensen ω är tillräckligt låg för att använda den kvasistationära approximationen. Dessutom är avståndet mellan spolen och den cirkulära slingan mycket större än både radien a och radien b.



6. En elektromagnetisk planvåg med frekvensen ω och vågtalet k beskrivs av det magnetiska fältet

$$\vec{H}(\vec{r},t) = H_0 \frac{2\hat{x} - \hat{z}}{\sqrt{5}} \sin\left(\omega t - k\frac{x + 2z}{\sqrt{5}} - \frac{\pi}{3}\right).$$

Vågen utbreder sig i ett homogent förlustfritt medium med permittiviteten ϵ och permeabiliteten μ.

Lös följande uppgifter:

(a) Bestäm planvågens utbredningsriktning! (3p)

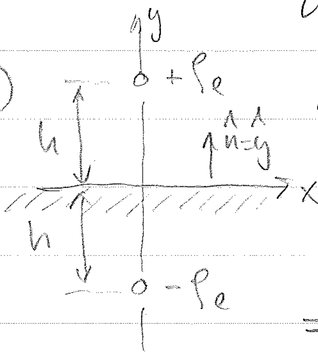
(b) Bestäm det magnetiska fältet i frekvensplanet! (3p)

(c) Bestäm det elektriska fältet i frekvensplanet! (4p)

2016.01.14

ELEKTROMAGNETISKA FÄLT FÖR E2

② Se lösningsförslag från övning

③


Ansätt linjeladdningstäthet ρ_ℓ

$$V(\vec r) = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{|\vec r - \vec r\,'_{\ominus}|}{|\vec r - \vec r\,'_{\oplus}|}\right)$$

$$\Rightarrow V_0 \simeq \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{2h}{a}\right) \Rightarrow \rho_\ell = \frac{2\pi\epsilon_0 V_0}{\ln(2h/a)}$$

(fältpunkt på metalltrådens yta)

Elektriskt fält ges av

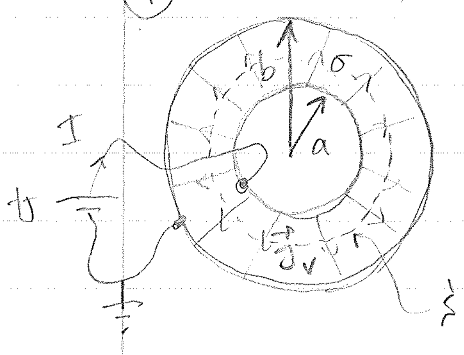
$$\vec E(\vec r) = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{\vec r - \vec r\,'_{\oplus}}{|\vec r - \vec r\,'_{\oplus}|^2} - \frac{\vec r - \vec r\,'_{\ominus}}{|\vec r - \vec r\,'_{\ominus}|^2}\right) = \left\{\begin{matrix}\vec r\,'_{\oplus} = \hat y h,\ \vec r\,'_{\ominus} = -\hat y h \\ \vec r = \hat x x + \hat y y\end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{\hat x x + \hat y (y-h)}{x^2+(y-h)^2} - \frac{\hat x x + \hat y (y+h)}{x^2+(y+h)^2}\right)$$

Den inducerade laddningen på metallplanet ges av

$$\rho_s = \hat n \cdot \vec D\Big|_{y=0} = \hat y \cdot (\epsilon_0 \vec E)\Big|_{y=0}$$

$$= \frac{\rho_\ell}{2\pi}\cdot\frac{-2h}{x^2+h^2} = -\frac{\rho_\ell h}{\pi(x^2+h^2)} = -\frac{2\epsilon_0 V_0 h}{(x^2+h^2)\ln(2h/a)}$$

④


Cylindrisk symmetri $\Rightarrow \vec J_v(\vec r) = \hat r J_r(r)$

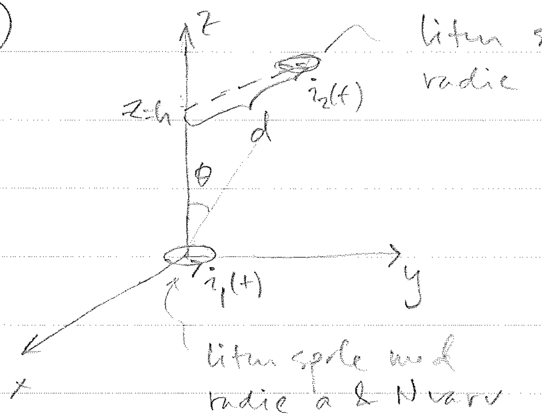
$$I = \int_S \vec J_v \cdot d\vec s = J_r(r)\,2\pi r h \Rightarrow J_r(r) = \frac{I/h}{2\pi r}$$

$$\Rightarrow \vec E = \frac{\vec J_v}{\sigma} = \hat r\,\frac{I/h}{2\pi\sigma r}$$

$$V(\vec r) = -\int_{L:\,\vec r_b\to\vec r} \vec E \cdot d\vec l = -\int_b^r \left(\hat r\,\frac{I/h}{2\pi\sigma\xi}\right)\cdot(\hat r\, d\xi) = \frac{I/h}{2\pi\sigma}\ln\left(\frac{b}{r}\right)$$

$$U = V(r=a) = \frac{I/h}{2\pi\sigma}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow R = \frac{U}{I} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\sigma h}$$

5



Dipolfält

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3}\left(\hat{R}\,2\cos\theta + \hat{\theta}\sin\theta\right)$$

där $m = \pi a^2 N \dot{i}_1$ och $\dot{i}_1 = i_0$.

Flöde genom slingan ges av

$$\Phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{s} \simeq \vec{B}\cdot\hat{z}\,\pi b^2$$

$$= \frac{\mu_0 \pi a^2 N i_0 \pi b^2}{4\pi (d^2+h^2)^{3/2}}\left(\hat{z}\cdot\hat{R}\,2\cos\theta + \hat{z}\cdot\hat{\theta}\sin\theta\right)$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} \hat{z}\cdot\hat{R} = \cos\theta & \cos\theta = h/\sqrt{d^2+h^2} \\ \hat{z}\cdot\hat{\theta} = -\sin\theta & \sin\theta = d/\sqrt{d^2+h^2} \end{array}\right\}$$

$$= \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2 N i_0}{4(d^2+h^2)^{3/2}}\left(2\frac{h^2}{d^2+h^2} - \frac{d^2}{d^2+h^2}\right)$$

$$= \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2 N i_0 (2h^2 - d^2)}{4(d^2+h^2)^{5/2}}$$

Inducerad ström blir därmed

$$\mathring{I}_2 = \frac{\mathcal{V}}{R} = \frac{-j\omega\Phi}{R} = -j\omega\frac{\mu_0\pi a^2 b^2 N i_0 (2h^2-d^2)}{4R(d^2+h^2)^{5/2}}$$

och motsvarande uttryck i tidsplanet är

$$i_2(t) = \mathrm{Re}\left\{\mathring{I}_2 e^{j\omega t}\right\} = \frac{\omega\mu_0\pi a^2 b^2 N i_0 (2h^2-d^2)}{4R(d^2+h^2)^{5/2}}\sin(\omega t)$$

(6) Magnetfältet i frekvensplanet kan skrivas som

$$\vec{\mathbb{H}} = -j\vec{H}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{j\varphi} = \vec{H}_0 e^{-j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\varphi+\frac{\pi}{2})}$$

vilket uttryckt i tidsplanet ger

$$\vec{H} = \mathrm{Re}\left\{\vec{\mathbb{H}} e^{j\omega t}\right\} = \vec{H}_0 \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi)$$

a) Identifikation ger att

$$-\vec{k}\cdot\vec{r} = -k_x x - k_y y - k_z z = -k\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}z\right)}_{=\hat{k}\cdot\vec{r}}$$

vilket ger utbredningsriktningen $\hat{k} = \hat{x}\frac{1}{\sqrt{5}} + \hat{z}\frac{2}{\sqrt{5}}$

b) Ytterligare identifikation ger $\varphi = -\pi/3$ och $\vec{H}_0 = H_0(2\hat{x}-\hat{z})/\sqrt{5}$, vilket medför att

$$\vec{\mathbb{H}} = -jH_0\frac{2\hat{x}-\hat{z}}{\sqrt{5}}\exp\left[-j\left(k\frac{x+2z}{\sqrt{5}}+\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= H_0 \frac{2\hat{x} - \hat{z}}{\sqrt{5}} \exp\left[-j\left(k\frac{x+2z}{\sqrt{5}} + \frac{5\pi}{6}\right)\right]$$

c) Det elektriska fältet fås ur Ampères lag

$$\vec{E} = \frac{-j\vec{k} \times \vec{H}}{j\omega\epsilon} = -\frac{k}{\omega\epsilon}\hat{k} \times \vec{H}$$

$$= -\frac{k}{\omega\epsilon} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \end{vmatrix} H_0 \exp\left[-j\left(k\frac{x+2z}{\sqrt{5}} + \frac{5\pi}{6}\right)\right]$$

$$= -\frac{k}{\omega\epsilon}\hat{y} \underbrace{\left(\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\right)}_{=1} H_0 \exp\left[-j\left(k\frac{x+2z}{\sqrt{5}} + \frac{5\pi}{6}\right)\right]$$

$$= -\hat{y}\frac{kH_0}{\omega\epsilon} \exp\left[-j\left(k\frac{x+2z}{\sqrt{5}} + \frac{5\pi}{6}\right)\right]$$