Tentamen i Elektromagnetiska fält

2015-08-26, kl 14.00-18.00, "Väg och vatten"-salar – kurskod EEM 015

Hjälpmedel – teori	BETA
Hjälpmedel – räkneproblem	BETA, typgodkänd kalkylator, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori *utan* egna anteckningar
Besök	cirka 14.45 och 16.45
Förfrågningar	Tel. ankn. 1735 Thomas Rylander, Signaler och system
Lösningar	Anslås på kursens hemsida 2015-08-26 kl 18.00
Granskning	2015-09-15 kl 12.00-13.00
Betygsgränser	Tentan 3: 25p; 4: 37p; 5: 48p. 10p/uppgift
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

OBS! Tvådelad tentamen!

Teoriuppgift

[Hjälpmedel: BETA]

1. Utgå från Gauss lag för det elektriska fältet i vakuum och $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$, där ρ_p är polarisationsladdningstätheten och $\vec{P}$ polarisationen. Motivera utifrån detta varför man inför hjälpfältet $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ i närvaro av polariserat material!

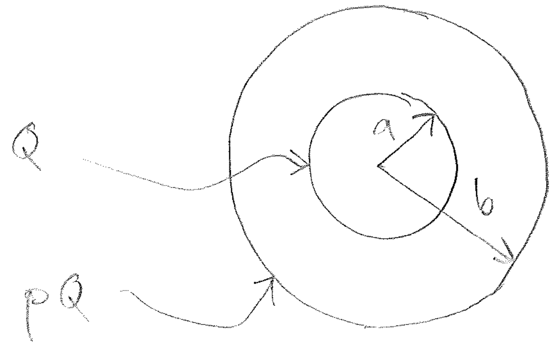
Räkneuppgifter:

[Hjälpmedel: BETA, typgodkänd kalkylator, formelsamling i Elektromagnetisk fältteori]

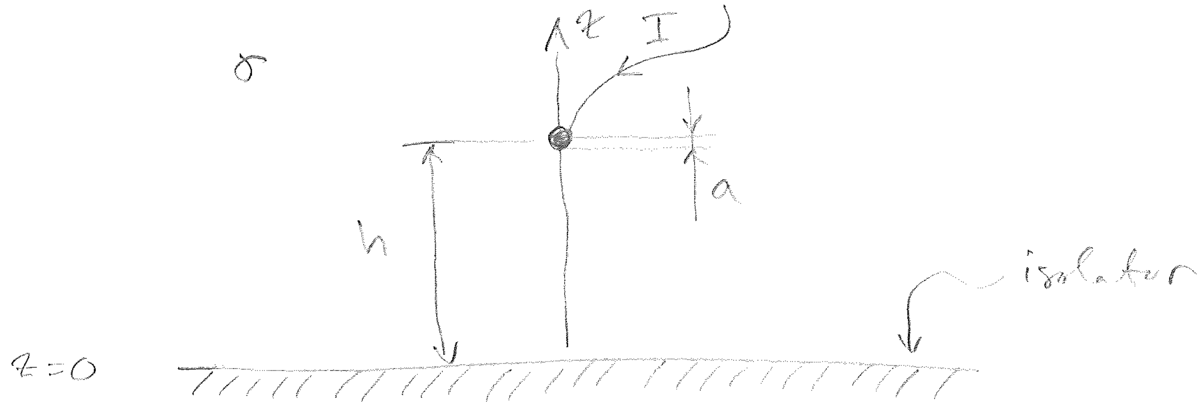
2. Ett sfäriskt metallskal med radien a och den totala laddningen Q är placerat i mitten av ett annat metallskal med radien b och den totala laddningen pQ, där $b > a$ och p är ett dimensionslöst reellt tal. Lös följande uppgifter:

   (a) Beräkna den elektrostatiska energin för denna laddningsfördelning! (7p)

   (b) Beräkna det värde på p som gör den elektrostatiska energin så liten som möjligt! (3p)

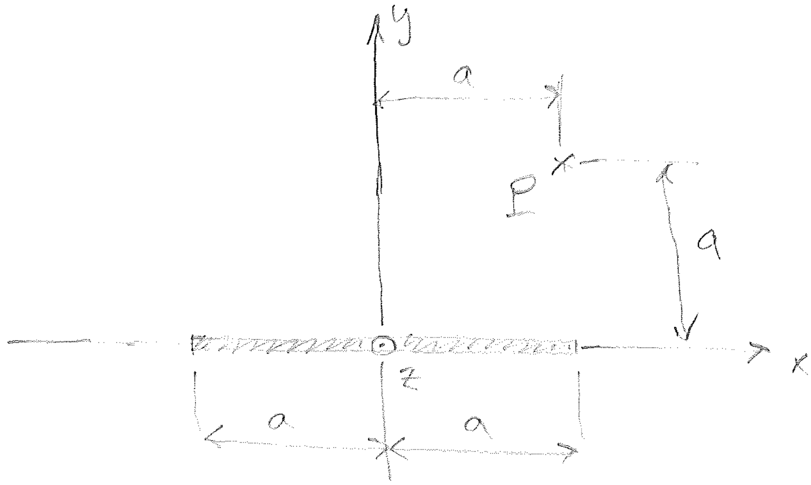


3. En liten metallkula med radien a är placerad i punkten $\vec{r} = \hat{z}h$, där $h \gg a$. Metallkulan befinner sig i ett område $z > 0$ som har ledningsförmågan σ. I planet $z = 0$ ligger en oändligt stor skiva som är en perfekt isolator. Beräkna det elektriska fältet på isolatorns yta $z = 0$ då likströmmen I flyter ut från metallkulan!



4. Ett mycket långt och tunt metallband med bredden $2a$ leder den totala strömmen I i $\hat{z}$-riktningen, så som figuren visar. Strömtätheten är jämnt fördelad över metallbandets bredd. Beräkna den magnetiska flödestätheten i punkten $\vec{r} = \hat{x}a + \hat{y}a$!

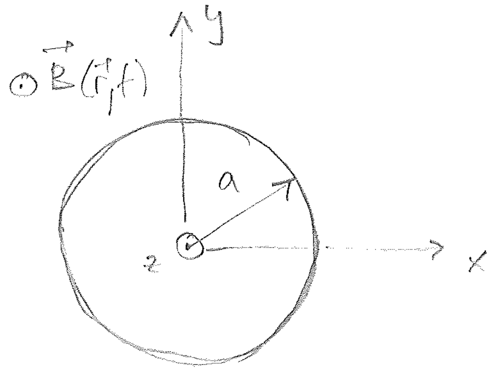
   Obs! Denna uppgift är hämtad från exempelsamlingen.



5. Så som figuren visar är en metalltråd formad till en cirkel med radien a och tråden är placerad i ett område med en magnetisk flödestäthet som varierar enligt

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \hat{z}B_0 \begin{cases} 0 & \text{om } t \leq 0, \\ t/T & \text{om } 0 \leq t \leq T, \\ (2T-t)/T & \text{om } T \leq t \leq 2T, \\ 0 & \text{om } 2T \leq t. \end{cases}$$

   där B_0 är konstant och T är tillräckligt stor för att kvasistationära approximationer ska vara tillämpbara. Metalltrådens totala resistans är R och dess självinduktans kan försummas. Beräkna den tidsberoende magnetiska kraft som verkar på varje enskild punkt längs metalltrådens omkrets! per längdenhet!



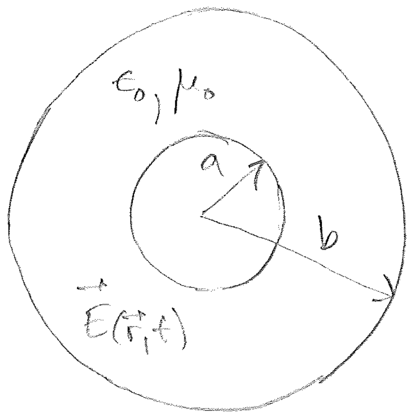
6. En cylindrisk koaxialkabel består av en innerledare med ytterradien a och en ytterledare med innerradien b, så som figuren visar. Det är luft mellan innerledare och ytterledare och där finns det elektriska fältet

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{r} E_0 \frac{a}{r} \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c_0} z\right)$$

Lös följande uppgifter:

(a) Bestäm ytladdningstätheten på innerledaren! (4p)

(b) Bestäm ytströmtätheten på innerledaren! (6p)



2015.08.26

ELEKTROMAGNETISKA FÄLT FÖR E2

(2) Gauss lag med sfärisk symmetri ger elektriskt fält från metallskal med radie R_s och laddning Q_s:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_R(R)\, 4\pi R^2 = Q_{innel}/\epsilon_0 = \begin{cases} 0 & \text{då } R < R_s \\ Q_s/\epsilon_0 & \text{då } R > R_s \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(R) = \begin{cases} \vec{0} & \text{då } R < R_s \\ \hat{R}\dfrac{Q_s}{4\pi\epsilon_0 R^2} & \text{då } R > R_s \end{cases}$$

Motsvarande potential blir

$$V(R) = -\int_R^{\infty} \vec{E}(\xi) \cdot (-\hat{R}\, d\xi) = \begin{cases} \dfrac{Q_s}{4\pi\epsilon_0 R_s} & \text{då } R \leq R_s \\ \dfrac{Q_s}{4\pi\epsilon_0 R} & \text{då } R \geq R_s \end{cases}$$

Superpos. av skal med radie a & b och laddning Q_a & Q_b ger

$$V(R) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\dfrac{Q_a}{a} + \dfrac{Q_b}{b}\right) & \text{då } R \leq a \\ \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\dfrac{Q_a}{R} + \dfrac{Q_b}{b}\right) & \text{då } a \leq R \leq b \\ \dfrac{Q_a + Q_b}{4\pi\epsilon_0 R} & \text{då } R \geq b \end{cases}$$

Elektrostatisk energi ges av

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \rho V \, dv = \frac{1}{2}\sum_{i=a,b} Q_i V_i$$

vilket ger

$$W_e = \frac{1}{2}\left[\frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_a}{a}+\frac{Q_b}{b}\right)+\frac{Q_b(Q_a+Q_b)}{4\pi\epsilon_0 b}\right]$$

$$= \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\left[\frac{(Q_a+Q_b)^2}{b}+Q_a^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\right]$$

$$= \{Q_a = Q \text{ och } Q_b = pQ\}$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\left[\frac{(1+p)^2}{b}+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\right]$$

Första termen i parentesen beror av p och den blir noll då $1+p=0 \Rightarrow p=-1$ ger den minsta energin.

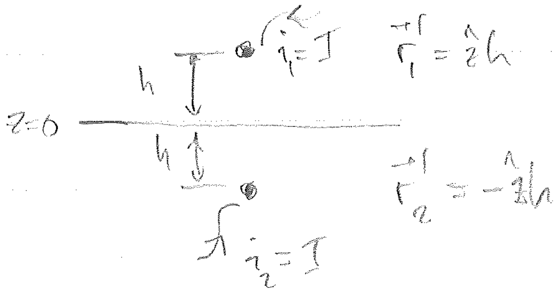
Svar: (a) $W_e = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\left[\frac{(1+p)^2}{b}+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\right]$

(b) $p=-1$

(3) Elektriskt fält från punktkälla i_k placerad i $\vec{r}_k'$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma}\sum_k \frac{i_k}{|\vec{r}-\vec{r}_k'|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_k'}{|\vec{r}-\vec{r}_k'|}$$

Spegling



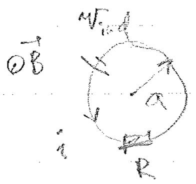
Planet $z=0$ har fältpunkt $\vec{r} = \hat{r}(\varphi)\, r$ vilket ger det elektriska fältet

$$\vec{E}(r,\varphi,z=0) = \frac{I}{4\pi\sigma}\left[\frac{\hat{r}r - \cancel{\hat{z}h}}{(r^2+h^2)^{3/2}} + \frac{\hat{r}r + \cancel{\hat{z}h}}{(r^2+h^2)^{3/2}}\right]$$

Svar: $\vec{E}(r,\varphi,z=0) = \hat{r}\,\dfrac{I\,r}{2\pi\sigma\,(r^2+h^2)^{3/2}}$

(4) Se övningsanteckningar

(5)



Inducerad spänning ges av

$$v_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\pi a^2 B_z(t)\right)$$

Detta ger den inducerade strömmen $i(t)$

$$i(t) = \frac{v_{ind}}{R} = -\frac{\pi a^2}{R}\frac{dB_z(t)}{dt} = -\frac{\pi a^2}{R}\begin{cases} B_0/T & \text{då } 0<t<T \\ -B_0/T & \text{då } T<t<2T \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

och den magnetiska kraften per längdenhet

$$\frac{\vec{F}}{L} = \vec{i}\times\vec{B} = \left(\hat{\varphi}\, i(t)\right)\times\left(\hat{z}\, B_z(t)\right) = \hat{r}\, i(t)\, B_z(t)$$

Svar: $$\frac{\vec{F}}{L} = -\hat{r}\,\frac{B_0^2\,\pi a^2}{RT}\begin{cases} \dfrac{t}{T} & \text{då } 0<t<T \\ -\dfrac{2T-t}{T} & \text{då } T<t<2T \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

(6) Ytladdningstäthet ρ_s på innerledaren $(r=a)$ ges av $\hat{n}_1 \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s$:

$\hat{n}_1 = \hat{r}$

1 $\rightarrow$ 2

$$\rho_s = \hat{r} \cdot (\epsilon_0 \vec{E})\Big|_{r=a} = \epsilon_0 E_0 \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c_0} z\right)$$

Yströmtäthet $\vec{J}_s$ på innerledaren ges av $\hat{n}_1 \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_s$, vilket kräver att $\vec{H}$ beräknas:

$$\vec{\mathbb{E}}(\vec{r}, \omega) = \hat{r} E_0 \frac{a}{r} (-j) e^{-j\frac{\omega}{c_0} z}$$

Faradays lag $\Rightarrow$ $\vec{H} = \dfrac{\nabla \times \vec{E}}{-j\omega\mu_0} = j \dfrac{1}{\omega\mu_0} \hat{\varphi} \dfrac{\partial \mathbb{E}_r}{\partial z}$

$$\Rightarrow \vec{\mathbb{H}}(\vec{r}, \omega) = \hat{\varphi} \cancel{j} \frac{1}{\cancel{j}\omega\mu_0} E_0 \frac{a}{r} (\cancel{-j}) \left(-j \frac{\omega}{c_0}\right) e^{-j\frac{\omega}{c_0} z}$$

$$= -\hat{\varphi}\, j \frac{E_0}{\mu_0 c_0} \frac{a}{r} e^{-\frac{\omega}{c_0} z}$$

$$\mu_0 c_0 = \mu_0 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = \eta_0$$

$$\Rightarrow \vec{H}(\vec{r}, t) = \mathrm{Re}\left\{ \vec{\mathbb{H}}(\vec{r}, \omega) e^{j\omega t} \right\} = \hat{\varphi} \frac{E_0}{\eta_0} \frac{a}{r} \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c_0} z\right)$$

$$\Rightarrow \vec{J}_s = \hat{r} \times \vec{H} = \hat{z} \frac{E_0}{\eta_0} \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c_0} z\right)$$

Svar: (a) $\rho_s = \epsilon_0 E_0 \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c_0} z\right)$

(b) $\vec{J}_s = \hat{z} \frac{E_0}{\eta_0} \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c_0} z\right)$