Tentamen i Elektromagnetiska fält

2015-04-17, kl 14.00-18.00, "Maskin"-salar – kurskod EEM 015

Hjälpmedel – teori	BETA
Hjälpmedel – räkneproblem	BETA, typgodkänd kalkylator, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori *utan* egna anteckningar
Besök	cirka 14.45 och 16.45
Förfrågningar	Tel. ankn. 1735 Thomas Rylander, Signaler och system
Lösningar	Anslås på kursens hemsida 2015-04-17 kl 18.00
Granskning	2015-04-29 kl 12.00-13.00
Betygsgränser	Tentan 3: 25p; 4: 37p; 5: 48p. 10p/uppgift
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

OBS! Tvådelad tentamen!

Teoriuppgift

[Hjälpmedel: BETA]

1. Visa att den ömsesidiga elektrostatiska energin i ett system av N stycken punktladdningar är

$$W_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i V_i$$

Generalisera resultatet så att det ger den totala elektrostatiska energin för en kontinuerlig laddningsfördelning $\rho_\mathrm{v}(\vec{r})$ som befinner sig i ett ändligt område i rummet.

Räkneuppgifter:

[Hjälpmedel: BETA, typgodkänd kalkylator, formelsamling i Elektromagnetisk fältteori]

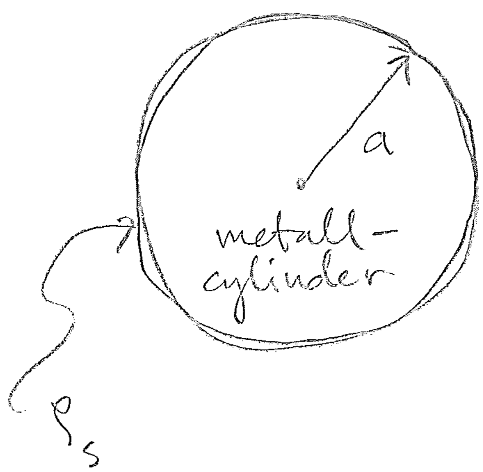
2. En oändligt lång metallstav med radien a befinner sig i ett yttre elektriskt fält. Den elektriska potentialen i området utanför metallstaven och på dess yta ($r \geq a$) ges i cylindriska koordinater av

$$V(r,\varphi) = E_0\, a\left(\frac{r}{a} - \frac{a}{r}\right)\cos(\varphi)$$

Lös följande uppgifter:

(a) Beräkna det elektriska fältet på stort avstånd från metallstaven. Uttryck svaret i kartesiska koordinater. (5p)

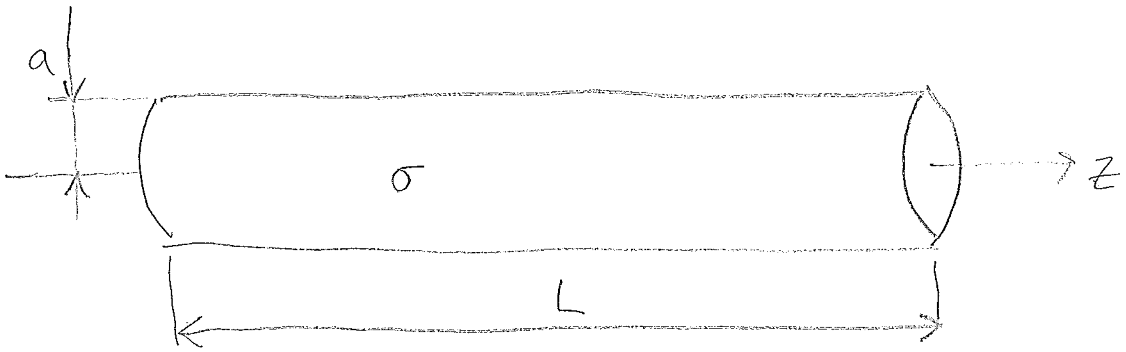
(b) Beräkna den inducerade ytladdning ρ_s på metallstavens yta. (5p)



3. I en metallcylinder med radie a, längd L och ledningsförmåga σ finns ett elektriskt fält

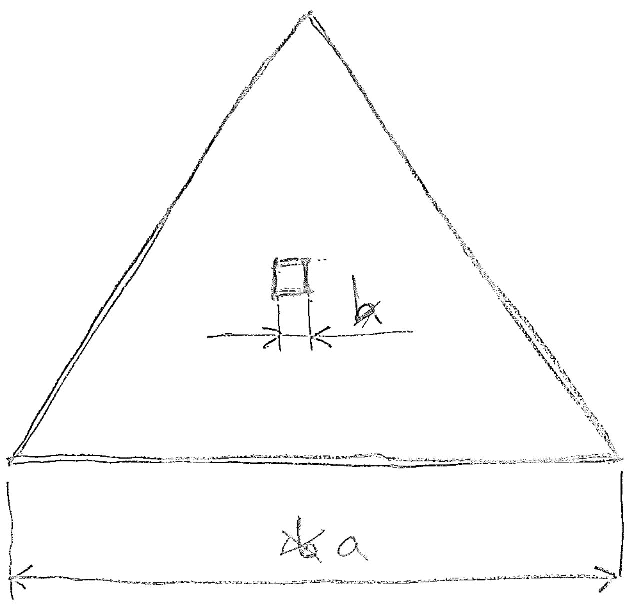
$$\vec{E}(\vec{r}) = \hat{\varphi} E_0 \frac{r}{a}$$

då det uttrycks i cylindriska koordinater. Här är E_0 en konstant som svarar mot det elektriska fältet på cylinderns yta $r = a$. Beräkna den totala effektutvecklingen inuti cylindern.



Obs! Denna uppgift är hämtad från exempelsamlingen.

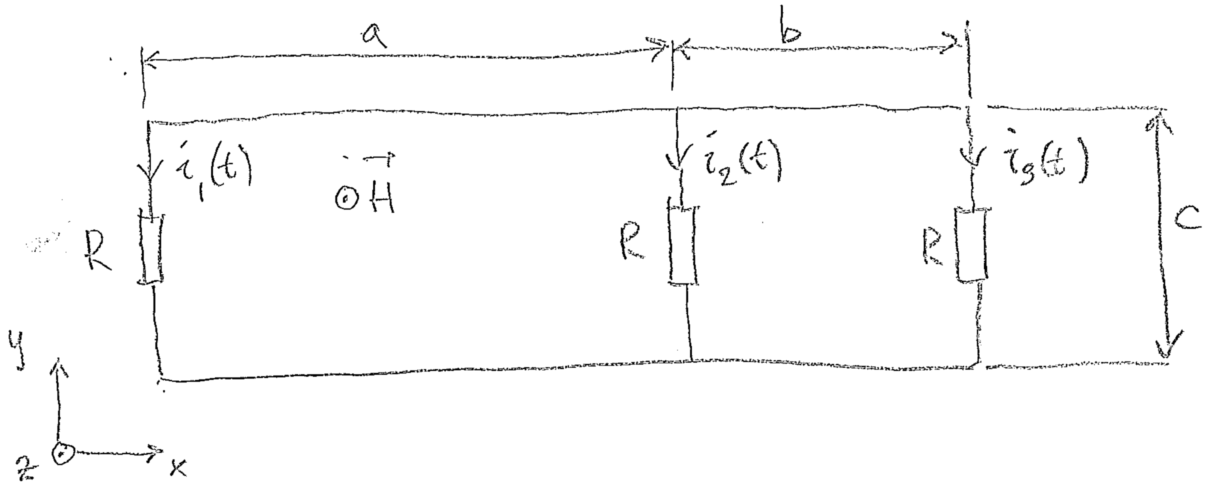
4. En metalltråd är formad som liksidig triangel med kantlängden a, enligt figuren. Man har placerat en mycket liten kvadratisk slinga med kantlängden b i mittpunkten för triangeln. Den kvadratiska slingan är också tillverkad av en metalltråd och den ligger i samma plan som den triangulära slingan. Beräkna den ömsesidiga induktansen mellan de två slingorna.



5. En elektrisk krets består av tre lika stora resistanser R som är sammankopplade med metalltrådar enligt figuren. I området där kretsen är placerad finns ett magnetiskt fält som varierar med vinkelfrekvensen ω enligt

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \hat{z} H_0 \cos(\omega t)$$

där H_0 är konstant. Beräkna den inducerade strömmarna $i_1(t)$, $i_2(t)$ och $i_3(t)$ i kretsen då dess självinduktans försummas och vinkelfrekvensen ω är tillräckligt låg för att kvasistationära approximationer ska vara tillämpbara.



6. Betrakta en tidsharmonisk ytström $\vec{J}_{s,1} = -\hat{x} J_0 \cos(\omega t)$ som sammanfaller med det oändliga planet $z = 0$, där ω är vinkelfrekvensen och J_0 är konstant. Ytströmmen befinner sig i vakuum och den ger upphov till det elektriska fältet

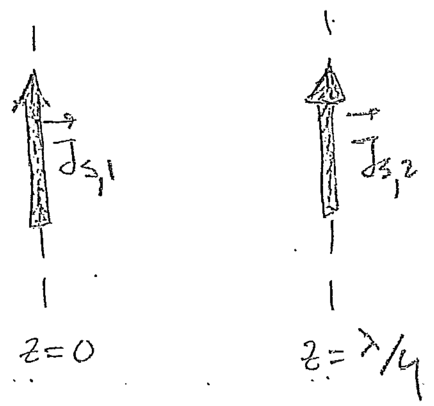
$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \begin{cases} \hat{x}(Z_0 J_0/2) \cos(\omega t - k_0 z) & \text{då } z > 0 \\ \hat{x}(Z_0 J_0/2) \cos(\omega t + k_0 z) & \text{då } z < 0 \end{cases}$$

där k_0 är vågtalet för vakuum och Z_0 är vågimpedansen för vakuum.

Lös följande uppgifter:

(a) Bestäm motsvarande elektriska fält $\vec{E}_2(\vec{r}, t)$ för en ytström $\vec{J}_{s,2} = -\hat{x} J_0 \sin(\omega t)$ som flyter i planet $z = \lambda/4$. (5p)

(b) Bestäm det totala elektriska fältet $\vec{E}(\vec{r}, t)$ överallt då båda strömmarna $\vec{J}_{s,1}$ och $\vec{J}_{s,2}$ flyter samtidigt. (5p)



2015.04.17

ELEKTROMAGNETISKA FÄLT - EEM015

(2) a) $\vec{E} = -\nabla V = -\left(\hat{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\varphi}\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)$

$= -E_0 a \left(\hat{r}\left(\frac{1}{a} + \frac{a}{r^2}\right)\cos\varphi\right.$

$\left. - \hat{\varphi}\frac{1}{r}\left(\frac{r}{a} - \frac{a}{r}\right)\sin\varphi\right)$

$\lim_{r\to\infty} \vec{E} = -E_0 a \left(\hat{r}\frac{1}{a}\cos\varphi - \hat{\varphi}\frac{1}{a}\sin\varphi\right)$

$= \left[\begin{array}{l} \hat{r} = \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi \\ \hat{\varphi} = \hat{z}\times\hat{r} = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi \end{array}\right]$

$= -E_0\left((\hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi)\cos\varphi\right.$

$\left. - (-\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi)\sin\varphi\right)$

$= -E_0\hat{x}\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = -\hat{x}E_0$

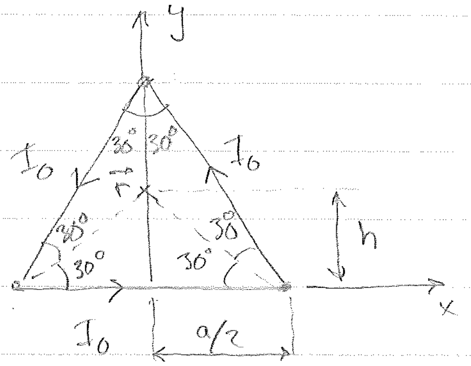
b) $\rho_s = \hat{n}\cdot\vec{D}\Big|_{r=a} = \hat{r}\cdot(\varepsilon_0\vec{E})\Big|_{r=a}$

$= -\varepsilon_0 E_0 a \underbrace{\left(\frac{1}{a} + \frac{a}{a^2}\right)}_{=2/a}\cos\varphi$

$= -2\varepsilon_0 E_0\cos\varphi$

③ Se anteckningar från övning

④



$$\vec r = \hat y h = \left\{ \frac{h}{a/2} = \tan(30°) = \frac{1}{\sqrt{3}} \right\} = \hat y \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

$$\vec r\,' = \hat x x' \quad \left(\text{med } -\frac{a}{2} < x' < \frac{a}{2}\right)$$

$$\vec B(\vec r) = 3 \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{nedre sidan}} \frac{I_0 d\vec l\,' \times (\vec r - \vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|^3} = \left[\begin{array}{l} \vec r - \vec r\,' = -\hat x x' + \hat y h \\ |\vec r - \vec r\,'| = ((x')^2 + h^2)^{1/2} \\ d\vec l\,' = \hat x dx' \end{array} \right]$$

tre lika stora bidrag

$$= \frac{3\mu_0 I_0}{4\pi} \int_{x'=-a/2}^{a/2} \frac{(\hat x dx') \times (-\hat x x' + \hat y h)}{((x')^2 + h^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{3\mu_0 I_0}{4\pi} \int_{x'=-a/2}^{a/2} \frac{\hat z h}{((x')^2 + h^2)^{3/2}} dx'$$

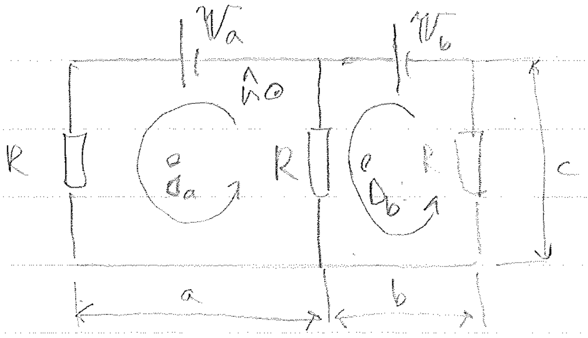
$$= \hat z \frac{3\mu_0 I_0 h}{4\pi} \left[\frac{x'}{h^2 \sqrt{(x')^2 + h^2}} \right]_{x'=-a/2}^{a/2}$$

$$= \hat z \frac{3\mu_0 I_0}{4\pi h} \cdot \frac{a}{\sqrt{(a/2)^2 + h^2}} = \left\{ h = \frac{a}{2\sqrt{3}} \right\}$$

$$= \hat z \frac{3\mu_0 I_0}{4\pi (a/2\sqrt{3})} \cdot \frac{a}{(a/2\sqrt{3})\sqrt{3+1}} = \hat z \frac{9\mu_0 I_0}{2\pi a}$$

$$M = \Phi / I_0 = \frac{9\mu_0 b^2}{2\pi a}$$

(5)



$$\mathcal{V}_i = -j\omega \Phi_i$$

$$= -j\omega\mu_0 H_0 S_i \quad (i=a,b)$$

där $S_a = ac$ & $S_b = bc$

Maskanalys ger

$$\begin{cases} \mathcal{V}_a = R\mathring{I}_a + R(\mathring{I}_a - \mathring{I}_b) \Rightarrow \mathcal{V}_a / R = 2\mathring{I}_a - \mathring{I}_b & (1) \\ \mathcal{V}_b = R(\mathring{I}_b - \mathring{I}_a) + R\mathring{I}_b \Rightarrow \mathcal{V}_b / R = -\mathring{I}_a + 2\mathring{I}_b & (2) \end{cases}$$

$$\text{"}(1) + 2\times(2)\text{"} \Rightarrow \frac{1}{R}(\mathcal{V}_a + 2\mathcal{V}_b) = 3\mathring{I}_b \Rightarrow \mathring{I}_b = \frac{1}{3R}(\mathcal{V}_a + 2\mathcal{V}_b)$$

$$\text{"}(2)\text{"} \Rightarrow \mathring{I}_a = 2\mathring{I}_b - \mathcal{V}_b / R = \frac{1}{3R}\left(2(\mathcal{V}_a + 2\mathcal{V}_b) - 3\mathcal{V}_b\right)$$

$$= \frac{1}{3R}(2\mathcal{V}_a + \mathcal{V}_b)$$

Efterfrågade strömmar blir

$$\mathring{I}_1 = \mathring{I}_a, \quad \mathring{I}_2 = \mathring{I}_b - \mathring{I}_a = \frac{1}{3R}(-\mathcal{V}_a + \mathcal{V}_b), \quad \mathring{I}_3 = -\mathring{I}_b$$

vilket ger

$$i_1(t) = \mathrm{Re}\left\{ \frac{-j\omega\mu_0 H_0 (2a+b)c}{3R} e^{j\omega t} \right\} = \frac{\omega\mu_0 H_0 (2a+b)c}{3R} \sin(\omega t)$$

$$i_2(t) = \mathrm{Re}\left\{\frac{-j\omega\mu_0 H_0 (b-a)c}{3R} e^{j\omega t}\right\} = \frac{\omega\mu_0 H_0 (b-a)c}{3R} \sin(\omega t)$$

$$i_3(t) = \mathrm{Re}\left\{\frac{+j\omega\mu_0 H_0 (a+2b)c}{3R} e^{j\omega t}\right\} = -\frac{\omega\mu_0 H_0 (a+2b)c}{3R} \sin(\omega t)$$

6) a) Ytström: $\vec{J}_{s,1} = -\hat{x} J_0$ på planet $z=0$ ger

$$\vec{E}_1 = \hat{x}\frac{Z_0 J_0}{2} e^{\mp j k_0 z} \quad \text{då } z \gtrless 0$$

Därmed ger ytström $\vec{J}_{s,2} = +\hat{x} j J_0$ på planet $z = \lambda/4$ det elektriska fältet

$$\vec{E}_2 = \hat{x}\frac{Z_0(-jJ_0)}{2} e^{\mp j k_0 (z - \frac{\lambda}{4})} \quad \text{då } z \gtrless \frac{\lambda}{4}$$

[Tänk: (1) J_0 i uttrycket för $\vec{E}_1$ byts mot $-jJ_0$ och (2) argumentet till exponentialfunktionen uttrycket för $\vec{E}_1$ blir noll där $\vec{J}_{s,1}$ är placerad (dvs $z=0$) och därmed måste argumentet till exponentialfunktionen i uttrycket för $\vec{E}_2$ vara noll där $\vec{J}_{s,2}$ är placerad (dvs $z - \lambda/4 = 0$)]

Förenkla det elektriska fältet mha $k_0 = 2\pi/\lambda$:

$$\vec{E}_2 = \hat{x}\frac{-jZ_0 J_0}{2} e^{\mp j(k_0 z - \pi/2)} \quad \text{då } z \gtrless \frac{\lambda}{4}$$

I tidsplanet får man

$$\vec{E}_2(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left\{ \hat{x}\frac{-j Z_0 J_0}{2} e^{j(\omega t \mp (k_0 z - \pi/2))} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Obs!} \\ -j = e^{-j\pi/2} \end{array} \right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{ \hat{x}\frac{Z_0 J_0}{2} e^{j(\omega t \mp k_0 z \pm \pi/2 - \pi/2)} \right\}$$

$$= \pm \hat{x}\frac{Z_0 J_0}{2} \cos(\omega t \mp k_0 z) \quad \text{då} \quad z \gtrless \frac{\lambda}{4}$$

b) Superposition $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_1(\vec{r},t) + \vec{E}_2(\vec{r},t)$ ger

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \hat{x} Z_0 J_0 \cos(\omega t - k_0 z) \quad \text{då} \quad z > \frac{\lambda}{4}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \hat{x}\frac{Z_0 J_0}{2}\left(\cos(\omega t - k_0 z) - \cos(\omega t + k_0 z)\right)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \cos(\omega t - k_0 z) - \cos(\omega t + k_0 z) = \\ = -2\sin(-k_0 z)\sin(\omega t) = 2\sin(\omega t)\sin(k_0 z) \end{array} \right\}$$

$$= \hat{x} Z_0 J_0 \sin(\omega t)\sin(k_0 z) \quad \text{då} \quad 0 < z < \frac{\lambda}{4}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{0} \quad \text{då} \quad z < 0$$