Tentamen i Elektromagnetiska fält

2015-01-15, kl 14.00-18.00, "Maskin"-salar – kurskod EEM 015

Hjälpmedel – teori	BETA
Hjälpmedel – räkneproblem	BETA, typgodkänd kalkylator, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori *utan* egna anteckningar
Besök	cirka 14.45 och 16.45
Förfrågningar	Tel. ankn. 1814 Johan Winges, Signaler och system
Lösningar	Anslås på kursens hemsida 2015-01-15 kl 18.00
Granskning	2015-01-30 kl 12.00-13.00
Betygsgränser	Tentan 3: 25p; 4: 37p; 5: 48p. 10p/uppgift
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

OBS! Tvådelad tentamen!

Teoriuppgift
[Hjälpmedel: BETA]

1. Definiera makroskopisk volymladdningstäthet $\rho_v(\vec{r})$, ytladdningstäthet $\rho_s(\vec{r})$ och linjeladdningstäthet $\rho_l(\vec{r})$. Skriv upp integraluttrycken för fälten $\vec{E}(\vec{r})$ och $V(\vec{r})$ från kända laddningsfördelningar $\rho_v(\vec{r}\,')$, $\rho_s(\vec{r}\,')$ och $\rho_l(\vec{r}\,')$. (Här betecknas fältpunkten med $\vec{r}$ och källpunkten med $\vec{r}\,'$.) Beskriv i ord integralernas samband med de så kallade Coulomb-fälten från en punktladdning, det vill säga

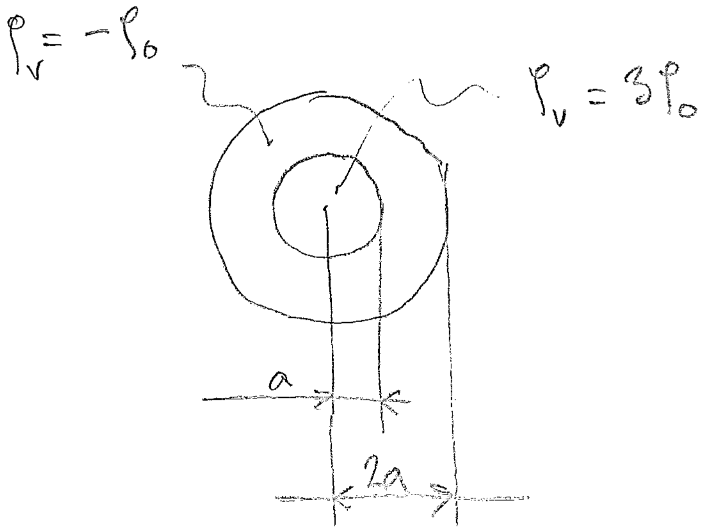
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2} \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

respektive

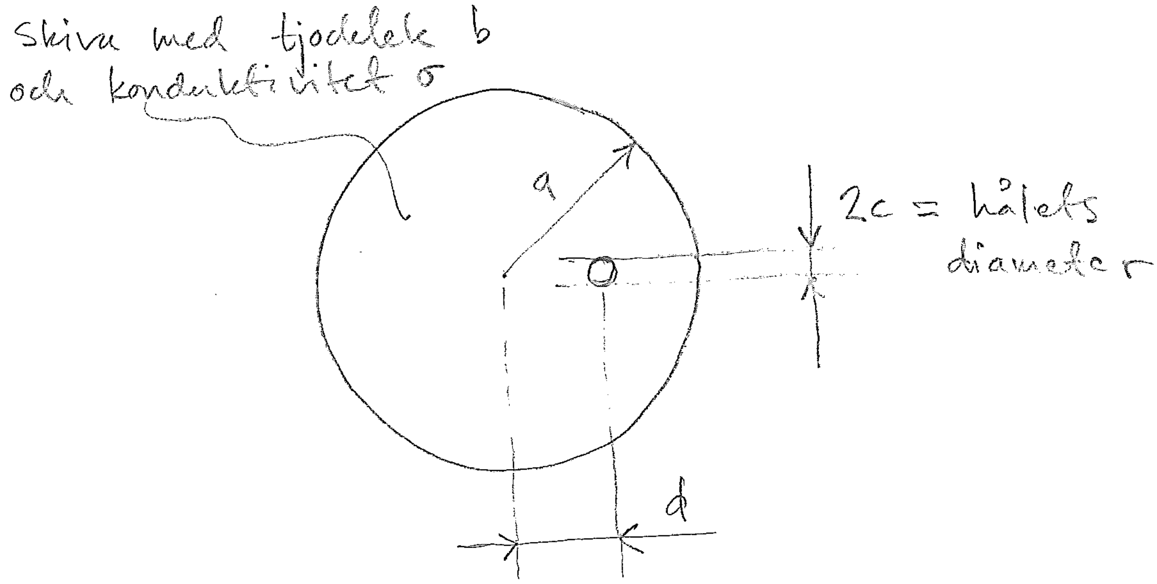
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Räkneuppgifter:
[Hjälpmedel: BETA, typgodkänd kalkylator, formelsamling i Elektromagnetisk fältteori]

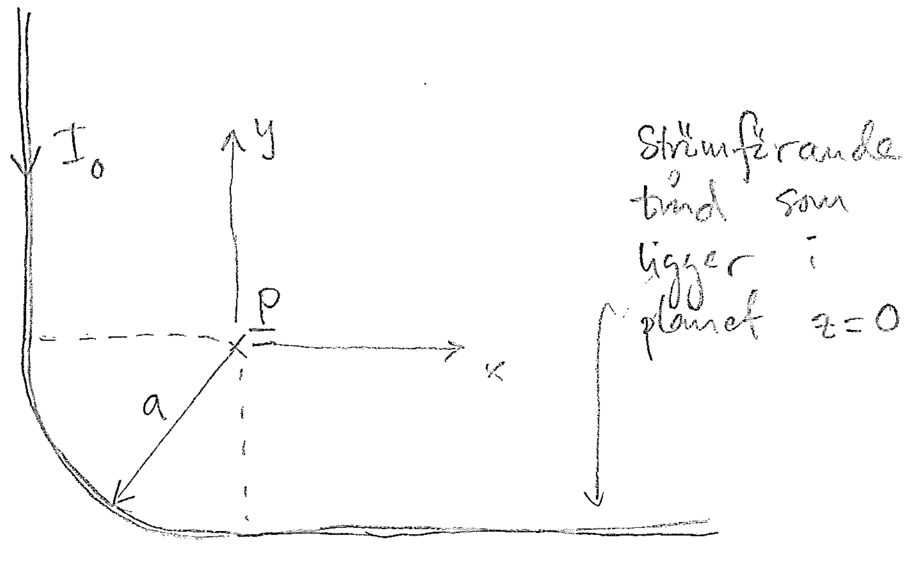
2. En oändligt lång cylinder i vakuum har volymladdningstätheten $\rho_v(\vec{r}) = 3\rho_0$ i området $r < a$ och $\rho_v(\vec{r}) = -\rho_0$ i området $a < r < 2a$, där ρ_0 är en konstant. Utanför cylindern finns ingen laddning.
   (a) Beräkna det elektriska fältet överallt.
   (b) Beräkna den elektriska potentialen överallt.



3. En cirkulär skiva med radien a och tjockleken b har konduktiviteten σ. I skivan har man borrat ett mycket litet hål med radien c och detta hål befinner sig på avståndet d från skivans mittpunkt. Beräkna resistansen R mellan (i) en cirkulär elektrod som spänns fast kring den cirkulära skivans yttre omkrets och (ii) en annan cirkulär elektrod som ligger an mot det lilla hålets hela omkrets. Båda elektroderna är perfekta elektriska ledare och de är i god kontakt med den ledande skivan.



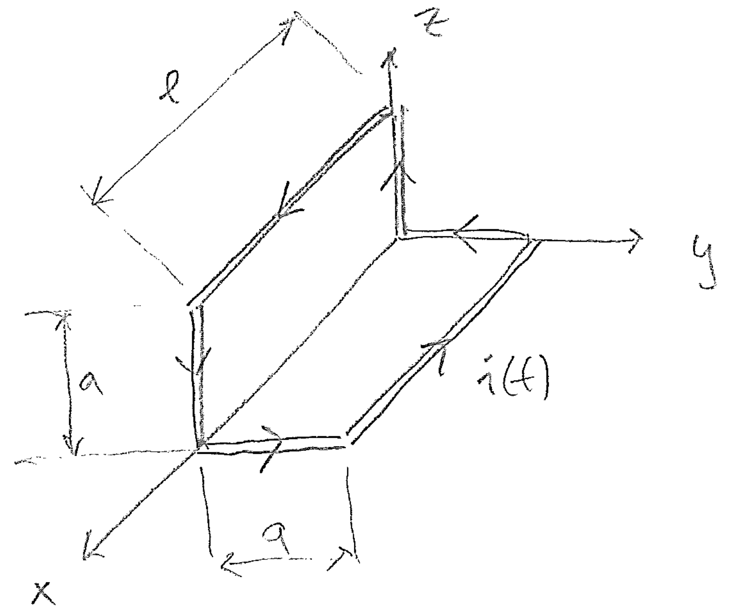
4. En oändligt lång tråd består av två raka delar och en kvartscirkelbåge enligt figuren nedan. Kvartscirkelbågen har radien a från dess mittpunkt som betecknas med P i figuren. Tråden är placerad i vakuum och den för en likström I_0. Beräkna den magnetiska flödestätheten $\vec{B}$ i punkten P.



5. En trådslinga är formad enligt figuren och den har resistansen R. I området där slingan är placerad finns ett magnetiskt fält som roterar med vinkelfrekvensen ω enligt

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = (\hat{y}\cos(\omega t) + \hat{z}\sin(\omega t))H_0$$

där H_0 är konstant. Beräkna den inducerade strömmen $i(t)$ i slingan då dess självinduktans försummas och vinkelfrekvensen ω är tillräckligt låg för att kvasistationära approximationer ska vara tillämpbara.



6. En tidsharmonisk våg oscillerar i tiden med vinkelfrekvensen ω och dess elektriska fält i vakuum ges av

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{y}E_0 e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta x)$$

Beräkna det samband som beskriver hur α, β och ω måste förhålla sig till varandra för att vågekvationen i vakuum ska vara uppfylld.

Obs! Denna uppgift är hämtad från exempelsamlingen.

2015.01.15

ELEKTROMAGNETISKA FÄLT – EEM015

(2) $\rho_v(r) = \begin{cases} 3\rho_0 & \text{då } r<a \\ -\rho_0 & \text{då } a<r<2a \\ 0 & \text{då } 2a<r \end{cases}$

(a) Cylindrisk symmetri & Gaussyta (radie r & längd l)

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = E_r(r)\, 2\pi r l = Q_{inne}/\varepsilon_0$$

$$Q_{inne} = \begin{cases} 3\rho_0 \pi r^2 l & \text{då } r<a \\ 3\rho_0 \pi a^2 l - \rho_0 \pi (r^2 - a^2) l & \text{då } a<r<2a \\ 0 & \text{då } 2a<r \end{cases}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \hat{r}\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 r l} 3\rho_0 \pi r^2 l = \hat{r}\frac{3\rho_0 r}{2\varepsilon_0} \quad \text{då } r<a$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \hat{r}\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 r l}\rho_0 \pi l\left(4a^2 - r^2\right)$$

$$= \hat{r}\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(\frac{4a^2}{r} - r\right) \quad \text{då } a<r<2a$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} \quad \text{då } 2a<r$$

(b) Den elektriska potentialen ges av

$$V(\vec{r}) = -\int_{L:\vec{\infty}\to\vec{r}} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Sätt $V=0$ på stort avstånd från cylindern (och då $\vec{E}=\vec{0}$ för $2a<r$) vilket ger

$V=0$ då $2a<r$ (utanför cylindern)

$$V(\vec{r}) = -\int_r^{2a} \left[\hat{r}\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(\frac{4a^2}{\xi}-\xi\right)\right]\cdot\left(-\hat{r}\,d\xi\right) + \underbrace{V(r=2a)}_{=0}$$

$$= \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left[4a^2\ln\xi - \frac{1}{2}\xi^2\right]_{\xi=r}^{2a}$$

$$= \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(4a^2\ln\left(\frac{2a}{r}\right) - \frac{1}{2}\left(4a^2-r^2\right)\right) \quad \text{då } a<r<2a$$

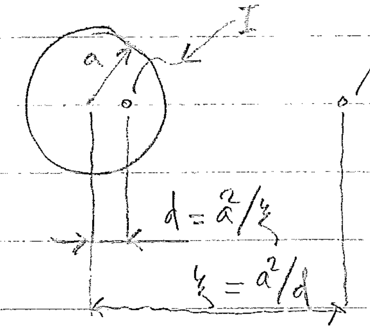
$$V(\vec{r}) = -\int_r^{a}\left[\hat{r}\frac{3\rho_0\xi}{2\varepsilon_0}\right]\cdot\left(-\hat{r}\,d\xi\right) + V(r=a)$$

$$= \frac{3\rho_0}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{2}\xi^2\right]_{\xi=r}^{a} + \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(4a^2\ln(2) - \frac{3}{2}a^2\right)$$

$$= \frac{3\rho_0}{4\varepsilon_0}\left(a^2-r^2\right) + \frac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon_0}\left(4\ln(2) - \frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(2a^2\ln(2) - \frac{3r^2}{4}\right) \quad \text{då } r<a$$

③ Spegling i cirkulär cylinder



$$V(\vec r) = \frac{I/b}{2\pi\sigma}\ln\left(\frac{|\vec r - \vec r\,'_-|}{|\vec r - \vec r\,'_+|}\right)$$

Potentialen på ytan av det lilla hålet är

$$V_\oplus = \frac{I/b}{2\pi\sigma}\ln\left(\frac{a^2/d - d}{c}\right) = \frac{I/b}{2\pi\sigma}\ln\left(\frac{a^2-d^2}{cd}\right)$$

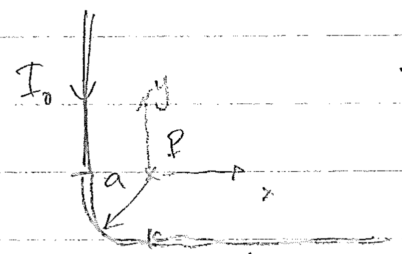
och på den cirkulära skivans yttre omkrets

$$V_\ominus = \frac{I/b}{2\pi\sigma}\ln\left(\frac{a^2/d - a}{a-d}\right) = \frac{I/b}{2\pi\sigma}\ln\left(\frac{(a/d)\,\cancel{(a-d)}}{\cancel{a-d}}\right)$$

Villkoret ger resistansen

$$R = \frac{U}{I} = \frac{V_\oplus - V_\ominus}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma b}\ln\left(\frac{a^2-d^2}{ac}\right)$$

④ Använd Biot-Savarts lag på de tre delarna (två raka trådar och en kvartscirkel)



$$\vec B(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\,d\vec l\,'}{|\vec r - \vec r\,'|^2} \times \frac{\vec r - \vec r\,'}{|\vec r - \vec r\,'|}$$

Rakt segment $x' = -a$ & $0 \le y' \le \infty$, med $\vec{dl}' = -\hat{y}\,dy'$ för fältpunkten $\vec{r} = \vec{0}$ $(\vec{r} - \vec{r}' = +\hat{x}a - \hat{y}y')$

$$\vec{B}_{\text{rak}}(\vec{r} = \vec{0}) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int_{y'=0}^{\infty} \frac{(-\hat{y}\,dy') \times (+\hat{x}a - \hat{y}y')}{(a^2 + (y')^2)^{3/2}}$$

$$= \hat{z}\,\frac{\mu_0 I_0 a}{4\pi} \int_{y'=0}^{\infty} \frac{dy'}{(a^2 + (y')^2)^{3/2}} = \hat{z}\,\frac{\mu_0 I_0 a}{4\pi} \Big[\frac{}{a^2 \sqrt{a^2 + (y}$$

$$= \hat{z}\,\frac{\mu_0 I_0 a}{4\pi} \left[\frac{y'}{a^2 \sqrt{a^2 + (y')^2}} \right]_{y'=0}^{\infty} = \hat{z}\,\frac{\mu_0 I_0}{4\pi a}$$

Det andra raka segmentet ger samma bidrag till den magnetiska flödestätheten i P.

Kvartscirkeln ger $\vec{r}' = a\underbrace{(\hat{x}\cos\varphi' + \hat{y}\sin\varphi')}_{=\hat{r}(\varphi')}$ med $\pi < \varphi' < \frac{3\pi}{2}$ och $\vec{dl}' = \hat{\varphi}(\varphi')\,a\,d\varphi'$, vilket ger

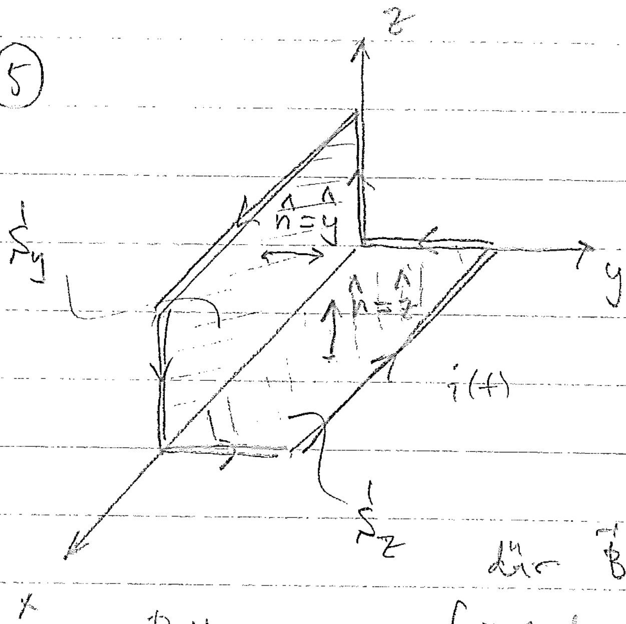
$$\vec{B}_{\text{båge}}(\vec{r} = \vec{0}) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int_{\varphi'=\pi}^{3\pi/2} \frac{(\hat{\varphi}(\varphi')\,a\,d\varphi') \times (-\hat{r}(\varphi')\,a)}{a^3}$$

$$= \hat{z}\,\frac{\mu_0 I_0}{4\pi a} \int_{\varphi'=\pi}^{3\pi/2} d\varphi' = \hat{z}\,\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\,\frac{\pi}{2} = \hat{z}\,\frac{\mu_0 I}{8a}$$

Superposition ger

$$\vec{B}(\vec{r} = 0) = 2\vec{B}_{\text{rak}}(\vec{r} = 0) + \vec{B}_{\text{båge}}(\vec{r} = 0) = \hat{z}\,\frac{\mu_0 I_0}{2a}\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{4}\right)$$

(5)



Beräkna flödet genom ytan $\vec{S} = \vec{S}_y + \vec{S}_z$, där

$$\phi = \int_{\vec{S}} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$= \int_{\vec{S}_y} \vec{B} \cdot \hat{y}\, ds + \int_{\vec{S}_z} \vec{B} \cdot \hat{z}\, ds$$

där $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \mu_0 H_0 \left(\hat{y} \cos(\omega t) + \hat{z} \sin(\omega t) \right)$.

Detta ger flödet

$$\phi = \int_{\vec{S}_y} \mu_0 H_0 \cos(\omega t)\, ds + \int_{\vec{S}_z} \mu_0 H_0 \sin(\omega t)\, ds$$

$$= \mu_0 H_0 \left[\cos(\omega t) + \sin(\omega t) \right] a l$$

Den inducerade spänningen blir

$$\mathcal{V} = -\frac{d\phi}{dt} = -\mu_0 H_0 \omega \underbrace{\left[-\sin(\omega t) + \cos(\omega t) \right]}_{\substack{= \sqrt{2} \sin(\omega t + 3\pi/4) \\ = -\sqrt{2} \sin(\omega t - \pi/4)}} a l$$

och motsvarande ström

$$i(t) = \frac{\mathcal{V}}{R} = \frac{\sqrt{2} \mu_0 H_0 \omega a l}{R} \sin(\omega t - \pi/4)$$